21世纪高等学校文科类通用教材

大学文科数学

The liberal arts maths of college

董大校◦主编

中国商业出版社

21 世纪高等学校文科类通用教材

大学文科数学

董大校　主　编

中国商业出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/董大校主编.—北京:中国商业出版社,2008.3

ISBN 978-7-5044-6097-4

Ⅰ.大... Ⅱ.董... Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 022940 号

责任编辑:刘毕林

中国商业出版社出版发行

(100053 北京广安门内报国寺 1 号)

新华书店总店北京发行所经销

北京明月印务有限责任公司

*

787×1092 毫米 16 开 8.75 印张 200 千字

2008 年 4 月第 1 版 2008 年 4 月第 1 次印刷

定价:24.80 元

* * * *

(如有印装质量问题可更换)

前　　言

数学是研究客观世界的数量关系和空间形式的学科，它在人类文明进程中有着特殊的重要地位，特别是在人类社会步入信息时代的今天，数学知识已不可避免的渗透到了社会生活的各个方面。因此，在高等院校文科学生中开设必要的数学课程，对于培养学生的科学思维，提高学生的综合素质，进而使学生适应社会发展需要，是很有必要的。

本书是为21世纪高等学校文科生而编写的数学教材。在编写时尽可能考虑下列因素：

1. 读者对象是高校文科类各专业学生；
2. 不过于追求理论上的严密性，但是保持自身体系的完整性；
3. 注意启发式和几何直观，以便于学生理解；
4. 不追求复杂的计算和证明；
5. 突出数学思想和方法，尽量讲清概念产生的背景；
6. 运用合情推理引出定义、定理、性质等。

教材知识点主要包括函数与极限、导数及其应用、不定积分和定积分、行列式、矩阵、线性方程组等内容。共计54学时。

本书由董大校主编，第一章由董大校编写，第二章由宇文忠编写，第三、四章由董茂昌编写，第五、六章由朱国卫编写，第七、八、九章由陈文华编写。

本书在编写过程中参考了一些同类出版物，并得到了学校领导以及相关教师的大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中不当之处在所难免，恳请广大读者和专家给予批评指正。

编　者

2008年3月

21 世纪高等学校文科类通用教材

大学文科数学

主　编：董大校

副主编：陈文华

编　委：（以姓氏笔画为序）

宇文忠　朱国卫　陈文华　董茂昌　董大校

目　录

第一章　实数集与函数

函数是数学最核心的概念，也是自然科学和工程技术普遍使用的一个数学概念，其地位在整个数学学科中不言而喻．定义在实数集上的函数是贯穿于初、高中《代数》的一条主线，同时是微积分课程的研究对象，深刻理解函数概念对掌握中学数学教材和学好高等数学都是极为重要的．本章通过对中学《代数》的函数概念和必要补充，进一步系统把握函数概念，满足后继内容和课程的需要．

§1.1　实数与实数集

1.1.1　实数及其性质

中学数学中我们已经知道，无限不循环小数是无理数．如$\sqrt{2}$，π 等．所有的无理数组成无理数集．

有理数集与无理数集的并集就是实数集．

实数——无限小数$\begin{cases}\text{有理数——无限循环小数}\\ \text{无理数——无限不循环小数}\end{cases}$

实数集的几何模型是“数轴”或“坐标轴”，即坐标轴上的点对应于与实数集上的数一一对应．因此，在微积分学中，数与点不加区别，常将“数 a”说成“点 a”，反之亦然．

实数有如下一些主要性质：

1．实数集对加、减、乘、除（分母不为 0）四则运算是封闭的，即任意两个实数的和、差、积、商（除数不为 0）仍然是实数．

2. 实数集是有序的，即任意两个实数 a、b 必满足下述三个关系之一：$a<b$，$a=b$，$a>b$．

3．实数的大小有传递性，即 $a>b$，$b>c$，则有 $a>c$．

4．实数具有阿基米德（Archimedes）性，即对任何 a、$b\in R$，若 $b>a>0$，则存在正整数 n，使得 $na>b$．

5．实数集 R 具有稠密性，即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数，且既有有理数，也有无理数．

【例 1】设 a、$b\in R$．证明：若对任何正数 ε 有 $a<b+\varepsilon$，则 $a\leqslant b$．

证：用反证法，倘若结论不成立，则根据实数集的有序性，有 $a > b$，令 $\varepsilon = a - b$，则 ε 为正数且 $a = b + \varepsilon$，但这与假设 $a < b + \varepsilon$ 相矛盾，从而必有 $a \leqslant b$.

1.1.2 区间与邻域

设 a、$b \in R$，且 $a < b$，我们称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间，记作 (a,b)；$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$；$\{x \mid a \leqslant x < b\}$ 和 $\{x \mid a < x \leqslant b\}$ 都称为半开半闭区间，分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$，以上这几类区间统称为有限区间. 从数轴上来看，开区间 (a, b) 表示 a，b 两点间所有点的集合，闭区间 $[a, b]$ 比开区间多两个端点，半开半闭区间 $[a,b)$ 比开区间 (a, b) 多一个端点 a 等.

满足关系式 $x \geqslant a$ 的全体实数 x 的集合记作 $[a, +\infty)$，这里符号 ∞ 读作“无穷大”，$+\infty$ 读作“正无穷大”. 类似地，我们记

$(-\infty, a] = \{x \mid x \leqslant a\}, (a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$，

$(-\infty, a] = \{x \mid x < a\}, (-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = R$，其中 $-\infty$ 读作“负无穷大”，以上这几类都称为无限区间. 有限区间和无限区间统称为区间.

设 $a \in R$，$\delta > 0$，满足绝对值不等式 $|x - a| < \delta$ 的全体实数 x 的集合称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a;\delta)$，或简单地写作 $U(a)$，即有

$U(a;\delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$.

点 a 的空心邻域定义为

$U^{\circ}(a;\delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$，注意，$U(a;\delta)$ 与 $U^{\circ}(a;\delta)$ 的差别在于 $U^{\circ}(a;\delta)$ 不包含点 a.

1.1.3 有界集与确界原理

定义 1 设 S 为 R 中的一个数集，若存在数 M，使得对一切 $x \in S$，都有 $x \leqslant M$ $(x \geqslant M)$，则称 S 为**有上界（下界）**的数集，数 M 称为数集 S 的一个**上界（下界）**.

若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为**有界集**. 反之，称为**无界集**.

例如，对于数集 $N_{+} = \{n \mid n \text{为正整数}\}$，任何一个不大于 1 的实数都是 N_{+} 的下界，故 N_{+} 为有下界的数集. 根据定义，可以证明，N_{+} 是无上界数集.

定义 2 设 S 为 R 中的一个数集，若数 η 满足：

（1）对一切 $x \in S$，有 $x \leqslant \eta$，即 η 是 S 的上界；

（2）对任何 $\alpha < \eta$，存在 $x_0 \in S$，使得 $x_0 > \alpha$，即 η 又是 S 的最小上界，则称数 η 为数集 S 的**上确界**，记作

$$\eta = \sup S.$$

定义 3 设 S 为 R 中的一个数集. 若数 ξ 满足：

（1）对一切 $x \in S$，有 $x \geqslant \xi$，即 ξ 是 S 的下界；

（2）对任何 $\beta > \xi$，存在 $x_0 \in S$，使得 $x_0 < \beta$，即 ξ 又是 S 的最下界，则称数 ξ 为数集 S 的**下确界**，记作

$$\xi = \inf S .$$

上确界和下确界统称为**确界**.

例如，对于数集 $S = \{x \mid X$ 为区间（0，1）中的有理数$\}$.（1）对一切 $x \in S$，显然有 $x \leqslant 1$，即 1 是 S 的上界.（2）对任何 $\alpha < 1$，若 $\alpha \leqslant 0$，则任取 $x_0 \in S$，都有 $x_0 > \alpha$；若 $\alpha > 0$，则由有理数集在实数集中的稠密性，在（α，1）中必有有理数 x_0，即存在 $x_0 \in S$，使得 $x_0 > \alpha$．同理，可验证 $\inf S = 0$.

定理 1（确界原理） 设 S 为非空数集．若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界.

证明略.

【例 2】 设 A、B 为非空数集，满足：对一切 $x \in A$ 和 $y \in B$ 有 $x \leqslant y$．证明：数集 A 有上确界，数集 B 有下确界，且

$$\sup A \leqslant \inf B$$

证 由假设，数集 B 中任一数 y 都是数集 A 的上界，A 中任一数 x 都是 B 的下界，故由确界原理推知数集 B 有下确界.

现证不等式（2）．对任何 $y \in B$，y 是数集 A 的一个上界，而由上确界的定义知，$\sup A$ 是数集 A 的最小上界，故有 $\sup A \leqslant y$．而此式又表明数 $\sup A$ 是数集 B 的一个下界，故由下确界定义证得 $\sup \leqslant \inf B$.

习题 1.1

1. 用区间表示下列不等式的解：

（1）$|1 - x| \geqslant 0$；（2）$\left|x + \frac{1}{x}\right| \leqslant 6$；

（3）$(x - a)(x - b)(x - c) > 0$ （a，b，c 为常数，且 $a < b < c$）；

（4）$\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 设为非空集．试对下列概念给出定义：

（1）S 无上界；（2）S 无界.

3. 设 S 为非空有下界数集．证明：

$$\inf S = \xi \in S \Leftrightarrow \xi = \min S$$

§1.2 函 数

1.2.1 函数实例

【例 1】 圆的面积 设圆的半径为 r，圆的面积为 A，则圆的半径 r 与圆的面积为

A 对应着，即对任意正数都对应惟一一个圆的面积 A，则 r 与 A 的对应规律是 $A=\pi r^2$，其中 π 为圆周率，是常数.

【例2】 降水量表 某城市气象站实测某年的降水量如下表：

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
降水量 p（mm）	10	25	31	28	35	49	87	110	99	61	34	11

由此表可以看出，每个月份 n 都对应惟一一个月降水量 p 这个表给出了 n 与 p 的对应规律.

【例3】 对任意 $x\in R$ 都对应惟一一个数 $y=\sin x$，则 x 与 y 的对应规律是 $y=\sin x$.

【例4】 对任意自然数 $n\in N$ 都对应惟一一个数 $a_n=(-1)^n$，则 n 与 a_n 的对应规律是 $a_n=(-1)^n$.

1.2.2 函数概念

上述四个函数实例，虽然它们的实际意义与对应规律都不相同，但他们却有一个共同的属性：有两个数集和一个对应关系，对其中一个数集中的任意数，按照对应规律都对应另一个数集中的惟一一个数. 将这个共同的属性抽象出来，就可得到下面的函数的概念：

定义1 给定两个实数集 D 和 M，若有对应法则 f，使对 D 内每一个数 x，都有惟一的一个数 $y\in M$ 与他对应，则 f 称是定义在数集 D 上的函数，记作 $f: D\to M$. 其中，数集 D 称为函数 f 的**定义域**，x 所对应得数 y，称为 f 在点 x 的**函数值**，记作 $f(x)$. 全体函数值得集合

$f(D)=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}\ (\subset M)$

称为函数 f 的**值域**.

关于函数的定义，作以下三点说明：

1. 关于定义域 根据函数定义，给定一个函数 f，同时也就给定了函数 f 的定义域 A. 有时用公式法给定的函数 $y=f(x)$ 事先并不明确指出它的定义域，这时就认为函数 $y=f(x)$ 的定义域 A 是使 $y=f(x)$ 有意义的数 x 的集合，即

$$A=\{x\mid f(x)\in R\}.$$

函数 $y=f(x)$ 的定义域通常称为函数 $y=f(x)$ 的存在域.

例如，如果给定的函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，事先没有指出它的定义域，那么它的定义域 A 就是它的存在域，就是使函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 有意义的数 x 的集合，即

$$A=[-1,1]=\{x\mid \sqrt{1-x^2}\in R\}.$$

2. 关于值域 在函数定义中，函数的值域可以是实数集 R，也可以是实数集 R，也可以是实数集 R 的真子集. 例如，函数 $y=\sin x$ 的定义域是实数集 R，值域是 $[-1,1]\subset R$.

3. 关于对应规律 在函数定义中，对应规律 f 是抽象的，只有在具体函数中，对应规律 f 才是具体的. 读者可自行说出例 1、例 2、例 3 和例 4 的对应规律.

1.2.3 函数表示法

一般地，函数的表示法主要分为三种：解析法、图像法和列表法.

1. 解析法 解析法是用解析式表示函数. 所谓解析式就是常数和表示自变数的字母用一系列运算符号连接起来的数学符号. 在中学数学范围内，“一系列运算”只是有限次运算. “运算符号”是指代数运算符号（即加、减、乘、除、开方等的运算）和初等超越运算符号（即无理数幂、指数、对数、三角和反三角的运算符号）.

在高等数学里，解析式不仅包含有限次运算，也包含了无限次运算，即极限运算. “解析式”的涵义扩展了，能用解析法表示的函数也增多了. 微积分学里主要是讨论用解析法表示的函数.

2. 图像法 图像法是用坐标平面上的特殊点集（图像）表示函数. 如果函数 $y=f(x)$ 定义在数集 A 上，坐标平面上的点集

$$\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in A\}$$

就是函数 $y=f(x)$ 在 A 上的图像.

函数的图像能将函数的集合性态表现得十分明显. 因此，为了对解析法表示的函数有个直观形象的认识，也常常描绘出他的图像.

3. 列表法 列表法是用表格表示函数. 用列表法表示函数，它的定义域只能是一些离散的孤立点. 例如，例 2 就是用列表法表示函数的例子.

1.2.4 函数的初等性质

1. 有界性

定义 1 设函数 $f(x)$ 在数集 A 有定义. 若函数 $f(x)$ 在 A 的值域 $\{f(x)\mid \forall x\in A\}$ 有上界（或有下界、有界），则称函数 $f(x)$ 在 A 有**上界（或有下界、有界）**，否则称函数 $f(x)$ 在 A **无上界（或无下界、无界）**.

显然，函数 $f(x)$ 在 A 有界 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 A 既有上界又有下界 $\Leftrightarrow \exists M>0,\ \forall x\in A$，都有 $|f(x)|\leqslant M$.

其几何意义是，存在两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$，函数 $y=f(x)$ 的图像位于以这两条直线为边界的带形区域内. 如图 1.2－1.

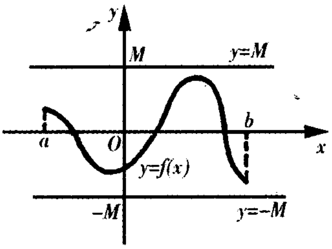

图 1.2－1

【例 5】 函数 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 在定义域 R 有界.

事实上 $\exists M\geqslant 1,\ \forall x\in R$，有 $|\sin x|\leqslant M$ 与 $|\cos x|\leqslant M$. 如图 1.2－2 与图 1.2－3.

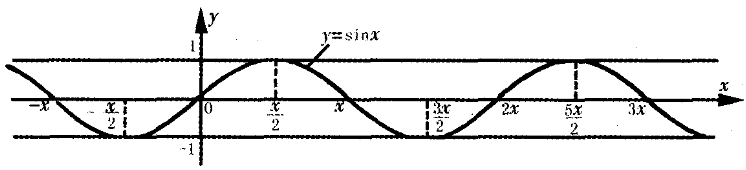

图 1.2 -2

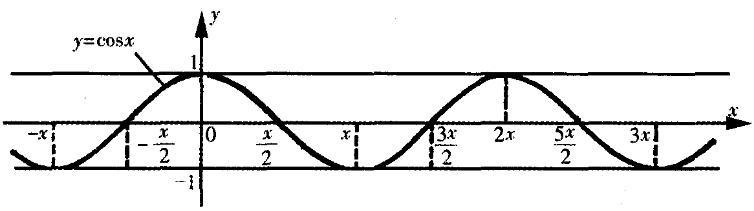

图 1.2 -3

【例 6】 函数 $y=\mathrm{arctg}x$ 与 $y=\mathrm{arcctg}x$ 在定义域 R 有界.

事实上，$\exists M\geqslant\frac{\pi}{2}$，$\forall x\in R$，有 $|\mathrm{arctg}x|\leqslant M$ 与 $|\mathrm{arcctg}x|\leqslant M$. 如图 1.2 -4 与图 1.2 -5.

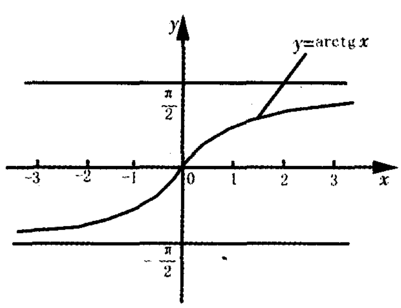

图 1.2 -4

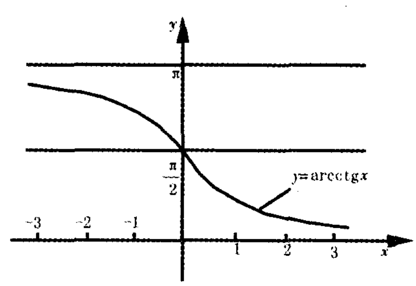

图 1.2 -5

2. 单调性

定义 2 设函数 $f(x)$ 在数集 B 有定义. $\forall x_1, x_2\in B$，且 $x_1<x_2$，有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\ (\text{或} f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 B **单调增加（单调减少）**.

若将上述不等式改为

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或} f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 B 严格增加（严格减少）. 若 B 是区间，称 B 为函数 $f(x)$ 的**单调区间**.

例如，对于指数函数 $f(x)=a^x$，当 $a>1$ 时，严格增加，当 $0<a<1$ 时，严格减少.

事实上，$\forall x_1, x_2\in R$，且 $x_1<x_2$，有

$$f(x_2)-f(x_1)=a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1).$$

当 $a>1$ 时，已知 $x_2-x_1>0$，有 $a^{x_2-x_1}>1$，从而，$a^{x_2}-a^{x_1}>0$ 或 $a^{x_2}>a^{x_1}$

当 $0<a<1$ 时，已知 $x_2-x_1>0$，有 $a^{x_2-x_1}<1$，从而，$a^{x_2}-a^{x_1}<0$ 或 $a^{x_2}<a^{x_1}$

即指数函数 $f(x)=a^x$，当 $a>1$ 时，严格增加，当 $0<a<1$ 时，严格减少.

同法可证明，指数函数 $f(x)=\log_a x$ 在定义域 $(0,+\infty)$，当 $a>1$ 时，严格增加；当 $0<a<1$ 时，严格减少.

3. 奇偶性

定义 3 设函数 $f(x)$ 在数集 A 有定义. 若 $\forall x\in A$，有 $-x\in A$，且

$$f(-x)=-f(x)\text{ 或 }f(-x)=f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 A 是**奇函数或偶函数**.

对于奇函数 $y=f(x)$，如果点 (x_0,y_0) 在 $y=f(x)$ 的图像上，其中 $y_0=f(x_0)$，则 $f(-x_0)=-f(x_0)$，即点 $(-x_0,-y_0)$ 也在 $y=f(x)$ 的图像上. 于是，奇函数的图像关于原点对称，反之亦然.

对于偶函数 $y=f(x)$，如果点 (x_0,y_0) 在 $y=f(x)$ 的图像上，其中 $y_0=f(x_0)$，则 $f(-x_0)=f(x_0)=y_0$，即点 $(-x_0,y_0)$ 也在 $y=f(x)$ 的图像上. 于是，偶函数的图像关于 y 轴对称，反之亦然.

因此，描绘奇（或偶）函数的图像，只须描绘正半轴上函数 $y=f(x)$ 图像，再根据关于原点（或 y 轴）的对称性，就可以描绘出函数 $y=f(x)$ 的全部图像.

例如，函数 $y=\sin x$ 在其定义域 R 是奇函数，如图 1.2-2；函数 $y=\cos x$ 在其定义域 R 上是偶函数，如图 1.2-3.

事实上，$\forall x\in R$，有

$\sin(-x)=-\sin x$ 与 $\cos(-x)=\cos x$.

4. 周期性

定义 4 设函数 $f(x)$ 定义在数集 A. 若 $\exists l>0$，$\forall x\in A$，有 $x\pm l$，且 $f(x)=f(x\pm l)$，则称函数 $f(x)$ 是**周期函数**，l 称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

由上述定义不难证明，若 $l>0$ 是函数 $f(x)$ 的周期，则 nl $(n\in N)$ 也是函数 $f(x)$ 的周期.

若函数 $f(x)$ 有最小的正周期，通常把这个最小的正周期称为函数 $f(x)$ 的基本周期，也简称周期.

描绘周期函数的图像，只须描绘在一个周期长的区间上函数的部分图像，然后将此图像沿 x 轴正反两个方向一个周期一个周期地平移，就得到了整个周期函数的图像.

例如，函数 $y=\sin x$ 与函数 $y=\cos x$ 在其定义域 R 上都是以 2π 位（基本）周期的周期函数，如图 1.2-2 和图 1.2-3.

1.2.5 复合函数

定义 5 设函数 $z=f(y)$ 的定义域是 B，函数 $y=\varphi(x)$ 的定义域是 A，且

$$G=\{x\mid x\in A,\ \varphi(x)\in B\}\neq\Phi$$

于是，$\forall x \in G$，按照对应规律 φ，对应惟一一个 $y=\varphi(x) \in B$，再按照对应规律 f，对应惟一一个 z. 这样 $\forall x \in G$，都对应惟一一个 z，这一对应规律称为函数 $z=f(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 在 G 的**复合函数**，表为

$$z=f[\varphi(x)],\ x \in G,$$

y 称为**中间变数**.

复合函数也由多于两个函数相继复合而成（两个函数的复合要求要求定义 1 的条件）. 例如，三个函数

$$u=\sin z,\ z \in G.$$

$$z=\sqrt{y},\ y= \in (0,\ +\infty],\ 值域\ y \in (0,\ +\infty].$$

$$y=1-x^2,\ x \in R,\ 值域\ (-\infty,].$$

它们经过相继复合运算，有 $u=\sin z=\sin\sqrt{y}=\sin\sqrt{1-x^2}$.

再例如，复合函数 $y=\sin^2\ln(2x^2-1)$ 是由四个简单函数

$y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\ln w$，$w=2x^2-1$ 复合而成.

1.2.6 初等函数

在数学中，我们通常将最简单的六类函数统称为基本初等函数，即常数函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数和反三角函数.

1. 常数函数

$$y=c\ 或\ f(x)=c\ (c\ 是常数),\ \in R.$$

其图象是通过 $(0,\ c)$，且平行于 x 轴的直线. 常数函数是偶函数，既是单调增加又是单调减少函数.

2. 指数函数

$y=a^x \quad (0<a)$，$x \in R$

它的值域是区间 $(0,\ +\infty)$. 当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 在 R 严格增加；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 在 R 严格减少. 当 $a=1$ 时，$\forall x \in R$，有 $y=1^x=1$，即它是常数函数.

3. 对数函数

$y=\log_a x \quad (0<a\neq 1)$，$x \in (0,\ +\infty)$.

对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$ 的反函数. 它的值域是 R. 当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,\ \infty)$ 严格增加；当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,\ \infty)$ 严格减少.

特别是，以 e 为底的对数函数，即自然对数，是经常用到的，简表为

$$y=\log_a x=\ln x.$$

4. 幂函数

$y=x^a$ $(a \in r)$.

幂函数 $y=x^a$ $(a \in r)$ 因指数 a 的不同，其定义域只有四种：$[0,\ +\infty)$，$(0,\ +\infty]$，r，$r-\{0\}$.

不难证明，当 $a>0$ 时，幂函数 $y=x^a$ 在区间 $(0,\ +\infty)$ 严格增加；当 $a<0$ 时，