第二卷·第一期

The Review of New Political Economy

新政治经济学评论

汪丁丁 主编

丁 利：非合作博弈论与纳什均衡：一个综述

陈仲常 吴永球：关于教育与就业关系的一个理论模型及实证检验

张凤林：后凯恩斯经济学若干新进展评述

浙江大学经济学院
浙江大学民营经济研究中心
浙江大学跨学科社会科学研究中心

世纪出版集团 上海人民出版社

第二卷·第一期
(总第三期)

The Review of New Political Economy

汪丁丁　主编

新政治经济学评论

浙江大学经济学院
浙江大学民营经济研究中心
浙江大学跨学科社会科学研究中心

世纪出版集团　上海人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

新政治经济学评论．第2卷，第1期/汪丁丁主编．一上海：上海人民出版社，2006
ISBN 7-208-06205-6

Ⅰ．新…　Ⅱ．汪…　Ⅲ．政治经济学-文集
Ⅳ．F0-53

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第030572号

出 品 人　施宏俊
责任编辑　王志毅
装帧设计　王小阳

世纪文景

新政治经济学评论
第二卷·第一期
汪丁丁　主编

出　版　世纪出版集团　上海人民出版社
（200001 上海福建中路193号 www.ewen.cc）
出　品　世纪出版集团　北京世纪文景文化传播有限公司
（100027 北京朝阳区幸福一村甲55号4层）
发　行　世纪出版集团发行中心
印　刷　山东新华印刷厂临沂厂
开　本　787×1092毫米　1/16
印　张　12.25
插　页　2
字　数　212,000
版　次　2006年5月第1版
印　次　2006年5月第1次印刷
ISBN 7-208-06205-6/F·1407
定　价　28.00元

目 录

CONTENTS

非合作博弈论与纳什均衡：一个综述

◎ 丁利*

摘　要：本文提供一个对非合作博弈论及其核心解概念纳什均衡的不完整综述。我们开头介绍了博弈理论的结构，特别是一个策略互动局势的展开型与策略型表示，然后引入纳什均衡和其他解概念，如反复优超解、可理性化解和相关均衡。如果没有人有激励偏离的话，一个解作为被推荐给所有博弈者的行为建议是自我实施的，从而它一定构成纳什均衡。我们也表述了博弈论如何处理不完全信息、不完美信息博弈的贝叶斯－纳什均衡、普遍先验假设与几个无交易定理。鉴于有时一个博弈有多个均衡，本文集中于介绍重要的均衡精炼，特别是子博弈完美均衡、完美贝叶斯均衡、序贯均衡、颤抖手完美均衡、适度均衡和策略稳定解。最后我们讨论了博弈论及其均衡解的基础与解释，并强调了它们在统一的社会科学体系中的关键地位。

关键词：非合作博弈论；策略互动；均衡精炼

博弈论①②作为关于“理性人的互动行为”（Aumann，1985，p. 35）的理论，已经发展成为

---

* 丁利，中山大学法学院副教授、法学博士。本文是为《金融学大辞典》所撰写的“博弈论与纳什均衡”条目，作者感谢组织者和出版者允许在此处发表。此项工作得到了“985”计划的资助。

① 博弈论总结性的文献，应该包括 20 世纪 90 年代的几本专著性质的教科书（Fudenberg & Tirole，1991；Myerson，1991；Osborne & Rubinstein，1994），以及奥曼和哈特主编的百科全书式的《博弈论及其经济应用手册》（Aumann & Hart，1992，1994，2002）。

② 我们在本文中特指非合作（non-cooperative）博弈。它关注的是单个博弈者的可能行动，而合作博弈关注的是博弈者团体可能的联合行动。按照纳什的说法，在非合作博弈中，“我们假定每个博弈者都独立地行动，不同任何其他人进行合作，也不同任何其他人进行信息传递”（Nash，1951，p. 286）。实际上后面一条是不必要的，据豪尔绍尼的看法，只有在义务（协议、承诺、威胁）是有约束力并且可强制执行的时候，才会出现合作博弈。更进一步，如果博弈者之间形成了有约束力的契约，那么它也应该是一个非合作博弈的结果。故而，“结盟模型区别于非合作模型本质上是因为，它把重点放在博弈者团体能实现什么而不是单个博弈者能做什么上，并且它不考虑博弈者团体内部是如何作用的。如果我们希望在一个非合作博弈中模拟结盟形成的可能性，那么我们必须叙述结盟是如何形成的以及他们的成员是如何选择加入的。一个结盟博弈没有这些细节，这样一个博弈的结果也不依赖于它们”（Osborne & Rubinstein，1994，pp. 255－256）。所以，按照所谓“纳什规划”（Nash，1953），非合作博弈通常被认为是更基本的博弈理论。本文以一种彻底的非合作的观点看待博弈，我们基本不会涉及合作博弈。

分析理性决策者（rational decision-maker）在策略互动（strategic interaction）局势下的行为选择模式的标准工具。纳什均衡（Nash equilibrium）则是非合作博弈论中占据核心位置的解概念，以其创立者约翰·纳什（John Nash）① 命名。其原始思想和概念可以追溯到法国经济学家古诺对双寡头竞争的分析（Cournot，1838），而纳什则给出了一般情形下的定义，并证明了其在任何有限博弈中的存在性，此即博弈论基本定理（Nash，1950，1951）。借助于纳什均衡等一系列解概念，博弈论为整个社会科学提供了一种规范语言，并成为任何一种社会科学理论的理想图景中不可分割的一部分。

博弈论的巨大成就，不仅仅反映在 1994 年纳什（John Nash）、豪尔绍尼（John Harsanyi）、泽尔滕（Reinhard Selton），2005 年奥曼（Robert Aumann）、谢林（Thomas Schelling）荣获诺贝尔经济学奖，以及以博弈论为工具研究信息经济学的米尔利斯（James Mirrlees）和威克瑞（William Vickrey），阿克洛夫（G. Akerlof）、斯宾塞（M. Spence）和斯蒂格里茨（J. Stiglitz）也分别于 1996、2001 年被授予诺贝尔经济学奖上，更重要的是，博弈论在产业组织理论、契约理论、金融理论以及法学、政治学等领域都有着广泛的应用。可以说在现代社会科学的发展中，博弈论已经占据了核心地位，并在深度和广度上继续取得巨大突破和惊人进展。

后面我们将有选择地综合主要参考文献中的内容，简要介绍非合作博弈论的基本结构、纳什均衡及其弱化和精炼、解概念的解释，以及博弈论与纳什均衡在整个社会科学大厦中的地位。

一、博弈理论的基本结构

（一）博弈论概要

如 Ritzberger（2002）所指出，非合作博弈理论有三个基本要素，即：个体理性决策（individual rational choice）理论，博弈的表示（representation）理论和解概念（solution concept）。

个体理性决策理论是博弈论的基础，有时也被看作“一人博弈”或“对自然的博弈”（games against nature）。个体理性决策理论的核心在于，针对决策者的偏好，我们要给出一个描述他关于外部世界不确定性的信念系统（通常以概率分布来刻画）和一个效用函数，他最大化在此信念下的预期效用函数并据此作出决策。冯·诺依曼和摩根斯坦在《博弈论与经济行为》第 2 版的附录中，第一次给出一个公理刻画，从而对这个问题予以了比较全面的回答。

---

① 在博弈论文献中，NASH 也被认为代表了最杰出的贡献者：N，冯·诺依曼；A，奥曼；S，泽尔滕、沙普利、舒贝克、谢林；H，豪尔绍尼。

博弈的表示形式在文献中通常有两类，即策略型（strategic form）和展开型（extensive form）。通常我们认为展开型——一个博弈形式（博弈树）加上支付函数——是对一个博弈可能如何进行的物理信息的精确刻画。每个展开型博弈都引出其相应的策略型表示。从应用的意义上，策略型博弈似乎代表了同时行动的或者静态的博弈，展开型代表了序贯行动的或者动态的博弈，但必须强调它们可以是对同一个博弈的不同形式的表示。

除了博弈的物理结构，我们通常还假设存在一个关于物理结构和博弈理论（包括博弈者是理性的以及解概念）的知识结构，并要求它们是博弈者之间的普遍知识（common knowledge），即它们是真的，并且每个人都知道如此，每个人都知道每个人都知道如此，以至无穷。这就是经典博弈论中的完全信息假设。严格来说，非合作博弈就是完全信息的博弈。

博弈论要尽量做到提供一个解概念，以对所有博弈给出博弈将会如何进行的描述。解概念，可以看作一个从博弈集合到策略集合的映射，对每一个定义域内的博弈，都给出博弈如何进行的描述。按照梅耶森（Myerson，1991）的看法，博弈论的目的是生成具有下述性质的解概念：①对于任一博弈及其解集合中的每个预见，都存在一个环境使其成为理性智能的博弈者将会如何行动的准确预见；②对于任一博弈及值域中不属于解集合的每个预见，没有一个环境使其成为理性智能的博弈者将会如何行动的准确预见。满足这两个性质的解概念是一个精确解。满足第一个性质的解概念叫做下解（lower solution）；满足第二个性质的解概念叫做上解（upper solution）。下解虽然排除了所有不合理的预测，但也可能排除了某些合理的预测；上解虽然包含了所有合理的预测，但也可能包含了某些不合理的预测。

博弈论在假设博弈者的偏好给定（通常以预期效用函数来刻画）的情况下，每个博弈者考虑到互动性和策略性后，要得到一个关于博弈将会如何进行的信念系统，同时他选择在此信念系统下的最优行动。换句话说，这样一个解概念，本质上由两部分组成，即行为方案以及与其协调（支持其为理性选择）的信念系统。

在此基础上，我们要求博弈的解是一个能够自我实施（self-enforcing）的由局外人（研究者或建模者）对博弈者应该如何进行博弈的行动方案的建议，或者说博弈者之间关于如何博弈的协议。所以，解概念是事前的（ex ante）。值得指出的是，自我实施是一个“元观念”（meta-notion），不能在博弈理论内部完全形式化。作为满足自我实施性质的必要条件，纳什均衡就是这样一个策略组合，每个博弈者在对手不改变策略的前提下没有激励偏离自己的策略。所以，纳什均衡可以看作是上解。

如何进一步把那些不合理的（即不是自我实施）解概念排除，这项工作就是纳什均衡的精炼，即在解概念内涵上的加强。我们主要关注那些在其展开型表示中特别有意义并在文献中受

到特别多研究的均衡精炼，如子博弈完美均衡、完美贝叶斯均衡、序贯均衡、颤抖手完美均衡、适度均衡、策略稳定解等。后向归纳（backward induction）和前向归纳（forward induction）是合理的博弈论解概念中反映自我实施性质的特别重要的两个观念。

（二）展开型与策略型表示

博弈的展开型表示囊括了这些信息（Fudenberg & Tirole，1991b，p. 77）：①博弈者集合；②行动的顺序，即谁什么时候行动；③当博弈者行动时，其选择是什么；④博弈者作出选择时知道什么；⑤作为所做行动的函数的支付；⑥在外生事件上的概率分布。我们这里给出一个简单且不全面的非形式定义（严格定义请参考 Myerson（1991）等）。

记一个展开型博弈为：

$$\Gamma = (X, Z, <, I, \iota, C, H, p_0, u)$$

其中 X 是决策点（decision node）集，Z 是终点（terminal node）集，$<$ 是 $X \cup Z$ 上的严格偏序关系（precedence relation），用以表示先后关系；x 是 x_n（或 z）的前点（predecessor），当且仅当对一些 x_1，…，x_N 有 $x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_n$①；$\forall z \in Z$，$\forall x \in X$，不可能 $z < x$ 或 $\exists z': z < z'$；存在惟一的原点 x_0 具有性质 $\exists x \in X$：$x < x_0$；任何 x，z 要么是原点，要么有惟一的直接（immediate）前点，任何 x，z 的前点都是完全序。所以博弈形式是一个有向且有根的树。

$I = \{0, 1, \cdots, I\}$ 是博弈者集合，其中 0 是自然，（授权）函数 $\iota: X \to I$ 对决策点赋予博弈者标号（此博弈者在此点作出决策）。

$C(x)$ 是在节点 x 处的行动集合，行动 $c \in C(x)$ 连接了 x 和 x'，如果 x' 是 x 的直接续点并通过 c 到达，即 c 是连接 x' 和 x 的枝，此时我们记为 $x \xrightarrow[c]{} x'$。对 $\forall c \in C(x)$，存在惟一的 x' 使得 $x \xrightarrow[c]{} x'$。

信息集（information set）的集合 H 是 X 的一个划分，$h(x) = h \in H$ 且 $x \in h$。信息集反映了博弈者关于博弈的不确定性，他知道自己处在信息集中的某个决策节点上，但并不知道具体在哪一个上。我们总是假设如下一些一致性条件：$\forall h \in H$，$\forall x$，$y \in h$，$\iota(x) = \iota(y)$ 且 $C(x) = C(y)$；如果 $h(x) = h$，那么 $\iota(h) = \iota(x)$ 且 $C(h) = C(x)$；记 i 的信息集为 $H_i = \{h \mid \iota(h) = i\}$。

我们假设如果 $\iota(x) = 0$，那么 $h(x)$ 是单点集，自然的行动定义为函数 $p_0: \{x \in X \mid \iota(x) = 0\} \to \Delta(C(x))$，它描述了外生的不确定性。

$(X \cup Z, <)$ 的一个子树 $Y(x)$ 是决策节点 $x \in X$ 及其续点。子树 $Y(x)$ 以及 $(I, \iota, A, H, u, <)$ 在其中的限制，是一个子博弈 $\Gamma(x)$，如果对任何 $h \in H$，$h \cap Y(x) \neq \varnothing \Rightarrow h \in Y(x)$。

---

① 同理，可定义续点。

如果每个信息集 h 都是单点集，则博弈为完美信息。反之，则博弈为非完美信息。

博弈是完美记忆（perfect recall）的，即博弈者能够回忆起自己过去所知道的，包括自己过去的行为，如果对所有博弈者 i，h，$h' \in H_i$，c_1，$c_2 \in h$，那么存在 c'_1，$c'_2 \in h'$使得 c'_1 是 c_1 的前点当且仅当 c'_2 是 c_2 的前点（c_1 和 c_2 可能重合）。即从根到 c_1，c_2 的路径包含着博弈者 i 同样的行动。

u 是效用函数向量，其每一个标量对每一个博弈者（自然除外）给出一个伯努利效用函数 $u_i:Z \to R$。在预期效用函数的假设下，每个博弈者在彩票集 $\Delta(Z)$ 上有一个理性偏好。在后面定义了策略以后，由于在路径与终点之间有一一对应的关系，支付函数可以定义在策略集上。

在展开型博弈中，策略被定义为从信息集集合到行动的概率分布空间上的映射。具体地，博弈者 i 在信息集 $h \in H_i$ 处的一个局部策略为一个在行动集合 C_h 上的概率分布；博弈者 i 的一个行为策略（behavioral strategy）s_i 就是对每个信息集都赋予一个局部策略。一个纯策略是在每个信息集处都赋予博弈者一个行动，博弈者 i 的纯策略集合为 $A_i = \times_{H_i} C(h_i)$；博弈者 i 的混合策略集合就是 $\sum_i = \Delta(A_i)$。

有两种把展开型博弈化归为策略型的方法①。一是博弈者集合不变，每个博弈者的纯策略集合为 A_i，这样一个策略型博弈 $G_N = (I, A, u)$ 被称作原博弈 Γ 的正规型表示（representation in normal form）。博弈者 i 的混合策略集合就是 $\hat{S}_i = \Delta(A_i)$。如果信息集 $h \in H_i$ 被博弈者 i 的策略所排除，那么策略对 h 处的行动要求就无关紧要了，所以每个博弈者的纯策略集合中可能包含很多结局等价的纯策略。如果我们用结局等价策略类中的一个来代表，那么我们得到的是半简约（semi-reduced）正规型；进一步，如果所有等价于其他纯策略的混合的纯策略②都被删除③，则得到的是简约（reduced）正规型。

另一种方法是代理人（agent）型正规型表示④。每个博弈者在不同的信息集处都由不同的代理人作出行动选择，这就相当于扩充了博弈者集合，而每个博弈者的所有代理人都有与他相同的效用函数。即博弈者集合为 $\widetilde{I} = \{0, 1, \cdots, \sum_{H_i} |H_i|\}$，每个博弈者 ij 的行动空间为 $\widetilde{A}_{ij} = C(h_{ij})$，$h_{ij} \in H_i$。由于 $s_i = \times_{ij} \tilde{s}_{ij}$，一个行为策略可以理解为代理人型正规型的混合策略。代理人型正规型带来的一个问题是，在正规型中，策略之间的一些优超（domination）关系可能会遭

① 一个展开型博弈对应着惟一的一种策略型，反之则不然。

② 这样的策略叫做随机多余的。

③ $a_i \in A_i$ 将被删除，如果满足：$\exists s_i \in S_i$，$s_i(a_i) = 0 \wedge (\forall j \in I,\ u_j(s \backslash a_i) = u_j(s))$。

④ 后文，我们以正规型专指通常的正规型表示，以代理人型专指代理人型正规型表示。

到破坏，一个正规型的（弱）劣策略对应于代理人型正规型的内容可能就不是（弱）劣的了。

（三）纳什均衡

展开型博弈Γ的纳什均衡，被定义为其代理人型正规型的均衡 $\bar{s}^*$（即行为策略均衡），使得 $\bar{s}^*$ 的混合表示同时也是其正规型的一个均衡。根据 Kuhn（1953）的重要结果，对具有完美记忆的博弈Γ，$\Delta(A_i)$ 中任意两个行为等价的混合策略必定支付等价。每个正规型混合策略对应着特定的一类结局等价的行为策略。所以，虽然均衡在策略型博弈中通常被定义在混合策略上，而在展开型博弈中行为策略似乎更自然些，但二者本质上并无区别。

博弈论基本定理（纳什均衡存在定理）（Nash，1950，1951）：对任一有限策略型博弈，即博弈者集合和每个博弈者的纯策略集合都是有限的，都存在一个混合策略意义上的纳什均衡。

纳什均衡是我们关注的博弈论解概念的核心。可以说，纳什均衡是整个博弈论的基础和拱石。一方面，它是一系列自我实施的博弈解概念的必要条件，如劣策略反复删除解、可理性化解与相关均衡解的收敛；另一方面，它又是一系列精炼解概念，如子博弈完美均衡、完美贝叶斯均衡、序贯均衡、颤抖手均衡、适度均衡、本质均衡、策略稳定解和进化稳定策略等的出发点。

二、策略型博弈与纳什均衡

一个策略型博弈为 $G=(I,A,u)$，其中包括：一个博弈者的有限集 I；对每个博弈者 $i\in I$ 都有一个非空的可行行动（action）集合 A_i；对每个博弈者 $i\in I$ 都有一个建立在结果集合 $A=\prod_{j\in n}A_j$ 上的偏好关系；对每个博弈者都存在一个支付函数（或效用函数）$u_i:A\to R$。

纳什（Nash，1951）的杰出贡献之一在于定义了**纳什均衡**。我们首先定义一个最优反应函数 $BR_i:A_{-i}\to A_i$，$BR_i(a_{-i})=(a_i\in A_i:\forall a'_i\in A_i,\ u_i(a_{-i},a_i)\geqslant u_i(a_{-i},a'_i))$。纳什均衡就是一个行动组合 $a^*\in A$，其中 $a_i^*\in BR_i(a_{-i}^*)$，每个博弈者的行动都是对其他人行动的最优反应。纳什均衡可以看作是一个如下意义上的稳定状态（steady state），即在其他人不改变行动的前提下，没有人有激励单方面偏离（deviate）它。记纳什均衡对应为 $NE(G)$。

显然，在如上定义的策略型博弈中，并非所有博弈都有纳什均衡，如人们熟悉的押钱博弈，“老虎、鸡、虫、棒子”游戏等。所以我们需要拓展行动集合。对博弈（I,A,u）我们可以定义一个混合扩充博弈（I,S,u）：其中对每个博弈者 $i\in I$，混合策略集合 $S_i=\{s_i:A_i\to R_+,\ \sum_{a_i\in A_i}s_i(a_i)=1\}=\Delta(A_i)$。其元素被称为博弈者 i 的混合策略或者随机策略，原来每个 A_i 中的元素叫做纯策略。在允许混合策略的前提下，我们通常把（I,A,u）与其混合扩充（I,S,u）视为同一博弈。

一个策略 s_i 对博弈者 i 是严格劣的（strictly dominated，或被严格优超的），如果 $\exists\sigma_i\in S_i$，$u_i(\sigma_i,a_{-i})>u_i(s_i,a_{-i})$，$\forall a_{-i}\in A_{-i}$。不使用严格劣策略，应该是贝叶斯理性的最低要求。相应的，我们可以定义 s_i 是弱劣（weakly dominated）策略，如果 $\exists\sigma_i\in S_i$，$u_i(\sigma_i,s_{-i})\geqslant u_i(s_i,s_{-i})$，$\forall s_{-i}\in S_{-i}$并且 $\exists s_{-i}\in S_{-i}:u_i(\sigma_i,s_{-i})>u_i(s_i,s_{-i})$。显然，如果一个纯策略是（弱）劣的，则以正概率使用它的混合策略也是（弱）劣的。另外，一个劣策略可能不被任何纯策略所优超，但却由于一个混合策略而成为劣的。一个混合策略可能会被一个（纯）策略严格优超即便它只对那些不被弱优超的纯策略赋予正概率。

博弈 G 中一个策略 s'_i 是对 s_{-i} 的最优反应，如果 $s'_i\in\arg\max_{s''_i\in S_i}u_i(s''_i,s_{-i})$。最优反应策略有一个重要性质（无差异原则），即如果 $s_i(a_i)>0$，那么 $u_i(a_i,s_{-i})=u_i(a_{i'},s_{-i})$，$\forall a_{i'}:s_i(a_{i'})>0$。换句话说，一个混合的最优反应策略是所有最优反应纯策略以正概率的线性组合。

利用最优反应的概念，一个策略 s_i 对博弈者 i 是严格劣的，当且仅当不论他关于其他博弈者如何行动的信念是什么①，s_i 都不是 i 的最优反应；一个策略 s_i 对博弈者 i 是弱劣的，当且仅当对所有他关于其他博弈者如何行动的非负分布的信念②，s_i 都不是 i 的最优反应③。

由此可以无困难地把纳什均衡的定义建立在策略上，根据著名的布劳维尔不动点定理或角谷静夫不动点定理，纳什证明了所谓的“博弈论基本定理”。

均衡策略，尤其是混合均衡策略，可以有几种理解（Osborne & Rubinstein，1994）：第一，可以解释为每个人的行动方案（plan of actions）；第二，每个博弈者实际上选择纯策略，随机策略反映了对手对他的信念的不确定性，或者说这是对手对他的猜测（conjecture）④；第三，一个拓展了的博弈中的纯策略（类似后文相关均衡部分的处理）；第四，如豪尔绍尼所揭示的，看

---

① $s_{-i}=\Delta(A_{-i})$。

② $s_{-i}=\Delta^0(A_{-i})$。

③ 要求博弈者不使用弱劣策略叫做可容许性条件（admissibility）。

④ 这是豪尔绍尼、奥曼所倡导，现已成为标准的观点。

作一个被扰动的博弈（perturbed game）的纯策略；第五，进化过程中运用相应的纯策略的博弈者在人群中的稳定分布。

下面是几个策略型博弈及其均衡。

	D	C
D	3, 3	0, 4
C	4, 0	1, 1

图 1

图 1 是著名的“囚徒困境”博弈，其惟一的纳什均衡（也是占优策略均衡）为（D, D）。

	H	T
H	1, -1	-1, 1
T	-1, 1	1, -1

图 2

图 2 是押钱博弈，只有一个混合策略均衡（$1/2H+1/2T$, $1/2H+1/2T$）。

	B	S
B	2, 1	0, 0
S	0, 0	1, 2

图 3

图 3 是性别战博弈，有两个纯策略均衡（B, B）和（S, S），以及一个混合策略均衡（$2/3B+1/3S$, $1/3B+2/3S$）。

从博弈论发展历史的角度看，纳什均衡存在性定理是冯 · 诺依曼二人零和博弈的最大最小定理的自然延伸。冯 · 诺依曼和摩根斯坦（1947）表明，任何非零和博弈都可以通过引入一个虚拟的博弈者“自然”而转化为零和博弈。但与纳什均衡相比，这种处理的社会科学含义是不甚清晰的。

如博弈论经典之一《博弈和决策》的作者卢斯和莱法（Luce & Raiffa, 1957, p. 173）所指出：“如果我们的非合作理论导致一个策略选择的组合，并且它具有这样的性质，即关于理论的知识不会导致一个人作出一个不同于理论预见到的选择，那么理论剥离出来的策略一定是均衡点。”这也使得纳什均衡成为最有吸引力的解概念，因为它是满足自我实施性质的最低要求。

传统博弈论提供了一些关于纳什均衡的直觉看法，典型的如事前交流（pre-play communication）、自我实现的预言（self-fulfilling prophecy）和焦点（focal point）解释。事前交流解释是说，如果博弈者事前讨论如何玩这个游戏，那么它一定是纳什均衡，要不就会至少有一个人有

动力偏离这种玩法；自我实现的预言是说如果大家都知道一个理论预言游戏应该怎么玩，那它一定预言的是纳什均衡；至于焦点解释，则是说，“如果一个博弈有一种明显的玩法（从博弈结构本身或它的设定得出），那么博弈者们会知道其他博弈者正在干什么。”所谓均衡，就是大家都知道的明显的玩法。

三、四个基本解概念及其公理刻画

（一）非均衡解

虽然人们通常认为纳什均衡是非合作博弈最可接受的解概念，但奥曼（Aumann，1974，1987）、伯恩海姆（Bernheim，1984）和皮尔斯（Pearce，1984）等人指出，比纳什均衡更弱的概念，如反复优超解（iterated dominance，或严格劣策略重复删除解）、可合理化解（rationalizability）、相关均衡解（correlated equilibrium）等也有成为博弈解的很好理由。

在假设博弈结构和每个博弈者是理性的为普遍知识的前提下，正如 Fudenberg 和 Tirole（1991）所指出的，反复优超解的出发点是一个理性的博弈者从来不会采用严格劣策略，而可理性化解的出发点是一个补充问题：一个理性的博弈者可能运用的所有策略是什么？答案是一个理性的博弈者将只运用那些相对于他关于对手策略的信念是最优反应从而被证实为正当的策略。

对博弈 $G=(I,(A_i),(U_i))$，记 $A^0=A$，对所有 i，令：

$$A_i^k=\{a_i\mid>\exists s'_i\in\Delta(A_i^{k-1}):u_i(s'_i,a_{-i})>u_i(a_i,a_{-i}),\forall a_{-i}\in A_{-i}^{k-1}\}$$

则反复优超解为 $A^\infty=\times_I\cap_{k=0}^{\infty}A_i^k$。由于我们假设纯策略集合的有限性，实际上经过有限次运算即可收敛①。

记 $\sum^0=\times_I\sum_i^0=\times_I\Delta(A_i)$，令：

$$\sum\nolimits_i^k=\left\{\sigma\in\sum\nolimits_i^{k-1}\;\middle|\;\exists\sigma_{-i}\in\times_{j\neq i}Co(\sum\nolimits_j^{k-1}):u_i(\sigma_i,\sigma_{-i})\geqslant u_i(\sigma'_i,\sigma_{-i}),\forall\sigma'_i\in\sum\nolimits_i^{k-1}\right\}$$

可理性化解为 $\sum^\infty=\times_I\cap_{k=0}^{\infty}\sum_i^k$。

记 $\hat{\sum}^0=\Delta(\times_I A_i)$，令：

$$\hat{\sum}_i^k=\left\{\sigma\in\sum\nolimits_i^{k-1}\;\middle|\;\exists\sigma_{-i}\in Co(\times_{j\neq i}\sum\nolimits_j^{k-1}):u_i(\sigma_i,\sigma_{-i})\geqslant u_i(\sigma'_i,\sigma_{-i}),\ \forall\sigma'_i\in\sum\nolimits_i^{k-1}\right\}$$

相关可理性化解为 $\hat{\sum}^\infty=\times_I\cap_{k=0}^{\infty}\hat{\sum}_i^k$，它与前者的区别在于博弈者 i 关于其对手行动的信念中允

① 如果反复优超解集合只有一个元素，那么它就是此博弈惟一的纳什均衡。

许其对手们策略相关。

容易发现，纯策略可理性化解非空；如果 σ 是可理性化解，则 $\forall a_i \in \mathrm{Sup}\ p(\sigma_i)$ 属于反复优超解（在二人情形中二者等价）；纯策略相关可理性化解等价于劣策略反复删除解。

严格劣策略重复删除解和可理性化解是不依赖于劣策略的删除顺序的，而弱劣策略情形则并非如此[①]。因为后者可能使一个原为弱劣策略的策略不再是弱劣（如图 4（Kohlberg & Mertens, 1986）中，依次删去 y_1、x_2、z_1 得到 (x_1,y_2)；依次删去 z_1、y_2、y_1 则得到 (x_1,x_2)）。文献中还有一个比可理性化解稍强的解概念是，首先删除所有弱劣策略，接着进行一个反复劣策略删除操作直至不能继续然后重复前面的步骤。

C_1	C_2	
	x_2	y_2
x_1	3, 2	2, 2
y_1	1, 1	0, 0
z_1	0, 0	1, 1

图 4

奥曼定义了相关均衡。对博弈 $G=(I,(A_i),(U_i))$，扩展以一个奥曼型信息结构（$\Omega, I, (H_i,p_i)_{i\in I}$）（它起着相关装置的作用）。其中自然状态（nature state）的集合 Ω，其子集族为 E，博弈者的信息函数即可能性对应（possibility correspondence）为 $H_i:\Omega\to E$，其直观意义为，当自然状态是 ω 时，博弈者 i 仅知道事件 $H_i(\omega)$ 发生，因为他不知道任何 $\theta\in H_i(\omega)$ 发生的可能性[②]。一个在 Ω 上的概率测度 p_i，代表了博弈者 i 的先验信念（prior belief）（参见本文第四节中对贝叶斯博弈的描述）。

扩展后的博弈的纯策略可以看作是函数 $H_i\to A_i$。等价形式是映射 $\sigma_i:\Omega\to A_i$，满足 $\omega'\in H_i(\omega)\Rightarrow\sigma_i(\omega')=\sigma_i(\omega)$[③]。

σ^* 是（客观）相关均衡，如果对每个博弈者 i 和 σ_i：

① 如果弱劣策略反复删除收敛到惟一元素，那么它一定是一个纳什均衡。

② 自然状态又称可能世界，简称为状态。可能世界的观念可以追溯到莱布尼兹，克里普克和欣迪加（Hintikka, J.）等人也作出了重要贡献。按照萨维奇（Savage, 1954, p.9）的看法，世界是我们关注的对象，世界的一个（可能）状态是关于“世界的描述，没有留下任何没有定义的相关方面”。自然状态之间是互斥的。根据莱布尼兹的同一性原理，我们可以把世界的一个存在状态等价于在它上面成立的所有命题（这些命题使它区别于其他状态），状态之间不可区分的关系由在它们之上共同成立的命题所刻画。

③ 通过足够广泛的自然状态空间，我们可以只关心纯策略。

$$\sum_{\omega\in\Omega}p(\omega)u_i(\sigma_i^*(\omega),\sigma_{-i}^*(\omega))\geqslant\sum_{\omega\in\Omega}p(\omega)u_i(\sigma_i(\omega),\sigma_{-i}^*(\omega))$$

在事中支付的意义上，上式等价于对每个博弈者 i，满足 $p(H_i)>0$ 的信息集 H_i 和所有 a：

$$\sum_{\{\omega:H_i(\omega)=H_i\}}p(\omega/H_i)u_i(\sigma_i^*(\omega),\sigma_{-i}^*(\omega))\geqslant\sum_{\{\omega:H_i(\omega)=H_i\}}p(\omega/H_i)u_i(\sigma_i(\omega),\sigma_{-i}^*(\omega))$$

直接地，对博弈 $G=(I,(A_i),(U_i))$，一个概率分布 $p\in\Delta(A)$ 是相关均衡，如果对每个博弈者 i，每个对某些 a_{-i}满足 $p(a_i,a_{-i})>0$ 的行动 a_i，都有：

$$\sum_{a_{-i}\in A_{-i}}p(a_{-i}\mid a_i)u_i(a_i,a_{-i})\geqslant\sum_{a_{-i}\in A_{-i}}p(a_{-i}\mid a_i)u_i(d(a_i),a_{-i})$$

其中 $d(\cdot)$ 是任何 A_i 到 A_i 上的函数。

相关均衡背后的直觉是，博弈结构只是描述了大家都知道的信息，而某些博弈者之间有一些信息，比如他们之间的通讯交流（communication）或者根据某个偶然事件的相关性，可能不在博弈结构中。奥曼（Aumann，1974）表明，如果把通讯交流和相关性精确地模型化，那么原来博弈的相关均衡就是新博弈的（纯策略）纳什均衡①。并且，奥曼（Aumann，1987）强调，博弈者是贝叶斯理性的意味着相关均衡行为模式。下面是两个例子。

	左	右
上	6, 6	2, 7
下	7, 2	0, 0

图 5

图 5 的博弈中，甲选择上下，乙选择左右，其纳什均衡是（下，左）、（上，右）和一个混合策略均衡。如果信号是公开的，那么通过掷一枚公平的硬币从而各以 1/2 的概率选择（下，左）和（上，右），二人各得 4.5；如果信号不是公开的，那么居间人（mediator）各以 1/3 的概率随机地在（上，左），（上，右）和（下，左）之间分别向两人建议，则可得预期支付 5，超出纳什均衡集的支付的凸组合。

	左	右
上	0, 1, 3	0, 0, 0
下	1, 1, 1	1, 0, 0

左

	左	右
上	2, 2, 2	0, 0, 0
下	2, 2, 0	2, 2, 2

中

	左	右
上	0, 1, 0	0, 0, 0
下	1, 1, 1	1, 0, 3

右

图 6

① 粗看起来，相关均衡作为比纳什均衡更弱的解概念，只需要用更简单的条件刻画（第二个定义）；予以一个奥曼型信息结构作为相关装置（第一个定义），本质上是为了通过刻画博弈者如何实现策略相关以及策略随机化，对相关均衡（纳什均衡是其子集）中的元素给出合理区分。

图6的博弈中，甲选择上下，乙选择左右，丙在左中右三个博弈中选择，其纳什均衡是（下，左，左）和（下，左，右）。如果允许甲乙掷一枚硬币，正面朝上则选择（上，左），反面朝上则选择（下，右），而丙观察不到硬币，那么他会选择中，结果会比原博弈的纳什均衡更好。这个例子也揭示出并非知道的信息越多越好。

（二）公理刻画

伯恩海姆（Bernheim，1986，1998）对这四个基本的博弈解作了公理刻画。对任一策略型博弈，博弈者有一信念系统 $B\in\Delta(A)$，一个理论 ST 是纯策略组合集合 A 的子集，我们以四个解概念指代在其中的纯策略组合（反复优超解和可理性化解）或以正概率被选择的纯策略组合（相关均衡与纳什均衡）。他提出四个公理：

最优性（optimization）：每个博弈者都是理性的，所以他会选择一个根据其信念的最优反应，即他不会选择那些被优超的策略。对 $\forall i$，$a_i\in ST_i$，$\exists\theta\in B$ 使得 $\theta(\cdot\mid a_i)$ 有效并且 $a_i\in BR(\theta(\cdot\mid a_i))$。

协调性（consistency）：一个博弈者的信念中不会对别人的非理性策略赋予正概率，也就是说博弈者都认识到最优性公理。对 $\forall\theta\in B$，$\theta(ST)=1$。

独立性（independence）：博弈者的信念之间是概率不相关的，或者说博弈者的行动是独立的随机事件。$B\in\prod\limits_{i\in I}S_i$。

共同先验（common prior）：信念集 B 只有单元素 θ，且 $ST\subseteq \sup p(\theta)$。

当满足最优性和协调性时，博弈的解为反复优超解；当加上独立性时，为可合理化解；如果不要独立性而加上普遍先验假设，则为相关均衡；四个公理都满足时就是纳什均衡①。

四、不完美信息博弈与贝叶斯均衡、普遍先验

（一）贝叶斯博弈及其均衡

非合作博弈是完全信息的博弈，定义在策略型上的纳什均衡隐含地假设了在“博弈的开始

---

① Brandenburger 和 Dekel（1987）讨论了后验（posterior）均衡（主观相关均衡的一个强化）与（相关或独立）可理性化解之间的关系。加上相关均衡与纳什均衡定义中的直接关联，我们可以发现，把纳什均衡作为一个“元（meta）解概念”（实质上是自我实施观念），能够对更弱的解概念在特殊信息结构的条件下给出合理解释，从而“统一”了所有解概念。