《高等数学》（三版）解题构思与技巧

孙续元 主编

（下）

北京广播学院出版社

《高等数学》(三版)

解题构思与技巧

(下)

主　编　孙[illegible]元

副主编　李如雄

余启港

孙维民

北京广播学院出版社

(京)新登字 148 号

内容提要

《高等数学(三版)解题构思与技巧》(上下)根据高等院校非数学专业普遍使用的《高等数学》(三版)(同济大学主编、高等教育出版社出版)编写而成,旨在帮助使用该教材的大学生及相当水平的学习者提高解题水平,增强应试能力。

本书分上下两册,上册从第一章至第七章,与《高等数学》(三版)上册相对应;下册从第八章至第十二章,与《高等数学》(三版)下册相对应。本书的突出特点是:以简洁明快的结构分项列举《高等数学》(三版)要点、重点、难点;针对重难点,布置例题,每题均以"解题构思"为首,引导读者分析题意,构造解题方法,纠正易见易犯错误;采用提示和给出最终答案相结合的办法,提供《高等数学》(三版)部分习题答案。

《高等数学》(三版)解题构思与技巧(下)
孙续元　主编
*
北京广播学院出版社出版发行
(北京定福庄 1 号)
中科院武汉分院科技印刷厂
各地新华书店经销
*
787×1092 毫米　32 开本
1995 年 12 月第一版　1995 年 12 月第一次印刷
印张:22.3　字数:730 千字
印数:1—10 000
ISBN 7-81004-583-0/O・18
定价:19.60 元(本册 9.80 元)

前　　言

高等数学是文理各科专业学习的必修课程。学好高等数学，解题是关键；而解题的成败，则在于对题意的分析理解，对解题方案的构思，对解题技巧的掌握。《高等数学(三版)解题构思与技巧》(上下)，就是为了帮助非数学专业本、专科学生能更快更好地熟悉高等数学的基本知识，准确地抓住解题关键，清晰地辨明解题思路，以目前全国高等院校最通用的教材——同济大学主编、高等教育出版社出版的《高等数学》(三版)的知识内容框架为依托编著的。

《高等数学(三版)解题构思与技巧》(上下)在内容安排上紧扣教材的内容，在章节篇目的编排上与教材保持同步。本书主要特点有三：以简洁明快的结构分项列举《高等数学》(三版)要点、重点、难点，此为其一；针对重难点，布置例题，每题均以"解题构思"为首，引导读者分析题意，构造解题方法，纠正易见易犯错误，此为其二；采用提示和给出最终答案相结合的办法，提供《高等数学》(三版)部分习题答案，以使读者通过对此类篇章的阅读使用，有效地提高解题水平，此为其三。本书以要点重点难点为经，以精解例题为纬，立体地、多方位地勾画出高等数学的奥秘所在。读者使用本书，只要按照"先读题，再自答，最后看构思"的程序去做，一定会事半功倍。

本书内容深入浅出，解题构思叙述详尽，结构严谨，可作为非数学专业高等数学教学参考用书和自学用书。

《高等数学(三版)解题构思与技巧》(上下)选题由武汉科源技术信息公司严汛、王里策划，全书由武汉大学孙续元副教授主持编著。黄光谷先生在本书的审校方面做了一些工作，在此表示诚挚的谢意。

本书上册从第一章至第七章，与《高等数学》(三版)上册相对应；下册从第八章至第十二章，与《高等数学》(三版)下册相对应。

作　者

目　录

第八章　多元函数微分法及其应用

一　要点·重点·难点

(一) 要点

1. 邻域及有关点集

(1) 邻域

(圆)邻域：P_0 点的 δ(圆)邻域 $U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$.

即 $U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$(平面)；

$U(P_0,\delta)=\{(x_1,\cdots,x_n) \mid \sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2}<\delta\}$($n$ 维空间).

方邻域：

即 $V(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid |x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta\}$(平面)；

$V(P_0,\delta)=\{(x_1,\cdots,x_n) \mid |x_i-x_i^0|<\delta, i=1,2,\cdots,n\}$($n$ 维空间).

(圆)邻域与方邻域是等价的：即在(圆)邻域内可找到方邻域，在方邻域内也可找到(圆)邻域.

(2) 集 E 的内点、聚点、边界点及其作用

内点 P：存在 $U(P,\delta)\subset E$.

聚点 P：任意 $U(P,\delta)$，存在 $P'\neq P$, $P'\in U(P,\delta)$，且 $P'\in E$.

边界点 P：任意 $U(P,\delta)$，存在 $P'\neq P''$, $P'\in U(P,\delta)$，且 $P''\in U(P,\delta)$，且 $P'\in E$, $P''\overline{\in} E$.

开集 E：E 中点都是内点.

(开)区域 D：(连通的开集 D)对 D 内任何两点，都可用 D 内折线(即折线上的点都属于 D)连结(或"连接")起来.

集 E 的边界：E 中全体边界点的集.

闭区域：开区域与它的边界一起(并集).

作用：内点⟶开集⟶区域⟶偏导数；

聚点⟶极限⟶连续；

边界点⟶边界.

3）有界集 E：定点 A，存在正数 K，对任意 $P\in E$，$|AP|\leqslant K$.

不是有界的集称为无界集.

一般考虑有界闭区域——多元函数的定义域范围内的部分——作为研究对象.

4）n 维空间、坐标、距离等概念.

多元函数及其极限与连续

1）多元函数：若点 P 是 $n(n\geqslant 2)$ 维空间内的一点，则 $u=f(P)$ 便是 n 元函数的一般形式.

多元函数的三要素：

定义域：n 维空间的点集，一般是一个区域或闭区域.

值域：实数的集，一般是一个区间.

对应规则：函数的形式.

多元函数符号性：即与变量的字母表示无关，例如 $z=x^2+y^2$ 与 $z=u^2+v^2$ 是同一个函数，定义域为二维空间，值域为非负实数集.

2）多元函数的极限（重极限），二元函数的极限又叫做二重极限，一般二重极限：

$$\left[\begin{array}{l}(x_0,y_0)\text{ 为 }f(x,y)\text{ 定义域的}\\ \text{聚点},\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,\\ \text{当 }0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\\ <\delta\text{ 时},|f(x,y)-A|<\varepsilon.\end{array}\right]$$

注意：$\begin{matrix}x\to x_0\\ y\to y_0\end{matrix}$ 为二重极限符，表示动点 $P(x,y)$ 沿任何线路趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$，也可记为 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 或 $P\to P_0$.

$\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{P\text{沿某一线路}\to P_0}f(x,y)$ 仅当前者存在时方能相等.

3）多元函数的连续：$u=f(P)$ 在点 P_0 处连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$.

若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内每点都连续，就称 $f(x,y)$ 在区域 D 内连续，其几何图形是一个对应于 D 的无孔、无裂缝的曲面.

多元函数的连续与极限具有类似于一元函数的性质. 亦有：①在有界闭区域上二元连续函数有最大值、最小值定理及介值定理；②二元连续函数的和、差、积、商（在分母不为零处）及复合函数仍为连

续函数；③一切二元初等函数在其定义域 D 内连续，因此它在 D 内各点处必有极限，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$. 区别是多元函数的间断点可以不仅是一些离散的点，例如 $z=\dfrac{1}{|x+y|-1}$ 在二直线 $x+y=\pm1$ 上没有定义，所以此二直线上的各点都是间断点.

3. 偏导数

二元函数 $z=f(x,y)$ 对 x 和 y 的偏导数分别定义为：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

它们又可分别记为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, f_x, z_x$，与 $\dfrac{\partial f}{\partial y}, f_y, z_y$.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 定义域的内点，则 $f(x,y)$ 对 x 在 $x=x_0, y=y_0$ 处的偏导数：

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=z'_x\big|_{(x_0,y_0)}=f'_x(x_0,y_0)\triangleq\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$（存在时），并称 $f(x,y)$ 对 x 在 $x=x_0, y=y_0$ 处可导.

类似定义 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$.

几何意义：

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 表示平面 $y=y_0$ 上的曲线 $z=f(x,y_0)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线对 x 轴的斜率.

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ 表示平面 $x=x_0$ 上的曲线 $z=f(x_0,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线对 y 轴的斜率.

求偏导数法则同一元函数. 对 $f(x,y)$ 定义域的任意内点求偏导数得到的偏导函数再求偏导数就得到高阶偏导数.

4. 全微分

函数 $z=f(x,y)$ 的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

与自变量的增量的线性组合

$$A\Delta x + B\Delta y \quad (A、B 与 \Delta x,\Delta y 无关)$$

相差一个高阶无穷小

$$o(\rho) \quad (\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$

时，称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处（相应于 $\Delta x,\Delta y$）的全微分，记成 $dz=A\Delta x+B\Delta y$，并记 $dx=\Delta x,dy=\Delta y,dz=Adx+Bdy$，此时也称 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微.

可以证明：$A=\frac{\partial z}{\partial x},B=\frac{\partial z}{\partial y}$.

无论 u,v 是自变量还是中间变量，均有全微分形式的不变性：$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$.

5. 极限、连续、可导、可微的关系

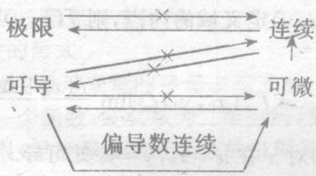

图8—1

6. 方向导数

$z=f(x,y),\vec{l}:\overrightarrow{PP'},P(x,y),P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} \triangleq \lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$$

$$\triangleq \lim_{P'\to P}\frac{f(P')-f(P)}{|P'-P|}$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=|P'-P|$.

当 $f(x,y)$ 可微时，有

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

其中记 x 轴方向向量 i，y 轴方向向量 j，则 α 为 i 与 $\vec{l}$ 之间的夹角 $\alpha=\langle i,\vec{l}\rangle$；$\beta$ 为 j 与 $\vec{l}$ 之间的夹角 $\beta=\langle j,\vec{l}\rangle$.

特别　$\frac{\partial z}{\partial i}=\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial j}=\frac{\partial z}{\partial y}$.

7. 梯度

$$\mathrm{grad}f(x,y)\triangleq\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j;$$

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}=\mathrm{grad}f(x,y)\cdot\vec{l}_0=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta\};$$

$$\vec{l}_0=\vec{l}/|\vec{l}|=\{\cos\alpha,\cos\beta\}.$$

8. 复合函数与隐函数的求导

9. 几何应用

(1) 求空间曲线的切线和法平面方程.

(2) 求空间曲面的法线和切平面方程.

10. 极值与条件极值

11. 最小二乘法

(1) 经验公式：由实验数据得到的变量的函数关系的近似表达式.

(2) 最小二乘法：使函数的实验数据值与经验公式值之差的平方和最小来决定经验公式(中的待定参数)的方法，称为最小二乘法.

当函数为线性函数 $y=ax+b$ 时，n 批实验数据 $(x_i,y_i),i=1,\cdots,n$. 通过求

$$M(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2$$

的最小值，即 $M_a(a,b)=0,M_b(a,b)=0$ 来求得参数 a,b：

$$a=\frac{\begin{vmatrix}\sum y_ix_i & \sum x_i\\ \sum y_i & n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sum x_i^2 & \sum x_i\\ \sum x_i & n\end{vmatrix}},\quad b=\frac{\begin{vmatrix}\sum x_i^2 & \sum y_ix_i\\ \sum x_i & \sum y_i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sum x_i^2 & \sum x_i\\ \sum x_i & n\end{vmatrix}}.$$

(二) 重点

1. 多元函数的概念及定义域的求法；

2. 重极限、特殊方式极限的联系与区别及其应用；

3. 极限、连续、可导、可微、方向导数的概念及运算；

4. 复合函数、隐函数的求导运算；

5. 方向导数和梯度的计算；

6. 几何应用；

7. 极值.

（三）难点

1. 重极限与特殊方式极限的区别；

2. 混合偏导数的计算次序；

3. 极限、连续、可导、可微之间的关系及运算；

4. 几何应用；

5. 极值(若熟悉正定矩阵则极值不难).

二　重难点问题精解

（一）多元函数概念题精解

1. 多元函数符号的应用

2. 多元函数定义域计算的"试点法"

[例 1] 设 $f(x)$，$g(x)$是可微一元函数，且

$$\begin{cases} u(x,y) = f(2x+5y) + g(2x-5y), \\ u(x,0) = \sin 2x, \\ u'_y(x,0) = 0, \end{cases}$$

试求$u(x,y)$的表达式.

解题构思

在二元函数$u(x,y)$中，令其中一个自变量y等于常数，则u就是另一个自变量x的一元函数，从而可以运用一元函数的记号和微分学知识来讨论问题. 本题中，条件"$u(x,0)=\sin 2x$"的意思是告诉我们，二元函数"$u(x,y)=f(2x+5y)+g(2x-5y)$"在自变量y取常数0时的函数表达式是"$\sin 2x$"(此时已是一元函数的概念了). 条件"$u'_y(x,0)=0$"则表示：若二元函数"$u(x,y)=f(2x+5y)+g(2x-5y)$"在点$P(x,0)$处对y求偏导数，则值等于"0"，而"$f(2x+5y)+g(2x-5y)$"是关于y的复合函数，根据复合函数的求导法则对y求偏导数后为$5f'(2x+5y)$

$+5g'(2x+5y)$，在动点 $P(x,0)$ 上的表达式为"$5f'(2x)+5g'(2x)$"，所以 u'_y 在 $P(x,0)$ 处的表达式是一个关于 x 的函数，且因 $u'_y(x,0)=0$ 而使这个表达式成为一个等于 0 的微分方程：$5f'(2x)-5g'(2x)=0$. 把所给条件转换成有利的形式后，后面的解法就不困难了.

[解] 由题设条件有：

$$\begin{cases} u(x,0)=f(2x)+g(2x)=\sin 2x, \\ u'_y(x,0)=5f'(2x)-5g'(2x)=0, \end{cases}$$

从而有

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=\sin x, \\ f'(x)-g'(x)=0. \end{cases}$$

由 $f'(x)-g'(x)=0$ 两边积分得：

$$f(x)-g(x)=c,$$

其中 c 是任意常数，于是

$$f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+c),\quad g(x)=\frac{1}{2}(\sin x-c),$$

所以 $u(x,y)=f(2x+5y)+g(2x-5y)$

$$\begin{aligned} &=\frac{1}{2}[\sin(2x+5y)+c]+\frac{1}{2}[\sin(2x-5y)-c] \\ &=\frac{1}{2}\sin(2x+5y)+\frac{1}{2}\sin(2x-5y) \\ &=\sin 2x\cos 5y. \end{aligned}$$

[例 2] 设 $F(x,y)=\dfrac{1}{2x}f(y-x)$，$F(1,y)=\dfrac{1}{2}y^2-y+5$，求 $f(x)$ 的表达式.

解题构思

本题的要求，是要读者以关于 x,y 的二元函数表达式 $F(x,y)=\dfrac{1}{2x}f(y-x)$ 以及当 $x=1$ 时 $F(x,y)$ 的表达式 $F(1,y)=\dfrac{1}{2}y^2-y+5$ 为条件，找到关于 x 的一元函数 $f(x)$ 的表达式. 要完成这个任务最基本的思路是：函数的符号性的应用，即函数与表达函数中变量的字母形式无关. 具体到本题的条件，我们可以看到：由 $F(x,y)=\dfrac{1}{2x}f(y-x)$，可得当 $x=1$ 时的表达式形式是 $F(1,y)=\dfrac{1}{2}f(y-1)$，而题目条件中正好

有一个关于$F(1,y)$的具体表达式：$F(1,y)=\frac{1}{2}y^2-y+5$. 为了使两个$F(1,y)$的表达式的右边统一成"$(y-1)$"的形式，只要把$F(1,y)=\frac{1}{2}y^2-y+5$的右边作配方变化就行了：即$F(1,y)=\frac{1}{2}y^2-y+5=\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{9}{2}$. 于是可以得知$f(y-1)$的具体表达式是$(y-1)^2+9$，以后的事情就好办了.

[解] 由题设，有

$$F(1,y)=\frac{1}{2}f(y-1)=\frac{1}{2}y^2-y+5=\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{9}{2},$$

所以
$$f(y-1)=(y-1)^2+9,$$
从而有
$$f(x)=x^2+9.$$

[例 3] 求函数 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 的定义域.

解题构思

多元函数的定义域一般是区域，这种点集一般可用使函数有定义的自变量所应满足的不等式(组)表示，怎样去找用不等式(组)具体表示的这种区域呢？"试点法"正是一个有效方法. 例如$Q(x,y)>0$，先用$Q(x,y)=0$将平面分为两个区域，在一个区域内任取一点(x_0,y_0)代入$Q(x,y)$，如果$Q(x_0,y_0)$为正，则在此区域内恒有$Q(x,y)>0$，是所寻找的区域；如果$Q(x_0,y_0)$为负，则在此区域内恒有$Q(x,y)<0$，不是所寻区域(用反证法证明之).

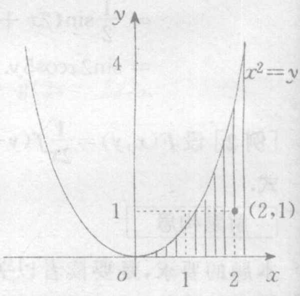

图8—2

[解] 由无理函数的性质和题设函数，得所求函数的定义域应满足的不等式组为

$$\begin{cases} y\geqslant 0, \\ x-\sqrt{y}\geqslant 0, \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ x^2 \geqslant y. \end{cases}$$

因此所求函数的定义域用集合表示为：

$$D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 \geqslant y\}.$$

以 $x^2=y$ 在平面上作图，由于(2,1)在所求定义域内：$2\geqslant 0, 1\geqslant 0, 2^2 \geqslant 1$. 故第一象限($x\geqslant 0, y\geqslant 0$)内、抛物线 $x^2=y$ 的下方含点(2,1)的区域为所求.（如图 8—2）

（二）重极限的计算方法

常用如下方法：

1. 应用函数的连续性求重极限；

2. 通过恒等变换，使不定式转化为定式，从而求出重极限

3. 利用性质"有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小"求重极限；

4. 利用重极限的运算性质求重极限；

5. 利用已知的重要极限公式求重极限；

6. 利用极限存在准则求重极限.

［例 1］求 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解题构思

函数 $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $P_0(1,0)$ 处连续，故有：

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} f(x,y) = f(1,0).$$

［解］$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+1)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\ln 2.$

［例 2］求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1}$.

解题构思

当 $x\to 0, y\to 0$ 时，$\dfrac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1}$ 是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，可以通过恒等变换：

$$\frac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1}=\frac{(x+y)(\sqrt{x+y+1}+1)}{(\sqrt{x+y+1})^2-1^2}$$
$$=\sqrt{x+y+1}+1$$

将其化成定式，再利用连续性求出重极限.

[解] $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(\sqrt{x+y+1}+1)=\sqrt{0+0+1}+1=2.$

[例 3] 求$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

解题构思

用如下恒等变换转化

$$\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\frac{2^2-(\sqrt{xy+4})^2}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}.$$

[解] $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}.$

[例 4] 求$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$. $=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2\cdot kx}{x^2(1+k^2)}=\frac{k}{1+k^2}\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x=0.$

解题构思

$\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\frac{xy}{x^2+y^2}\cdot x$，而$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$（当$(x,y)\neq(0,0)$时）且$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x=0$，可利用有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小的性质.

[解] $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$

[例 5] 求$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

解题构思

$(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\frac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2}\cdot\frac{(x+y)^2}{e^{(x+y)}}$，而$0<\frac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2}<1$（$x>0,y>0$时），且