朱玉娥 魏 荣 编

高等院校专科数学丛书

高等数学

（下册）

中国科学技术出版社

高等院校专科数学丛书

高等数学

（下册）

朱玉娥　魏荣　编

中国科学技术出版社
·北京·

(京)新登字175号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学　下册/朱玉娥　魏荣编. —北京:中国科学技术出版社,1994.11

(高等院校专科数学丛书)

ISBN　7-5046-1900-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.①朱…　②魏…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材

Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(94)第05412号

中国科学技术出版社出版

北京海淀区白石桥路32号　邮政编码:100081

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

永旺印刷厂印刷

*

开本:787×1092毫米　1/32　印张:8　字数:180千字

1994年9月第1版　1994年10月第1次印刷

印数:1—3000册　定价:7.80元

前　言

随着科学技术的不断发展，工科院校的专科学生需要学习的知识的门类不断增加，按照培养目标的要求，专科学生主要在于培养熟练技能，因此，基础课应以“必需、够用”为度，很多学院大学专科的高等数学由 160 学时减少到 120 学时，有的专科班则仅仅要求 96 学时左右的内容．为了满足各类大专水平高等数学教学的需要，我们根据国家教委批准的大学专科“高等数学基本要求”，结合我们多年讲授专科高等数学的教学经验，编写了这套供大学专科使用的高等数学教材．

全书共十章，分上、下两册出版．上册内容为一元微积分学及微分方程共六章．教学时数约为 60～75 学时．下册内容为空间解析几何、多元微分学、二重积分及曲线积分、无穷级数共四章．考虑到空间解析几何主要为多元微积分的讲授打基础，因此删去了混合积，而空间曲面和二次曲面仅仅给出了曲面方程和图形特点，未作详细讨论；考虑到大专少学时的要求，没有写三重积分及曲面积分．我们认为这对大多数专业来说是适合的．下册教学时数约为 40～60 学时．

本书内容简明扼要，以“必需、够用”为度．在阐明基本概念和基本计算技能的同时注意加强数学方法的实际应用．为了便于自学，在论述上注意深入浅出、突出重点，每节中都配有足够量的例题和习题，同时每章后都附有本章的基本要求以及供教师和自学者选用的测试题．

参加本书编写工作的有葛玉安、朱玉娥、魏荣、高进等同志．其中葛玉安负责编写一元函数积分学及微分方程；高进负责编写一元函数微分学及不定积分；魏荣负责编写多元函数微分学、二重积分和曲线积分；朱玉娥负责编写空间解析几何和无穷级数．葛玉安负责本书编写的组织及修改定稿工作．王信峰负责上册计算机排版工作，朱玉娥、魏荣负责下册计算机排版工作；李衍陵为全书配图．

清华大学应用数学系施学瑜教授审阅了全书（上、下两册），对本书提出许多很好的修改意见；在此书出版过程中谭浩强教授给予了大力的支持和帮助，在此我们一并表示衷心感谢．

本书除可作为高等工科院校专科教材外，还可作为夜大及财经、农、林、医等类专科教材，也可作为工程技术人员和具有高中文化水平读者的自学用书和参考书．

限于编者水平，本书必有考虑不周之处，缺点和错误在所难免，欢迎读者批评指正．

编　者

1994 年 5 月

目　　录

第七章 空间解析几何与向量代数

空间解析几何是多元微积分的基础，在解决某些实际问题时也会直接用到它.

用代数方法研究几何问题是解析几何的基本研究方法.本章首先建立空间直角坐标系，通过坐标法把空间中的点和有序数组对应起来；然后，介绍向量代数，并以向量为工具讨论空间平面和直线.最后，把空间图形和方程联系起来，并简要介绍某些常用的空间曲面和空间曲线.

§7.1 空间直角坐标系

为了确定空间某一点的位置，我们引进空间直角坐标系.从空间一固定点 o 引三根互相垂直的数轴 ox,oy,oz，并按右手螺旋规则规定其正方向，如图 7—1 所示.这样的三根坐标轴就构成了一空间直角坐标系.其中，点 o 称为坐标原点.ox,oy,oz 分别称为横轴、纵轴和竖轴，这三轴统称为坐标轴.而由任意两根坐标轴可确定一平面，它们分别为 xoy 平面、

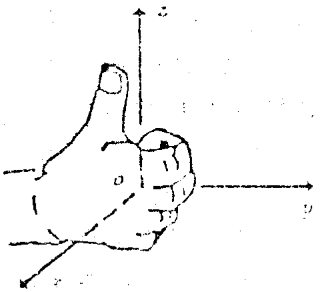

图 7-1

yoz 平面、zox 平面，这三个平面统称为坐标平面，它们把整个空间分为八个部分，每一部分称为一个卦限，每一卦限的名称顺序如图 7—2 所示.

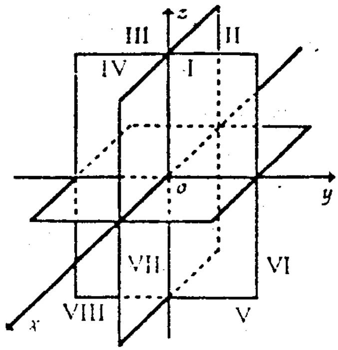

图 7-2

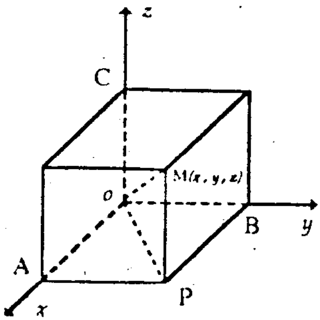

图 7-3

取定了空间直角坐标系以后，就可以建立空间点与有序数组之间的一一对应关系.

设 M 为空间一个已知点，通过点 M 作三个平面分别垂直于 ox, oy, oz 轴，并分别和它们相交于 A、B、C 三点，如图 7 -- 3 所示，则这三点称为点 M 在三根坐标轴上的投影. 而 A、B、C 三点在三根轴上的相应坐标 x, y, z 分别称为点 M 的横标、纵标、竖标，有序数组 (x,y,z) 则称为点 M 的坐标，记为 $M(x,y,z)$，这样任何一个空间点 M 和一个三元有序数组 (x,y,z) 就建立了一一对应关系.

从图 7—3 可以看到，过 M 点作三个平面分别和 x, y, z 轴垂直，这三个平面和三个坐标面便围成一个边长分别为 $|x|$，$|y|$，$|z|$，对角线为 OM 的长方体，所以

$$|OM| = \sqrt{|OP|^2 + |PM|^2} = \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点，则它们之间的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

这是因为过点 M_1, M_2 分别作平行于各坐标面的平面，就得到一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（如图 7－4），这个长方体的三条棱长分别为 $|x_2 - x_1|$，$|y_2 - y_1|$，$|z_2 - z_1|$，所以对角线 $|M_1M_2|$ 可写为

$$|M_1M_2|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

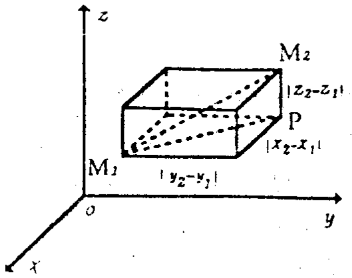

图 7-4

习　题　7－1

一、在空间直角坐标系中，说明下列各点的位置

1. (3,1,2)　　2. (2,－3,2)　　3. (1,－2,－4)

4. (－3,0,4)　5. (0,0,－2)　　6. (－2,6,－2)

二、求点 $M(2,3,4)$ 关于(1)各坐标面(2)各坐标轴(3)

坐标原点的对称点的坐标.

三、求下列各对点之间的距离

1. (0,0,0)与(−2,3,1)

2. (5,2,−3)与(−1,3,−2)

四、在 x 轴上求与点 $A(1,2,3)$ 和 $B(-2,-3,5)$ 等距离的点.

五、在 yoz 面上,求与点 $A(4,-2,-2)$,$B(3,1,2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

§7.2 向量及其加减法 向量与数量的乘法

一、向量的概念

在物理学中经常碰到的量,基本上可分为两大类,一类称为数量,例如温度、时间、质量、长度等,这类量仅仅给出大小便可以确定;另一类量称为向量,例如力、位移、速度、加速度、电场强度等,要完全确定它们,不仅要给出它们的大小,而且要给出它们的方向.

通常用有向线段表示一个向量,其中,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的指向表示向量的方向.向量常用上边带箭头的字母表示,例如,向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 等.以 M_1 为起点,M_2 为终点的向量记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$.以原点 O 为起点,以 M 为终点的向量称为点 M 的向径,记为 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$.

向量的大小称为向量的模,向量 $\vec{a}$,向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$的模分别记为 $|\vec{a}|$,$|\overrightarrow{M_1M_2}|$.模等于 1 的向量称为单位向量.与向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量记为 $\vec{a}^0$.模等于零的向量称为零向量,

记为 $\vec{0}$. 零向量的方向可认为是任意的.

在物理学中讨论的向量有的与起始点有关，有的与起始点无关，与起始点无关的向量称为自由向量. 这里只讨论自由向量. 如果两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的模相等，互相平行且指向相同，就称向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 相等，记为 $\vec{a}=\vec{b}$. 如果两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的模相等，互相平行但指向相反，则称 $\vec{b}$ 为 $\vec{a}$ 的负向量，记为 $\vec{b}=-\vec{a}$ ，或称 $\vec{a}$ 为 $\vec{b}$ 的负向量，记为 $\vec{a}=-\vec{b}$.

二、向量的加减法

根据力学中的力、速度和加速度的合成实验，可以定义向量加法的两个运算法则.

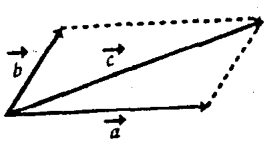

图 7-5

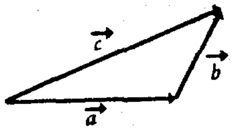

图 7-6

定义 已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ；用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为边作一平行四边形，一般称对角线向量 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和向量，记为 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. 如图 7 － 5 所示 .

此法则称为向量加法的平行四边形法则. 当向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行且指向相同时，和向量 $\vec{c}$ 的模等于原来两向量的模之和，即：$|\vec{c}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$，$\vec{c}$ 的指向与 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的指向一致；当向量 $\vec{a}$ 平行于 $\vec{b}$，但 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 指向相反时，和向量 $\vec{c}$ 的模 $|\vec{c}|=||\vec{a}|-|\vec{b}||$，且 $\vec{c}$ 的指向与 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 中较大的一个指向相同 .

根据向量加法的平行四边形法则和两个向量相等的定

义，还可以得到两个向量相加的三角形法则：

已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，把向量 $\vec{b}$ 的始点移至 $\vec{a}$ 的终点，并从 $\vec{a}$ 的始点向 $\vec{b}$ 的终点作一向量 $\vec{c}$，则向量 $\vec{c}$ 是 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的和向量：$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. 如图 7 － 6 所示 .

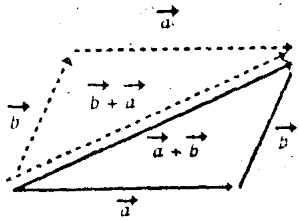

图 7-7

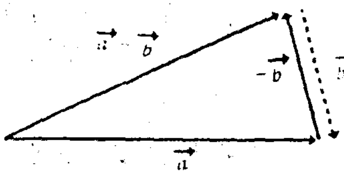

图 7-8

向量加法满足交换律（如图 7 － 7 所示）

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

与结合律

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

向量减法是向量加法的逆运算，同时，向量减法 $\vec{a}-\vec{b}$ 又可看成 $\vec{a}+(-\vec{b})$，因此，向量加法的平行四边形法则和三角形法则，均适用于减法. 由三角形法则可以看出：要从 $\vec{a}$ 减去 $\vec{b}$，只要把与 $\vec{b}$ 长度相等，而方向相反的向量 $-\vec{b}$ 加到向量 $\vec{a}$ 上去.（如图 7 － 8 所示）.

三、数与向量的乘法

定义 设 $\vec{a}$ 为任意一个向量，λ 为任意一个实数，向量 $\vec{a}$ 与数 λ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 定义为：

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 表示一个与 $\vec{a}$ 同方向的向量，且 $|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$；

当 $\lambda = 0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 为零向量；

当 $\lambda < 0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 表示一个与 $\vec{a}$ 平行但指向相反的向量，且 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$.

向量与数的乘法满足如下运算定律：

(1) 交换律 $\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$

(2) 结合律 $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

(3) 分配律 $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

由于任一向量 $\vec{a}$ 都存在自己的单位向量 $\vec{a}^0$，根据数与向量乘法的定义，显然，任一向量 $\vec{a}$ 都可以看成 $\vec{a}$ 的模与单位向量 $\vec{a}^0$ 的乘积，即 $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}^0$.

例 1 在 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别是边 BC 和 CA 的中点，已知向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AC} = \vec{b}$，如图 7—9所示，试用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BE}$.

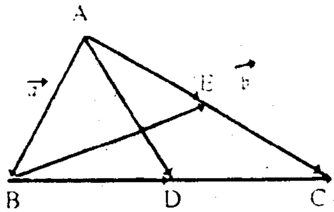

图 7-9

解 因为

$$\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

所以

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

因为 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{b}$

所以　$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$

习　题　7—2

一、在▱$ABCD$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$M$ 为对角线 AC、BD 的交点，试用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示：$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$.

二、已知 $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=7$，求 $|\vec{a}-\vec{b}|$.

三、已知在平行四边形 $ABCD$ 中，三个顶点 A、B、C 的向径表达式为：$\overrightarrow{OA}=\vec{r}_1$，$\overrightarrow{OB}=\vec{r}_2$，$\overrightarrow{OC}=\vec{r}_3$，试求向径 $\overrightarrow{OD}$的表达式，(如图7—10).

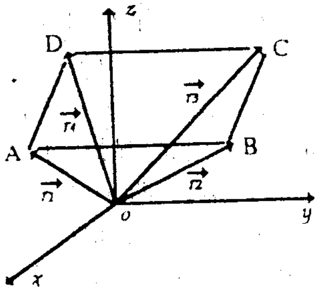

图7-10

四、在 $\triangle ABC$ 中，求证关系式 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=0$ 成立.

五、如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试应用向量运算证明它是平行四边形.

§7.3　向量的坐标

在前面一节，我们已经介绍了如何利用向量的几何表示方法定义向量的几种运算．但是，如果要用这种表示方法来对向量进行计算则是很不方便的．因此，本节讨论在空间直角坐标系中向量的表示方法，从而将向量与数建立联系.