高职高专“十一五”规划教材
GAOZHI GAOZHUAN SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI
（数学立体化系列教材）

应用数学基础训练教程

（五年制）下册

阎章杭　赵　墀　黄士林　主编

YINGYONG SHUXUE JICHU XUNLIAN JIAOCHENG

化学工业出版社

高职高专“十一五”规划教材

（数学立体化系列教材）

应用数学基础训练教程

（五年制）

下册

阎章杭　赵　墀　黄士林　主编

化学工业出版社

·北京·

本书是立体化教材《应用数学基础》（五年制）下册（第二版）的配套教材，同时该教材又有较大的独立性，该书所涉及的内容有一元函数与多元函数微积分、概率和数理统计基础、线性代数基础、无穷级数、常微分方程简介等。

该书针对当前高职高专学生普遍存在的课程难学、规律难寻、习题难做等方面的问题，对主教材的内容进行全面、系统、科学的辅导。该书每一章的辅导内容均有四个模块，即：本章内容小结及学习建议、常见问题分类与解法、典型习题解答与提示、自我测验（备选习题），另外本书后面还精选了部分往届期终试卷以供学生学习参考。

编者还将该书与主教材的主体内容合并制作了该套教材的电子教案，并免费赠送师生授课及实训使用，另外还建有专门网站：数学规划教材网（www. shuxue999. net），提供如教材分析、教学建议、辅导答疑等相应网上服务。

本书可作为高职高专院校、成人高校、本科院校开办的二级院校五年制以及三年制各专业的学生学习高等数学及应用数学课程的配套教材。对内容稍作处理，也可作为中职学生学习高等数学及应用数学相应的配套教材。另外，对工程技术人员、经济管理人员也有较高的参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础训练教程．五年制．下册/阎章杭，赵墀，黄士林主编．—北京：化学工业出版社，2008．3
高职高专“十一五”规划教材
ISBN 978-7-122-02284-4

Ⅰ．应… Ⅱ．①阎…②赵…③黄… Ⅲ．应用数学-高等学校：技术学院-习题 Ⅳ．O29-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 030402 号

责任编辑：高　钰　　　　装帧设计：韩　飞
责任校对：战河红

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 12¼　字数 254 千字　2008 年 6 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www. cip. com. cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：20.00 元

数学立体化系列规划教材编审委员会

前言

当前，我国高职高专教育成为社会关注的热点，面临大好的发展机遇。同时，国家的经济、科技和社会发展也对高职高专教育人才的培养提出了更高要求。而大学数学是高职高专院校各专业必修的一门重要的基础课，它对培养、提高学生的思维素质、创新能力、科学精神以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。为了进一步推动全国大学数学课程的改革及相应的教材建设，使其更加适应当前形势发展的需要，开封大学、河南大学、石家庄铁路职业技术学院、吉林交通职业技术学院、包头职业技术学院、黄河水利职业技术学院、北京工业技术学院、天津渤海职业技术学院、徐州建筑职业技术学院、漯河职业技术学院、南阳理工学院、三门峡职业技术学院、石家庄职业技术学院、商丘职业技术学院、无锡职业技术学院、漳州职业技术学院、雅安职业技术学院、邵阳职业技术学院等院校的优秀教师和专家，先后经过长达八年的通力合作，于近几年联合编写并成功出版了《高等数学与工程数学》(第二版)、《高等数学与经济数学》(第二版)、《应用数学基础》(五年制)(上、下册)、《高等数学》(少学时)、《高等应用数学》(少学时)等多套高职高专规划教材，为了使教材更上一个层次，教材编委会还于近两年投入相当大的人力、财力、物力使该系列教材完善成立体化教材，由于教材很有自身特色，多年来，所编教材深受全国几十所使用该教材院校的欢迎，其中教材《高等数学与工程数学》(第二版)已被教育部列为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

《应用数学基础》(五年制)(第二版)教材是在第一版教材的基础上，对原教材进行认真整理和修订的，并将其完善成立体化教材，从而确保了新教材的质量和自身特色。

在该套教材的编写中，我们以教育部关于五年制高职教育数学教学大纲为重要的依据来组织教学内容编写，并广泛吸取同类教材的长处，力争使教材更具有科学性和实用性。

本套教材共设三篇，第一篇：初等数学；第二篇：一元函数微积分学；第三篇：专业数学。

本书是《应用数学基础》(五年制)(下册)(第二版)的配套教材，同时本书又有较强独立性，该书每章的内容均有四个模块，即：本章内容小结及学习建议、常见问题分类及解法、典型习题解答与提示、自我测验(备选习题)。另外本书后面还精选了部分往届期终试卷以供学生学习参考。

本教材针对当前五年制高职学生普遍存在的数学基础差、课程难学、规律难寻、习题难做等问题，对主教材的每一章，从学习内容、学习方法到习题解答都进行了系统的、科学的辅导，特别注意培养学生自学能力和运用数学知识解决实际问题的能力。本书内容也为主教材的习题课提供了充实的资料和素材，大大方便了教师的备课及学生的学习。

为了使教材更上一个层次，编者还将该套书完善成立体化教材，即将该书的主体内容与主教材合并制作了该套教材的电子教案，并免费赠送师生使用，另外还建有专门的网站：数学规划教材网(www.shuxue999.net)，提供如教材分析、教学建议、典型教案、辅导答疑等相应的网上服务。

为了便于阅读，本书在章节顺序和内容叙述、解题方法、符号标志等方面都与主教材保持一致，每一

章编排结构如下。

（1）本章内容小结：首先对该章内容进行归纳提炼，必要时列表给出，帮助读者了解该章的概貌，然后指出重点、难点，使读者心中有数，把握学习的主动权。另外，针对初学者容易出现的问题，提出学习的建议和注意事项，提高学习效果。

（2）常见问题分类及解法：根据每一章常见问题进行分类，总结每一类习题常用的解题方法和解题技巧，并通过典型例题给出示范、分析、归纳。提倡一题多解和与实际应用相结合。

（3）典型习题解答与提示：考虑到五年制高职学生的特点，本书给出了《应用数学基础》（下册）（第二版）各章节练习题、复习题的答案、提示或详细解答，其中基本题（约占总练习的1/3）仅给出答案，对难度较大的题或提高题则给出提示或详细解答。

（4）自我测验（备选习题）：考虑到不同的学生类别、不同的专业对习题的要求不一样，因而又附加了一部分习题，以供学生自测或备选用。此部分习题仅给出答案，而不做详细解答。

本书由阎章杭总策划、负责组织实施。副主编有拜云胜、张荣、唐仙芝。

参加本书编审工作的有（按章节顺序排名）：拜云胜、辛自力、张荣、黄士林（第十三～第十五章），郭建萍、韩成标、赵墀（第十六、第十七章），阎章杭、辛自力、庞进生（第十八、第十九章），路世英、程传蕊、吕良军、唐仙芝（第二十～第二十三章）。

在本书的编写过程中，曾得到有关院校的院校领导、系部领导和有关专家的大力支持和帮助，杜跃鹏老师积极参与了利用 Mathematica 软件进行数学实验以及数学动画库的制作，余平洋、张媛媛、王霞、赵科、朱立柱、张建平等教师积极参与了该套书的电子教案的编写以及相应的网站建设等项工作。河南大学阎育华与王国胜教授对本书的专业数学部分进行了认真地审核，并提出了许多宝贵的意见，在此一并表示衷心的谢意！由于我们水平有限，不足之处恳请广大读者批评指出。

数学立体化系列规划教材编审委员会
2008 年 1 月

目录

第二篇 一元函数微积分学

第十三章 函数、极限与连续 …… 3

第一节 本章内容小结及学习建议 …… 3
第二节 常见问题分类及解法 …… 4
第三节 典型习题解答与提示 …… 9
第四节 自我测验（备选习题） …… 19

第十四章 导数与微分 …… 21

第一节 本章内容小结及学习建议 …… 21
第二节 常见问题分类及解法 …… 22
第三节 典型习题解答与提示 …… 24
第四节 自我测验（备选习题） …… 35

第十五章 导数的应用 …… 37

第一节 本章内容小结及学习建议 …… 37
第二节 常见问题分类及解法 …… 38
第三节 典型习题解答与提示 …… 41
第四节 自我测验（备选习题） …… 52

第十六章 一元函数积分学 …… 54

第一节 本章内容小结及学习建议 …… 54
第二节 常见问题分类及解法 …… 55
第三节 典型习题解答与提示 …… 62
第四节 自我测验（备选习题） …… 71

第十七章 积分的应用 …… 72

第一节 本章内容小结及学习建议 …… 72
第二节 常见问题分类及解法 …… 73
第三节 典型习题解答与提示 …… 78
第四节 自我测验（备选习题） …… 87

第三篇 专业数学

第十八章 多元函数微分学初步 …… 91

第一节 本章内容小结及学习建议 …… 91
第二节 常见问题分类及解法 …… 92
第三节 典型习题解答与提示 …… 95
第四节 自我测验（备选习题） …… 101

*第十九章 多元函数积分学初步 …… 103

第一节 本章内容小结及学习建议 …… 103
第二节 常见问题分类及解法 …… 104
第三节 典型习题解答与提示 …… 108
第四节 自我测验（备选习题） …… 115

第二十章 概率论基础 …… 117

第一节 本章内容小结及学习建议 …… 117
第二节 常见问题分类及解法 …… 118
第三节 典型习题解答与提示 …… 125
第四节 自我测验（备选习题） …… 134

第二十一章 数理统计基础 …… 136

第一节 本章内容小结及学习建议 …… 136
第二节 常见问题分类及解法 …… 137
第三节 典型习题解答与提示 …… 139
*第四节 自我测验（备选习题） …… 143

第二十二章 行列式 …… 145

第一节　本章内容小结及学习建议 …… 145
第二节　常见问题分类及解法 …… 146
第三节　典型习题解答与提示 …… 148
第四节　自我测验（备选习题） …… 152

第二十三章　矩阵与求解线性方程组 …… 154

第一节　本章内容小结及学习建议 …… 154
第二节　常见问题分类及解法 …… 155
第三节　典型习题解答与提示 …… 160
第四节　自我测验（备选习题） …… 173

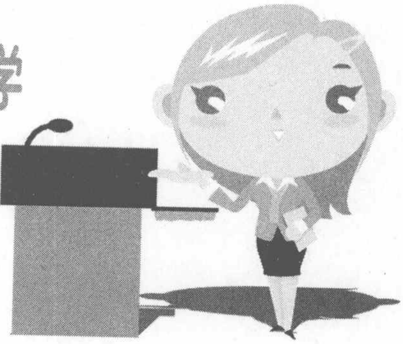
附录一　往届期终考试试卷选 …… 175

试卷一　高等数学（一元微积分）期终试题 …… 175
试卷二　专业数学期终试题 …… 178

附录二　自我测验（备选习题）参考答案及往届期终考试试题参考答案 …… 181

参考文献 …… 186

第二篇　一元函数微积分学



第十三章 函数、极限与连续

第一节 本章内容小结及学习建议

一、本章主要内容

函数的定义；函数的几种特性；复合函数、反函数与初等函数的概念；数列与函数极限的定义；极限的运算法则；无穷小与无穷大的概念；两个重要极限；无穷小的比较；函数在点与区间的连续性及间断性；闭区间上连续函数的性质．

二、本章重点、难点

函数的概念、极限的概念及运算法则、函数连续的概念及性质．

三、对学习的建议

建议认真掌握以下内容．

1. 几个常用的基本极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} c=c$（$c$ 为常数）； (2) $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$； (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}=0$（$\alpha$ 为正的常数）；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m\\ 0, & \text{当 } n>m\\ \infty, & \text{当 } n<m\end{cases}$

（其中 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 和 $b_0,b_1,\cdots,b_n$ 都是常数，且 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$）；

(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$； (7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$； (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$；

(9) $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$； (10) $\lim\limits_{x\to+\infty}q^x=0$（$|q|<1$）．

2. 几个充要条件

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha\left[\text{当}\begin{matrix}x\to x_0\\(x\to\infty)\end{matrix}\text{时 }\alpha\to0\right]$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$；

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$.

3. 图 13-1 给出了当 $x\to\infty$ 和 $x\to x_0$ 时函数的极限与由此引申出来的有关概念之间的关系

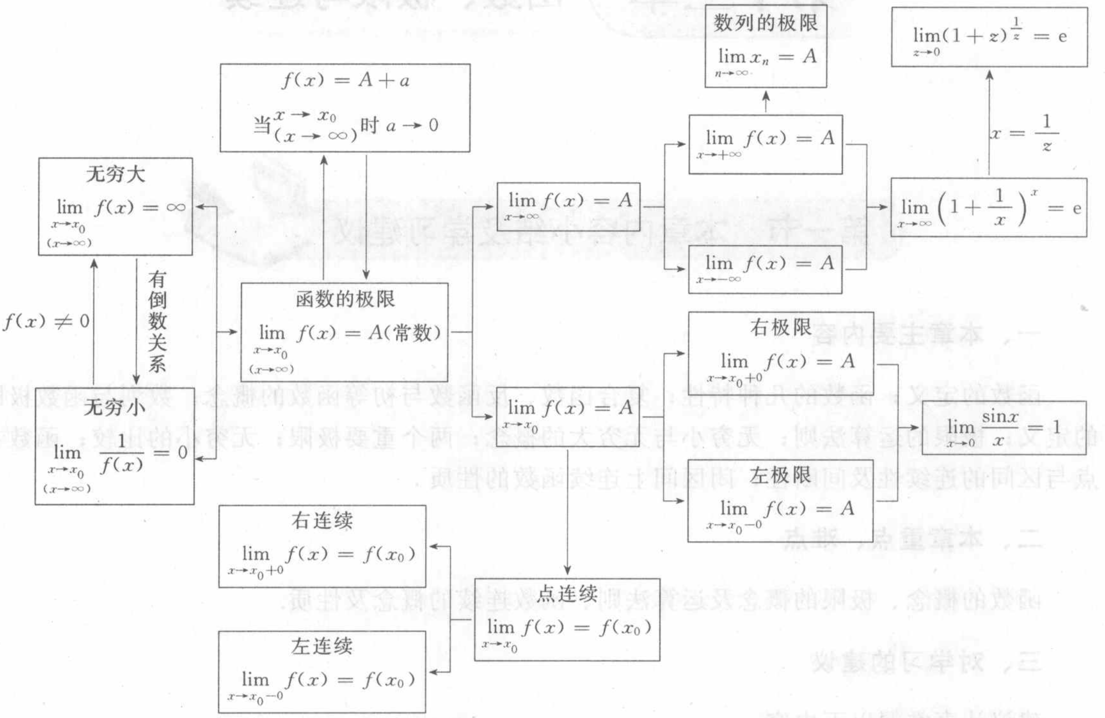


图 13-1　函数的极限与其引申概念之间的关系

4. 表 13-1 列出了函数 $y=f(x)$ 的点连续与区间连续的概念

表 13-1　函数 $y=f(x)$ 的点连续与区间连续的概念

条　件	结　论
(1) 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$	那么 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续
(2) 如果 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内每一点连续	那么 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续
(3) 如果 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=f(b)$，$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)$	那么 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

四、本章关键词

函数　极限　连续

第二节　常见问题分类及解法

一、求函数的定义域

函数的定义域就是指使函数有意义的自变量 x 的取值范围．判断函数有意义的方法有以

下几种：

① 分式的分母不等于零；

② 偶次方根式中，被开方式大于等于零；

③ 含有对数的式子，真数式大于零；

④ 反正弦、反余弦符号内的式子绝对值小于等于1；

⑤ 分段函数的定义域是各段函数定义域的并集；

⑥ 若已知 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a,b]$，求 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域，方法是解不等式组 $a\leqslant\varphi(x)\leqslant b$.

例1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}+\arccos(3x-18)$； (2) $y=\dfrac{\ln(5x-2)}{x^2-7x+10}+\sqrt{10-x}$.

解 所求定义域应使函数式中各部分都有意义，即求解不等式组.

(1) 若使函数有意义，必须

$\begin{cases}x^2-3x+2>0\\|3x-18|\leqslant 1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x<1\text{或}x>2\\\dfrac{17}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{19}{3}\end{cases}$，故所求函数定义域为 $\dfrac{17}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{19}{3}$；

(2) 若使函数有意义，必须

$\begin{cases}5x-2>0\\x^2-7x+10\neq 0\\10-x\geqslant 0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x>\dfrac{2}{5}\\x\neq 2,x\neq 5\\x\leqslant 10\end{cases}$，故所求函数的定义域为 $\dfrac{2}{5}<x\leqslant 10$ 且 $x\neq 2$，$x\neq 5$.

例2 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[2,5]$，求函数 $y=f(4x-3)$ 的定义域.

解 由已知得 $2\leqslant 4x-3\leqslant 5$，即 $\dfrac{5}{4}\leqslant x\leqslant 2$，故所求函数的定义域为 $\dfrac{5}{4}\leqslant x\leqslant 2$.

二、判断两个函数是否相同

一个函数的确定取决于其定义域和对应关系的确定，因此判断两个函数是否相同必须判断其定义域是否相同，且要判断函数表达式是否统一即可.

例3 判断下列各对函数是否相同？

(1) $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{2}(1+\cos x)$； (2) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 与 $g(x)=1$.

解 利用定义域和对应法则来判断.

(1) 因为 $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}$ 的定义域是一切实数，而 $g(x)=\dfrac{1}{2}(1+\cos x)$ 的定义域也是一切实数，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有相同的定义域；又因为 $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}(1+\cos x)=g(x)$，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有相同的对应法则，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同的函数；

(2) 因为 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 的定义域是 $x\neq 0$ 的一切实数，而 $g(x)=1$ 的定义域是一切实数，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同的函数.

三、判断函数奇偶性

判断函数的奇偶性，主要的方法就是利用定义，其次是利用奇偶的性质，即奇(偶)函数

之和仍是奇(偶)函数；两个奇函数之积是偶函数；两个偶函数之积仍是偶函数；一奇一偶之积是奇函数．

例 4　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$　($a>0$ 且 $a\neq 1$)；　(2) $f(x)=x^3(2x^2+\tan x^2)$．

解　(1) 用定义判断

因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=-f(x)$，所以 $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$是奇函数；

(2) 用性质判断

因为 x^3 是奇函数，$2x^2+\tan x^2$ 是偶函数，所以 $f(x)=x^3(2x^2+\tan x^2)$是奇函数．

四、数列极限的求法

利用数列极限的四则运算法则、性质以及已知极限求极限．

1. 若数列通项的分子、分母都是关于 n 的多项式，则用分子分母中 n 的最高次项的幂函数同除分子分母，然后由四则运算法则求极限．

例 5　求下列数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+5}{n^3+3n^2+5n-3}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n-1}{5n^2+3n-4}$；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+3n-2}}$．

解

(1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}}{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}}=0$；　(2) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{5+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}=\dfrac{2}{5}$；

(3) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}}}=1$．

2. 若通项中含有根式，一般采用先分子或分母有理化，再求极限的方法．

例 6　求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1})$．

解　对通项式有理化得

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}.$$

3. 若所求极限是无穷项之和，通常先利用等差或等比数列的前 n 项和公式求和，再求极限．

例 7　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2^n}\right]$.

解　先求由 $a_1=1$，$q=-\dfrac{1}{2}$所构成的等比数列的前 $n+1$ 项和，再求极限，

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left[1-(-1)^n\frac{1}{2^n}\right]=\frac{2}{3}.$$

4. 利用两边夹逼定理求数列极限，方法是将极限式中的每一项放大或缩小，并使放大、缩小后的数列具有相同的极限．

例 8　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\right)$.

解　因为$\frac{n}{n^2+i\pi}\geqslant\frac{n}{n^2+n\pi}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$\frac{n}{n^2+i\pi}\leqslant\frac{n}{n^2+\pi}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

所以　$n\frac{n}{n^2+n\pi}\leqslant\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\leqslant n\frac{n}{n^2+\pi}$

而　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1$

故　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\right)=1$.

5. 若通项式为形如 1^∞ 形式的不定式，一般采用重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$求极限．

例 9　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+3}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$.

解　用重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$求极限．

(1) $原式=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2=\mathrm{e}$;

(2) $原式=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1-1}{2}}\right]^2$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2=\mathrm{e}^2.$$

五、函数极限的求法

函数的极限比数列的极限复杂，原因有两个，一是自变量的变化过程多；二是函数式复杂；因此，求函数的极限首先要观察自变量的变化和函数表达式，然后选择适当方法．一般地，函数极限有以下几种求法．

① 数列极限的求法也适合求函数的极限．

② 利用函数的连续性求函数的极限，即若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例 10　求$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x+1}{x^2+5x+4}$.

解　因为函数$\frac{x+1}{x^2+5x+4}$在 $x=4$ 处连续，所以$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x+1}{x^2+5x+4}=f(4)=\frac{1}{8}$.

③ 若求分段函数在分界点处的极限，则利用极限存在的充要条件求极限．即函数在某一点极限存在的充要条件是函数在该点的左右极限存在且相等．

例 11　已知

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3 & x\leqslant 1\\ x-1 & 1<x<3\\ \sin x+1 & x\geqslant 3\end{cases}，求\lim_{x\to 1}f(x)，\lim_{x\to 3}f(x).$$

解　在 $x=1$ 处，求 $f(x)$ 的左右极限

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+2x-3)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$，所以$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$，

在 $x=3$ 处，求 $f(x)$ 的左右极限

$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x-1)=2$，$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(\sin x+1)=\sin 3+1$.

因为 $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ 不存在.

④ 利用两个重要极限求函数的极限．即若所求极限为形如$\frac{0}{0}$形式的不定式，并且极限式中含有三角函数，一般通过三角函数的恒等变换再利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$求极限；若所求极限为形如 1^∞ 形式的不定式，并且所求函数易转化为 $(1+u)^{\frac{1}{u}}$ 或$\left(1+\frac{1}{u}\right)^u$ 的形式，通常采用$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 求极限．

例 12　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\arcsin 5x}$.

解　因为已知极限为$\frac{0}{0}$形式不定式，且含有三角函数，则有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\times\frac{5x}{\arcsin 5x}\times\frac{7x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\arcsin 5x)}{\arcsin 5x}\times\lim_{x\to 0}\frac{7}{5}=\frac{7}{5}.$$

例 13　求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\cos x-1}}$.

解　因为所求极限为 1^∞ 形式不定式，由$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 得

$$原式=\lim_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}=\mathrm{e}.$$

⑤ 利用无穷小量的特性以及无穷小量与无穷大量的关系求极限．即无穷小量与有界变量之积仍是无穷小量；有限个无穷小量之积仍是无穷小量；有限个无穷小量之代数和仍为无穷小量等．无穷小量与无穷大量的关系是互为倒数．

例 14　求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin x\cos\frac{1}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}$.

解　(1) 利用无穷小量的性质求该极限，因为当 $x\to 0$ 时，x^2，$\sin x$ 均是无穷小量，而 $\cos\frac{1}{x}$为有界变量，所以$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin x\cos\frac{1}{x}=0$；

(2) 利用无穷大量与无穷小量的关系求该极限．

因为当 $x\to 2$ 时，$x^2+2x-3\to 5$，$x^2-4\to 0$，

所以$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+2x-3}=0$，所以$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}=\infty$，极限不存在.

六、判断函数连续性

利用函数连续性的等价定义，对于分段函数在分界点的连续性，可用函数在某点连续的