



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

微分几何

■ 周建伟

Differential Geometry



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

0186.1/26

2008

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

微分几何

周建伟

高等教育出版社

内容简介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,全书共分五章,第一章以 Frenet 公式为中心介绍空间曲线理论;第二章介绍一些平面曲线的整体微分几何;第三章以第一、第二基本形式为主线介绍空间曲面的局部理论;第四章介绍曲面上的测地线与 Gauss-Bonnet 公式;第五章介绍曲面上矢量的平行移动与 Levi-Civita 联络以及了解研究曲线、曲面几何的方法如何推广到 Riemann 流形上。另外,还在第四章和第五章中以 Gauss-Bonnet 公式为中心介绍了一些曲面的整体微分几何。书后附有变分法、旋转角和空间的等距变换,它们简要介绍教材中要用到的知识。

本书纲目清楚,论证严谨,内容丰富,易于教学,可作为综合性大学和高等师范院校数学类专业的微分几何课程教材,也可供自学者选用。

图书在版编目(CIP)数据

微分几何/周建伟. —北京:高等教育出版社, 2008.4
ISBN 978-7-04-023567-8

I. 微… II. 周… III. 微分几何-高等学校-教材 IV. O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 022299 号

策划编辑 张长虹 责任编辑 丁鹤龄 封面设计 王凌波 责任绘图 尹文军
版式设计 陆瑞红 责任校对 刘莉 责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京奥鑫印刷厂		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2008 年 4 月第 1 版
印 张	16.75	印 次	2008 年 4 月第 1 次印刷
字 数	310 000	定 价	21.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 23567-00

前 言

微分几何是一门历史悠久的学科,可以说,微分几何是与微积分同时诞生的,微积分最初研究的对象包括曲线的切线与长度,曲线围成的区域面积等内容。微积分在几何中的应用后来发展成为本书介绍的曲线论与曲面论。这门学科的生命力至今很旺盛,近几十年来它与数学中其他分支如代数、拓扑、分析,与物理等学科互相影响促进,有许多应用。它的内容与研究方法也在不断发展,一直处于数学研究的中心。

这是一本微分几何的入门教材,用解析几何、微积分、线性代数等工具研究三维欧氏空间的曲线与曲面,希望有兴趣的读者进一步学习研究微分几何。全书共五章,第一章以 Frenet 公式及曲率,挠率为中心介绍经典的空间曲线理论。现代微分几何研究的中心是整体问题,或大范围问题,第二章介绍一些平面曲线的整体微分几何。第三章以第一,第二基本形式为主线介绍空间曲面的局部理论。第四章介绍曲面上的测地线与 Gauss-Bonnet 公式。§4.3, §4.4 以 Gauss-Bonnet 公式为中心介绍一些整体曲面的性质。Gauss-Bonnet 公式是“平面三角形的三个内角和等于 180° ”在曲面上的推广,在现代微分几何有许多重要的推广与应用,它与许多其他数学学科相联系可以有許多表示方式。第五章介绍曲面上矢量的平行移动与 Levi-Civita 联络,其中 §5.3 介绍曲面上的外微分形式与活动标架法,§5.4 简单介绍一些 Riemann 几何的知识。通过第五章的学习了解这里研究曲线、曲面上几何的方法如何推广到 Riemann 流形上,了解研究现代微分几何的方法的根源还在经典微分几何。

书后面有三个附录,附录 1 介绍曲线与曲面的变分法,说明测地线与极小曲面分别可以看成一些变分函数的极值。附录 2 证明可以定义曲面上向量场沿曲线的有向角函数。附录 3 介绍空间的等距变换,本课程研究的曲线与曲面的性质都是在等距变换下不变的性质。

这本教材在科学合理取材与安排,在定理的证明等方面作一些尝试,努力做到纲目清楚,论证严格,易于教学。写作时注意区分局部性质与整体性质,在整体微分几何的选材上注意所选内容有典型性能反映微分几何的发展及应用,也考虑到学生的接受能力以及教材的前后一致等。教材介绍的整体微分几何的内容是经典的,希望通过这些内容的学习开拓视野。教师可以根据教学要求与

实际情况选取教学内容,其他内容可以自学或用作阅读材料。第二章的整体曲线部分可以按照教材的顺序上课,也可以只讲一部分或跳过而不会影响后面的教学。

这是一本普通高等教育“十一五”国家级规划教材,感谢高等教育出版社为本书的申报与出版所做的许多工作。苏州大学数学科学学院对本书的编写与试用给予了大力的支持。编写中参考了国内外许多同类教材,借鉴了一些好的写法,向这些作者表示感谢。也要感谢我的同事和学生,他们为本书的写作与试用做了许多工作。感谢中国科技大学徐森林教授,他仔细审阅了书稿,提出了许多好的修改意见。

限于本人的水平和经验,书中不当之处在所难免,恳请读者指正。

周建伟

2007年7月于苏州

目 录

第一章 空间曲线	1
§1.1 预备知识.....	1
习题 1.1	7
§1.2 曲线的概念	7
1.2.1 曲线的一般概念.....	8
1.2.2 弧长与弧长参数.....	10
习题 1.2	12
§1.3 空间曲线的 Frenet 公式.....	13
1.3.1 曲线的密切平面.....	13
1.3.2 曲线的基本三棱形.....	15
1.3.3 曲线的曲率和挠率.....	19
1.3.4 空间曲线在一点附近的形状.....	23
习题 1.3	24
§1.4 平面曲线的 Frenet 公式.....	25
习题 1.4	29
§1.5 Frenet 公式的运用	30
1.5.1 渐伸线与渐缩线.....	30
1.5.2 球面曲线	34
1.5.3 Bertrand 曲线.....	35
1.5.4 一般螺线	37
习题 1.5	38
§1.6 空间曲线论基本定理	39
习题 1.6	44
第二章 平面曲线的整体性质	46
§2.1 平面闭曲线的等周不等式.....	46
习题 2.1	50

§2.2 平面曲线的旋转指标定理	51
习题 2.2	54
§2.3 卵形线	55
2.3.1 凸曲线	56
2.3.2 四顶点定理	57
2.3.3 支持函数	59
习题 2.3	64
第三章 曲面的局部理论	66
§3.1 曲面	66
习题 3.1	72
§3.2 曲面的第一基本形式	72
3.2.1 第一基本形式	72
3.2.2 曲面的面积	76
3.2.3 曲面上方向的夹角, 正交网	78
习题 3.2	83
§3.3 曲面的等距变换与保角变换	83
3.3.1 等距变换	84
3.3.2 保角变换	87
习题 3.3	89
§3.4 曲面的第二基本形式	89
3.4.1 曲面的第二基本形式	89
3.4.2 法曲率	93
3.4.3 渐近曲线	98
习题 3.4	101
§3.5 主方向与主曲率, Euler 公式	101
3.5.1 主方向与主曲率	101
3.5.2 Euler 公式	106
习题 3.5	109
§3.6 Gauss 曲率	110
3.6.1 Gauss 曲率	110
3.6.2 Gauss 映射	113
3.6.3 Gauss 的绝妙定理	115

习题 3.6	117
§3.7 直纹面与可展曲面	118
3.7.1 直纹面	118
3.7.2 可展曲面	121
习题 3.7	124
§3.8 一些特殊曲面	124
3.8.1 常 Gauss 曲率曲面	124
3.8.2 极小曲面	129
习题 3.8	133
§3.9 曲面论基本定理	133
3.9.1 曲面的基本方程	135
3.9.2 曲面论基本定理	139
习题 3.9	144
第四章 测地线与 Gauss-Bonnet 公式	146
§4.1 表面上的测地线	146
4.1.1 测地曲率	146
4.1.2 测地线	150
4.1.3 表面上的半测地坐标网	154
习题 4.1	157
§4.2 Gauss-Bonnet 公式	157
4.2.1 平面闭曲线的旋转指标	158
4.2.2 Gauss-Bonnet 公式	160
习题 4.2	165
§4.3 整体曲面与 Euler 数	165
4.3.1 整体曲面	165
4.3.2 曲面的三角剖分与 Euler 示性数	172
习题 4.3	174
§4.4 整体的 Gauss-Bonnet 公式	174
4.4.1 整体的 Gauss-Bonnet 公式	174
4.4.2 Gauss 映射的映射度	182
4.4.3 卵形面	185
习题 4.4	188

第五章 曲面上的 Levi-Civita 联络	190
§5.1 曲面上矢量的平行移动	190
5.1.1 曲面上矢量的平行移动	190
5.1.2 平行矢量场的角变差	195
习题 5.1	201
§5.2 曲面上的 Levi-Civita 联络	201
5.2.1 曲面上的矢量场	201
5.2.2 曲面上的矢量场与 Euler 数	206
5.2.3 曲面上的 Levi-Civita 联络	207
习题 5.2	213
§5.3 外微分形式与活动标架法	213
5.3.1 外微分形式	214
5.3.2 活动标架法	217
习题 5.3	226
§5.4 Riemann 几何简介	227
5.4.1 Riemann 几何简介	227
5.4.2 一个重要的例子	234
习题 5.4	241
附录 1 变分法	243
§1 弧长变分	243
§2 面积变分	245
附录 2 旋转角	248
附录 3 空间的等距变换	251
习题	254
名词索引	255
参考文献	259

第一章 空间曲线

这一章我们用微积分研究空间曲线, 证明空间曲线可以用沿曲线定义的两个函数——曲率与挠率来刻画. 我们也将证明对于任意给定的两个函数 $\varphi = \varphi(s) > 0$, $\psi = \psi(s)$, 在空间存在惟一的曲线 (除了它在空间的位置), 它的曲率与挠率分别是给定的函数 φ 与 ψ . 这就是空间曲线论基本定理. 研究的主要工具是 Frenet 标架与描述 Frenet 标架沿曲线变化规律的 Frenet 公式.

§1.1 预备知识

本课程使用解析几何的方法, 即用坐标法表示空间曲线、曲面, 微积分是主要的研究工具. 下面复习矢量及矢量运算, 并介绍一些矢量函数的微积分及相关的性质, 它们是研究微分几何的重要工具. 本课程的矢量表示有向线段, 它们在空间可以平行移动, 只要在移动时保持长度与方向.

以 $\mathbf{R}^2$ 表示平面上所有点的集合, $\mathbf{R}^3$ 表示空间所有点的集合. 下面以空间为例, 平面的情况是类似的.

设 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 是空间三个两两垂直的单位矢量, 矢量 $\vec{i}, \vec{j}$ 的外积是 $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$, 称 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 是一个右手系的么正标架. 取定空间一点 O , 对空间任意一点 P , 连接 O, P 的矢量 $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ 叫做点 P 的径矢 (图 1-1-1), 它可以表示为

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

(x, y, z) 叫做点 P 的坐标, 这样建立了空间点与有序三数组全体的一一对应. $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 叫做空间右手直角坐标系, 简称为直角坐标系.

任何空间矢量 $\vec{a}$ 也可以用基矢 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 表示, 称 (x, y, z) 是矢量

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

的坐标. 希望读者不要将点的坐标与矢量的坐标相混淆.

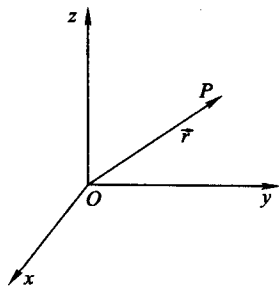


图 1-1-1

建议读者复习解析几何课程介绍的矢量运算, 特别是这些运算的几何意义及主要性质:

1. 数乘: $\lambda \vec{a}$, λ 是实数;
2. 加法: $\vec{a} + \vec{b}$;
3. 内积: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$;
4. 外积: $\vec{a} \times \vec{b}$, 其长度是 $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$, 方向与 $\vec{a}, \vec{b}$ 都垂直, 且 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ 成右手系;

5. 混合积: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$;

6. 双重外积: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$;

7. Lagrange 恒等式: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$.

请读者写出这些运算在直角坐标下的表示式.

给定空间一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 一个非零矢量 $\vec{n}(A, B, C)$, 那么过 P_0 垂直于 $\vec{n}$ 确定一个平面 π , 矢量 $\vec{n}$ 是平面 π 的法矢 (图 1-1-2). 点 $P(x, y, z)$ 在平面 π 上的充要条件是

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0.$$

此平面在坐标下的方程是

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

给定空间一点 P_0 与一个非零矢量 $\vec{v}(X, Y, Z)$, 过 P_0 平行于矢量 $\vec{v}$ 确定一条直线 l (图 1-1-3). 点 $P(x, y, z)$ 在 l 上的充要条件是 $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{v}$, 即存在实数 t 使

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}.$$

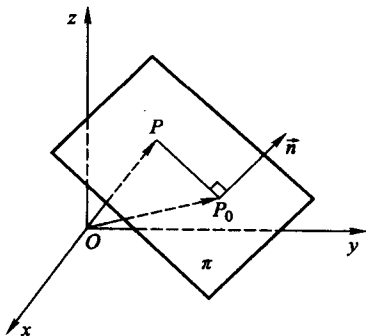


图 1-1-2

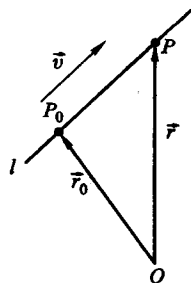


图 1-1-3

在坐标下, 直线 l 的方程是

$$\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = x_0 + Xt, \\ y = y_0 + Yt, \\ z = z_0 + Zt. \end{cases}$$

下面定义矢量函数并讨论它们的性质. 由于点 $P \in \mathbf{R}^3$ 对应惟一的径矢 $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, 我们也总是把 $\mathbf{R}^3$ 看作空间所有矢量的集合.

设 (a, b) 是一个实数区间, $a < b$, 如果对每一 $t \in (a, b)$ 有一个确定的矢量 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 与之相对应. 我们称映射 $\vec{r}: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^3$ 是一个矢量函数, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 在坐标下可以表示为

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

因此矢量函数 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 由三个实函数 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ 决定.

类似实函数, 对于矢量函数也可以引进极限, 连续, 微商和积分等概念. 如果矢量函数

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

的三个分量函数 $x(t), y(t), z(t)$ 都连续, 我们称矢量函数 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 连续. 如果 $x(t), y(t), z(t)$ 都是可导的, 称矢量函数 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 可微, 它的微商定义为

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

如果 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 可微, 不难知道下列极限式成立

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(x(t + \Delta t) - x(t))\vec{i} + (y(t + \Delta t) - y(t))\vec{j} + (z(t + \Delta t) - z(t))\vec{k}}{\Delta t}. \end{aligned}$$

此式也可以作为导矢 $\vec{r}'$ 的定义. 从矢函数微商的定义及矢量运算的性质容易知道下面的性质成立, 证明留作练习.

性质 1.1.1 如果 $\vec{s} = \vec{s}(t)$, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{v} = \vec{v}(t)$ 都是定义在区间 (a, b) 上的可微矢函数, 则

- (1) $(\vec{s} + \vec{r})' = \vec{s}' + \vec{r}'$;
- (2) $(\vec{s} \cdot \vec{r})' = \vec{s}' \cdot \vec{r} + \vec{s} \cdot \vec{r}'$;
- (3) $(\vec{s} \times \vec{r})' = \vec{s}' \times \vec{r} + \vec{s} \times \vec{r}'$;
- (4) $(\vec{s}, \vec{r}, \vec{v})' = (\vec{s}', \vec{r}, \vec{v}) + (\vec{s}, \vec{r}', \vec{v}) + (\vec{s}, \vec{r}, \vec{v}')$.

类似可以定义矢函数的高阶导矢

$$\vec{r}''(t) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad \vec{r}'''(t) = \frac{d^3 \vec{r}}{dt^3}, \dots$$

如果矢函数 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 在 (a, b) 上有直至 k 次的微商, 并且 $\vec{r}^{(k)} = \frac{d^k \vec{r}}{dt^k}$ 是连续的, 称 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 是区间 (a, b) 上的 k 次可微矢函数, 也称它是 C^k 类矢函数. 如果 k 可以任意大, 则称 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 是 C^∞ 矢函数. 当 $k \geq 1$ 时, C^k 类矢函数也称为光滑矢函数.

例如, 对于矢函数 $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin 2t, t^2)$, 它的导矢

$$\vec{r}' = (-\sin t, 2 \cos 2t, 2t), \quad \vec{r}'' = (-\cos t, -4 \sin 2t, 2), \dots,$$

$\vec{r}(t)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的 C^∞ 矢函数.

下面推导矢函数的 Taylor 公式. 设 $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 是区间 (a, b) 上 C^{n+1} 类矢函数, $x(t), y(t), z(t)$ 都是 (a, b) 上 C^{n+1} 函数. 由可微函数的 Taylor 公式, 对任意取定的 $t_0 \in (a, b)$, 有

$$\begin{aligned} x(t_0 + \Delta t) &= x(t_0) + x'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}x''(t_0)(\Delta t)^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^{(n)}(t_0)(\Delta t)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}(x^{(n+1)}(t_0) + \varepsilon_1)(\Delta t)^{n+1}, \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(t_0, \Delta t)$ 满足 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$. 类似有

$$\begin{aligned} y(t_0 + \Delta t) &= y(t_0) + y'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}y''(t_0)(\Delta t)^2 + \dots + \frac{1}{n!}y^{(n)}(t_0)(\Delta t)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}(y^{(n+1)}(t_0) + \varepsilon_2)(\Delta t)^{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(t_0 + \Delta t) &= z(t_0) + z'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}z''(t_0)(\Delta t)^2 + \dots + \frac{1}{n!}z^{(n)}(t_0)(\Delta t)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}(z^{(n+1)}(t_0) + \varepsilon_3)(\Delta t)^{n+1}. \end{aligned}$$

在这三个公式的两边分别乘以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 后相加即得矢函数 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 的 Taylor 展开式:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_0 + \Delta t) &= \vec{r}(t_0) + \vec{r}'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{r}''(t_0)(\Delta t)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\vec{r}^{(n)}(t_0)(\Delta t)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}(\vec{r}^{(n+1)}(t_0) + \vec{\varepsilon})(\Delta t)^{n+1}, \end{aligned}$$

其中 $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_1 \vec{i} + \varepsilon_2 \vec{j} + \varepsilon_3 \vec{k}$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{\varepsilon} = \vec{0}$.

如果矢函数 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 可以定义积分

$$\begin{aligned}\int_a^b \vec{r}(t) dt &= \int_a^b x(t) dt \vec{i} + \int_a^b y(t) dt \vec{j} + \int_a^b z(t) dt \vec{k} \\ &= \left(\int_a^b x(t) dt, \int_a^b y(t) dt, \int_a^b z(t) dt \right).\end{aligned}$$

注意, 一元函数的定积分是一个数, 而一元矢函数的定积分是对它的每一个分量进行积分, 结果是一个矢量. 矢函数积分的性质与一元实函数积分的性质类似, 例如

$$\begin{aligned}\int_a^b \vec{r}(t) dt &= - \int_b^a \vec{r}(t) dt, \\ \int_a^b \vec{r}(t) dt &= \int_a^c \vec{r}(t) dt + \int_c^b \vec{r}(t) dt, \quad a < c < b, \\ \int_a^b \vec{r}'(t) \cdot \vec{s}(t) dt &= \vec{r} \cdot \vec{s} \Big|_a^b - \int_a^b \vec{r}(t) \cdot \vec{s}'(t) dt.\end{aligned}$$

最后一式是矢量函数的分部积分法, 证明留给读者.

下面给出一些矢函数的性质.

性质 1.1.2 可微矢函数 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 有定长的充要条件是对任意 t , $\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$.

证 由于矢函数 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 是可微的,

$$\frac{d|\vec{r}|^2}{dt} = \vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 2\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t).$$

这说明矢函数 $\vec{r}$ 有定长, 即 $|\vec{r}(t)|^2 = \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)$ 是常数的充要条件是 $\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$ 对任意 t 成立.

如果 $|\vec{r}(t)| = 1$ 对定义域内所有的参数 t 成立, 称 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 是单位矢函数. 由性质 1.1.2, 这时 $\vec{r}(t)$ 与 $\vec{r}'(t)$ 处处垂直.

性质 1.1.3 设 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 是 $C^k (k \geq 1)$ 的单位矢函数, 矢量 $\vec{r}(t + \Delta t)$ 与 $\vec{r}(t)$ 的夹角是 $\Delta\varphi$, 则 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ 存在, 且

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = |\vec{r}'(t)|.$$

称 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right|$ 是单位矢函数 $\vec{r}(t)$ 的旋转速度.

证 由条件, $|\vec{r}(t)| \equiv 1$, 这样的径矢的终点在以 O 为球心的单位球面 (半径为 1 的球面) 上. 如图 1-1-4, $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$, $\overrightarrow{OM'} = \vec{r}(t + \Delta t)$, $\overrightarrow{MM'} = \vec{r}(t +$

$\Delta t) - \vec{r}(t)$, 以 $\widehat{MM'}$ 表示单位球面上连接 M, M' 的劣弧, 弧长是 $|\widehat{MM'}| = |\Delta\varphi|$. 于是

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| &= \left| \frac{\widehat{MM'}}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} \right| \cdot \frac{|\widehat{MM'}|}{|\overrightarrow{MM'}|} \\ &= \left| \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right| \cdot \frac{|\widehat{MM'}|}{|\overrightarrow{MM'}|}. \end{aligned}$$

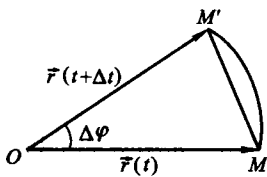


图 1-1-4

从

$$|\overrightarrow{MM'}| = 2 \left| \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right|, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\widehat{MM'}|}{|\overrightarrow{MM'}|} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \right| = 1,$$

得

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = |\vec{r}'(t)|.$$

性质 1.1.4 非零矢函数 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 平行于一个固定方向的充要条件是 $\vec{r} \times \vec{r}' = \vec{0}$.

证 如果 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 平行于固定方向 $\vec{e}$, 那么有函数 $\lambda = \lambda(t)$ 使 $\vec{r}(t) = \lambda(t)\vec{e}$, 函数 $\lambda(t) = \vec{r}(t) \cdot \vec{e}$ 是可微的. 这时 $\vec{r} \times \vec{r}' = \lambda\lambda'\vec{e} \times \vec{e} = \vec{0}$, 性质中条件是必要的.

反之, 设 $\vec{r} \neq \vec{0}$, 条件 $\vec{r} \times \vec{r}' = \vec{0}$ 成立. 记 $\vec{r}(t) = \lambda(t)\vec{e}(t)$, 其中 $\lambda(t) = |\vec{r}(t)|$, $\vec{e}(t) = \frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|}$ 是单位矢函数. 于是 $\vec{r}'(t) = \lambda'\vec{e} + \lambda\vec{e}'$, 代入 $\vec{r} \times \vec{r}' = \vec{0}$ 得 $\lambda^2\vec{e} \times \vec{e}' = \vec{0}$. 由于 $\lambda \neq 0$, 故 $\vec{e} \times \vec{e}' = \vec{0}$. $\vec{e}$ 是单位矢函数, 由性质 1.1.2, $\vec{e} \perp \vec{e}'$, 利用 Lagrange 恒等式

$$0 = (\vec{e} \times \vec{e}')^2 = |\vec{e}|^2 \cdot |\vec{e}'|^2 - (\vec{e} \cdot \vec{e}')^2 = |\vec{e}'|^2.$$

因此 $\vec{e}' = \vec{0}$, $\vec{e}$ 是常矢, 这证明了 $\vec{r}(t)$ 有固定方向.

设 D 是一个平面区域, D 上点可以用坐标 (u, v) 表示. 映射 $\vec{r}: D \rightarrow \mathbf{R}^3$ 也称为矢函数, D 是它的定义域, u, v 是自变量. 在 $\mathbf{R}^3$ 上直角坐标下, $\vec{r}$ 可以表示为

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

类似一元矢函数, 可以定义 $\vec{r}(u, v)$ 的偏导矢函数

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

及各种高阶偏导矢. 也可以定义空间矢函数 $\vec{r}(u, v)$ 的其他运算.

习题 1.1

1. 证明 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$.
2. 证明 $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}, \vec{e} \times \vec{f}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})(\vec{c}, \vec{e}, \vec{f}) - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{d}, \vec{e}, \vec{f})$.
3. 如果 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 证明:

$$\vec{a} \times \{\vec{a} \times [\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})]\} = |\vec{a}|^4 \vec{b}.$$

$$4. \text{ 证明 } (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3 \end{vmatrix}.$$

5. 如果 $\vec{r} \times \vec{r}' \neq \vec{0}$ 处处成立, 证明矢函数 $\vec{r}(t)$ 平行于一个固定平面的充要条件是

$$(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = 0.$$

6. 证明矢函数 $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上中值定理不成立, 即不存在 $\lambda \in (0, \pi)$ 使下式成立

$$\vec{r}'(\lambda) = \frac{1}{\pi}(\vec{r}(\pi) - \vec{r}(0)).$$

7. 证明矢函数 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 的微分方程 $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + 4\vec{r}(t) = \vec{0}$ 的通解是

$$\vec{r} = \vec{c}_1 \cos 2t + \vec{c}_2 \sin 2t,$$

其中 $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ 是任意的矢量.

§1.2 曲线的概念

有些空间曲线可以表示为两个曲面 $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ 的交线, 这时我们可以用

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

表示这一条曲线. 曲线也可以看作一个质点在空间运动的轨迹. 这样, 曲线可以用映射

$$\vec{r}: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

表示. 也就是说曲线可以用参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

表示. 曲线用参数方程表示适合于我们用微积分研究它的性质.

1.2.1 曲线的一般概念

定义 1.2.1 如果矢函数 $\vec{r}: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^3$ (或 $\mathbf{R}^2$) 是 n 次可微的, 我们称它是空间 (或平面上) n 次可微的曲线. 如果映射 $\vec{r}$ 是单射, 即曲线不自相交, 称它是简单曲线.

对 n 次可微的曲线, $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 的每一个分量函数 $x(t), y(t), z(t)$ 都是 n 次可微的函数, 自然它们也都连续. 我们常假定 $n \geq 3$. 对任一 $t \in (a, b)$, $\vec{r}(t)$ 给出空间一点 $P(t)$, 它的坐标是 $(x(t), y(t), z(t))$. 随着参数 t 的增加给出曲线的走向, 称这一走向给出了曲线的定向. 以 $-t$ 代替 t 可以改变曲线的定向.

例 1 $\vec{r} = (2t, t^2)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, 是一条 C^∞ 简单的参数曲线, 从 $x = 2t$, $y = t^2$ 消去参数 t 可得 $4y = x^2$, 这是一条抛物线, 见图 1-2-1.

例 2 曲线 $\vec{r} = (t^2, t^3)$ 的形状如图 1-2-2, 消去参数得 $x^3 = y^2$. $\vec{r}(0) = \vec{0}$, t^2, t^3 都是 t 的可微函数, $\vec{r} = (t^2, t^3)$ 也是可微曲线. 图 1-2-2 中箭头指出 t 增加时曲线的走向.

例 3 $\vec{r} = (t^3 - 3t - 2, t^2 - t - 2)$ ($t \in \mathbf{R}$) 也是一条 C^∞ 曲线. 由 $x = (t+1)(t^2 - t - 2) = (t+1)y$, 可得 $t = \frac{x}{y} - 1$, 由此得出曲线的一般方程

$$y^3 = x^2 - 3xy.$$

由于 $t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1)$, $\vec{r}(-1) = \vec{r}(2) = (0, 0)$, 这一曲线不是简单曲线. $\vec{r}' = (3t^2 - 3, 2t - 1)$, $\vec{r}'(-1) = (0, -3)$, $\vec{r}'(2) = (9, 3)$. 它的图像如图 1-2-3.

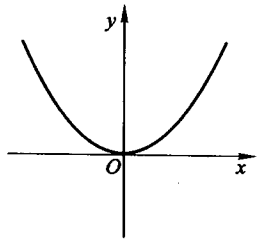


图 1-2-1

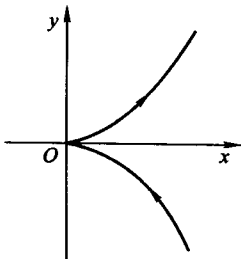


图 1-2-2

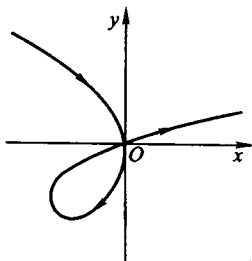


图 1-2-3