国家级高职高专精品课程教材
教育部高职高专规划教材
Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

配套学习指导

工科高等数学
学习指导

侯风波 祖定利 主编

辽宁大学出版社
www.lnupress.com.cn

责任编辑：董晋骞
封面设计：陈连辉

ISBN 7-5610-5064-X

ISBN 7-5610-5064-X
定价：25.00元

国家级高职高专精品课程教材
教育部高职高专规划教材 配套学习指导
Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

工科高等数学学习指导

侯风波 祖定利 主编

辽宁大学出版社
www.lnupress.com.cn

内容提要

本书是在充分研究当前我国高职高专大众化发展趋势下的教育现状，认真总结、分析、吸收全国高职高专院校高等数学课程教学改革的经验基础上编写完成的. 从高职高专教育人才培养目标出发，以教育部最新修订的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为指导，适度降低了难度，精心安排了例题、习题的配置，便于学生对有关知识点的掌握与巩固.

本书内容包括函数学习指导、极限学习指导、导数与微分学习指导、导数应用学习指导、一元函数积分学学习指导、常微分方程学习指导、向量与空间解析几何学习指导、多元函数微分学学习指导、多元函数积分学学习指导、级数学习指导、Mathematica 程序设计学习指导共十一章. 每章含教学要求与重点、难点及典型问题分析与求解、练习题、练习题答案共四部分. 在教学要求与重点、难点中，列出了各章需要了解、理解、掌握的内容及重点、难点，以使读者有针对性的学习. 在典型问题分析与求解中，通过精选例题与习题对基本概念与基本方法结合具体知识点进行有针对性的学习指导，并通过一题多解对重要概念、重要方法进行综合训练.

本书特别注重培养学生用数学概念、思想、方法消化吸收工程概念和工程原理的能力；把实际问题转化为数学模型的能力；利用计算机求解数学模型的能力.

本书可作为高职高专、成人高等学校各专业高等数学课程的教学用书，也可作为工程技术人员的自学用书.

图书在版编目（CIP）数据

工科高等数学学习指导/侯风波主编. —沈阳：辽宁大学出版社，2006.7

ISBN 7-5610-5064-X

Ⅰ. 工… Ⅱ. 侯… Ⅲ. 工科高等数学—高等学校—教辅 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 025470 号

责任编辑：董晋骞　　封面设计：陈连辉

责任校对：夏　天

辽 宁 大 学 出 版 社

地址：沈阳市皇姑区崇山中路 66 号　　邮政编码：110036

联系电话：024-86786891　　http://www.lnupress.com.cn

Email：sjjcyjs@163.com

沈阳市北陵印刷厂印刷　　长春市东联高教图书有限公司发行

幅面尺寸：787mm×1092mm　(1/16)　印张：15.5

字数：377 千字

2006 年 7 月第 1 版　　2006 年 7 月第 1 次印刷

定价：25.00 元

前　　言

本书是与侯风波教授主编的高职高专教育高等数学课程《工科高等数学》配套的高等数学课程学习指导书.在编写过程中,严格按教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》进行教学内容的取舍，并结合高等职业院校高等数学课程教学实际情况，努力贯彻由浅入深、循序渐进的教学原则.本书内容包括函数学习指导、极限学习指导、导数与微分学习指导、导数应用学习指导、一元函数积分学学习指导、常微分方程学习指导、向量与空间解析几何学习指导、多元函数微分学学习指导、多元函数积分学学习指导、级数学习指导、Mathematica 程序设计学习指导共十一章.着重训练高等数学的基本概念与基本解题方法，并特别关注高等数学的思想方法及用高等数学解决实际问题的能力的培养.每章由教学要求与重点、难点和典型问题分析与求解、练习题及练习题答案共四部分组成.本书具有如下 6 个特点：

1. 严格按照《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，遵照高职高专高等数学的教学规律，以掌握概念、强化应用为重点，注重培养学生用数学解决实际问题的能力.

2. 大部分内容采用一例（一个例题）、一练（一个练习题）、一说明（一个解题说明）的格式编写，有助于学生系统掌握有关知识.

3. 为了培养学生应用数学解决实际问题的意识、兴趣和能力，本书编入了较多的应用实例.

4. 对重要概念与重要方法不但进行了深入浅出的分析，而且还对典型例题做了较详尽的分析解答，以便于学生自学.

5. 对 Mathematica 程序设计做了简要介绍，以配合高等数学课程主教材的有关内容的学习，进一步培养学生借助于计算机与数学软件包求解数学模型的能力.

6. 通过一题多解等形式，培养学生分析问题和解决问题所需的抽象思维能力、联想思维能力及逻辑推理能力.

本书可单独使用，也可作为高职高专高等数学课程的配套教材.建议教师结合习题课教学对学生使用本书进行必要的指导，切实提高高职高专学生的数学素养.

参加本书编写的有侯风波（承德石油高等专科学校）、祖定利（承德石油高等专科学校）.

本书由侯风波、祖定利任主编.全书的框架结构安排、统稿、定稿由侯风波教授承担.

由于我们水平所限，书中若有不当之处，恳请同仁和读者给予批评指正.

编　者

2006 年 3 月

目　录

第一章　函数学习指导 …… 1
一、教学要求与重点、难点 …… 1
二、典型问题分析与求解 …… 1
三、练习题 …… 11
四、练习题答案 …… 12
第二章　极限学习指导 …… 14
一、教学要求与重点、难点 …… 14
二、典型问题分析与求解 …… 14
三、练习题 …… 31
四、练习题答案 …… 33
第三章　导数与微分学习指导 …… 35
一、教学要求与重点、难点 …… 35
二、典型问题分析与求解 …… 35
三、练习题 …… 54
四、练习题答案 …… 55
第四章　导数应用学习指导 …… 57
一、教学要求与重点、难点 …… 57
二、典型问题分析与求解 …… 57
三、练习题 …… 83
四、练习题答案 …… 84
第五章　一元函数积分学学习指导 …… 86
一、教学要求与重点、难点 …… 86
二、典型问题分析与求解 …… 86
三、练习题 …… 108
四、练习题答案 …… 110
第六章　常微分方程学习指导 …… 111
一、教学要求与重点、难点 …… 111
二、典型问题分析与求解 …… 111
三、练习题 …… 128
四、练习题答案 …… 129
第七章　向量与空间解析几何学习指导 …… 130
一、教学要求与重点、难点 …… 130
二、典型问题分析与求解 …… 130
三、练习题 …… 142
四、练习题答案 …… 144

第八章 多元函数微分学学习指导 …… 145
一、教学要求与重点、难点 …… 145
二、典型问题分析与求解 …… 145
三、练习题 …… 168
四、练习题答案 …… 170
第九章 多元函数积分学学习指导 …… 172
一、教学要求与重点、难点 …… 172
二、典型问题分析与求解 …… 172
三、练习题 …… 190
四、练习题答案 …… 192
第十章 级数学习指导 …… 193
一、教学要求与重点、难点 …… 193
二、典型问题分析与求解 …… 194
三、练习题 …… 222
四、练习题答案 …… 225
第十一章 Mathematica 中的程序设计 …… 228
一、Table 函数的灵活运用 …… 228
二、条件控制语句 …… 230
三、循环控制语句 …… 232
四、过程程序与函数程序 …… 234
五、Mathematica 中的常见命令 …… 236
参考文献 …… 238

第一章 函数学习指导

客观世界中，许多变量之间的关系都可用函数来描述. 本章首先给出了教学要求，然后结合教学重点、难点通过典型问题的分析与求解来进一步加深对函数概念的理解, 强化对函数的周期性、奇偶性、单调性等儿种特性的认识，以及对分段函数、复合函数等概念的认识. 建议读者先对典型例题进行通读与模仿，再独立完成后面的练习题.

一、教学要求与重点、难点

1. 理解函数的概念.
2. 了解分段函数、基本初等函数、初等函数的概念.
3. 了解反函数、复合函数的概念，会分析复合函数的复合结构.
4. 能熟练列出简单实际问题的函数关系.

重点：函数的概念、复合函数和初等函数的概念，会求函数的定义域.
难点：分段函数的概念，列出简单实际问题的函数关系.

二、典型问题分析与求解

例 1 下列数学结构，为什么不符合函数的定义？

(1) $f=\begin{cases}-x, x\le 1;\\ 1, x\ge 1.\end{cases}$

(2) 自变量 x 的取值范围为 $\{1,2,-1\}$， $f:\begin{array}{cc}1 & 2\\ \downarrow & \downarrow\\ 1 & 1\end{array}$

解:
(1) 在 $x=1$ 处，对应的函数值不唯一，不符合函数定义.

$f=\begin{cases}-x, x\le 1;\\ 1, x>1\end{cases}$ 或 $f=\begin{cases}-x, x<1;\\ 1, x\ge 1\end{cases}$ 才是函数. 而题中所示的只是数学结构，不是函数.

(2) 数学结构 f 不符合函数定义. 是因为定义域中的-1 未被定义函数值，这与函数定义中“自变量 x 在定义域中任意取定一值，因变量有唯一确定的值与之对应”不符，所以此数学结构不是函数，而

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & -1 \\ f: & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

就表示函数.

例 2 下列两组函数是否相同？

(1) $y=\sin x$与$y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；

(2) $y=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$与$y=\ln(2+x)-\ln(2-x)$.

解:

(1) $y=\sin x$与$y=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$的定义域都是（$-\infty,+\infty$），但对应规律不同，故它们不是同一函数.

(2) $y=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$ 定义域为（-2，2），且 $y=\ln\dfrac{2+x}{2-x}=\ln(2+x)-\ln(2-x)$，而 $y=\ln(2+x)-\ln(2-x)$的定义域也为（-2，2），说明两个函数的定义域与对应规律都相同，故他们是同一函数.

说明 函数定义中，最本质的是两个要素：对应规律与定义域，故考察函数模型的结构要从这两个要素着手.

练习 判断下列两组函数是否相同：

(1) $y=2\ln|x|$ 与 $y=\ln x^2$； (2) $y=3\ln|x|$ 与 $y=\ln x^3$；

(3) $y=1$ 与 $y=\dfrac{x}{x}$； (4) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 与 $y=x-1$.

例 3 证明：

(1) $f(x)=\ln(2x+\sqrt{4x^2+1})$ 为奇函数；

(2) $f(x)=(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2})F(x)$，（其中$F(x)$是奇函数）为偶函数.

证:

(1) 因为 $f(-x)=\ln(-2x+\sqrt{4x^2+1})=\ln\dfrac{(-2x+\sqrt{4x^2+1})(2x+\sqrt{4x^2+1})}{2x+\sqrt{4x^2+1}}$

$$=\ln\frac{1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}=-\ln(2x+\sqrt{4x^2+1})=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

说明

(1)当运算式中出现 $a \pm \sqrt{b}$ 时,通常在运算前先对分子、分母乘以其共轭形式 $a \mp \sqrt{b}$ 进行有理化简化计算;

证明 $f(x)$ 是奇函数时,往往直接计算 $f(x)+f(-x)=0$ 成立更简便.

由 $f(x)+f(-x)=\ln(2x+\sqrt{4x^2+1})+\ln\left(-2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$

$$=\ln(2x+\sqrt{4x^2+1})\cdot\left(-2x+\sqrt{4x^2+1}\right)=\ln 1=0,$$

从而证明 $f(x)=-f(-x)$,即 $f(x)$ 为奇函数.

(2)令 $g(x)=\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}$,

因为 $g(-x)=\dfrac{1}{2^{-x}+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2^x}{1+2^x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2^x+1-1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2^x+1}+\dfrac{1}{2}$

$$=-(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2})=-g(x),$$

所以 $g(x)$ 为奇函数,又 $F(x)$ 是奇函数,故 $f(x)=g(x)F(x)$ 是偶函数.

例 4 判断函数 $f(x)=\begin{cases}-1-x, x\le 0;\\ -1+x, x\ge 0\end{cases}$ 的奇偶性.

解:

因为 $$f(x)=\begin{cases}-1-x, x\le 0;\\ -1+x, x>0\end{cases}=\begin{cases}-1-x, x<0;\\ -1, x=0;\\ -1+x, x>0.\end{cases}$$

所以 $$f(-x)=\begin{cases}-1+x, -x<0;\\ -1, x=0;\\ -1-x, -x>0\end{cases}=\begin{cases}-1+x, x>0;\\ -1, x=0;\\ -1-x, x<0\end{cases}=\begin{cases}-1-x, x\le 0\\ \\ -1+x, x>0\end{cases}=f(x).$$

因此 $f(x)$ 是偶函数.

说明 判断分段函数的奇偶性,在分段点处存在"≥"或"≤"时,先分出"<","=",或">",然后再判断.

练习 判断函数 $f(x)=\begin{cases}-1, x>0;\\ 0, x=0;\\ 1, x<0\end{cases}$ 的奇偶性.

例 5 求函数 $y=\sqrt{25-x^2}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{\ln(x-1)}}{x(x-3)}$ 的定义域.

解：

要使 y 有意义，x 应满足

$$\begin{cases}25-x^2\geq 0\\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leq 1\\ \ln(x-1)\geq 0\\ x-1>0\\ x(x-3)\neq 0\end{cases}，\quad 即 \begin{cases}|x|\leq 5\\ -3\leq x\leq 4\\ x-1\geq 1\\ x>1\\ x\neq 0 且 x\neq 3\end{cases}，\quad 即 \begin{cases}|x|\leq 5\\ -3\leq x\leq 4\\ x\geq 2\\ x\neq 3\end{cases}，$$

其交集为 [2, 3) ∪ (3, 4]，故函数定义域为 [2, 3) ∪ (3, 4].

说明 由解析式表示的函数的定义域是使该解析表达式有意义的一切实数所构成的集合，求定义域时应注意以下几点：

（1）若函数的表达式中含有分式，则分式的分母不能为零；

（2）若函数的表达式中含有偶次方根，则根式下的表达式必须非负；

（3）若函数的表达式中含有对数，则真数必须大于零；

（4）若函数的表达式中含有 $\arcsin\varphi(x)$ 或 $\arccos\varphi(x)$ 则必须满足 $|\varphi(x)|\leq 1$；

（5）分段函数的定义域是各个部分自变量的取值范围的并集；

（6）若函数式是由几个函数经过四则运算构成，其定义域是各个函数的定义域的公共部分.

例 6 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\geq 0;\\ e^x, x<0,\end{cases}$ $\theta(x)=\ln x$，

(1) 求 $f[\theta(x)]$ 及其定义域；

(2) 可以复合成形如 $\theta[(fx)]$ 的复合函数吗？

解：

（1）因为 $\theta(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，而 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$ 所

以$\theta(x)$的值域在$f(x)$的定义域内，故$f[\theta(x)]$有意义，因此

$$f\left[\theta(x)\right]=\begin{cases}\theta^2(x), & \theta(x)\geq 0;\\ e^{\theta(x)}, & \theta(x)<0,\end{cases}$$

即 $$f\left[\theta(x)\right]=\begin{cases}\ln^2 x, & x\geq 1;\\ x, & 0<x<1.\end{cases}$$

故$f[\theta(x)]$的定义域为$(0,+\infty)$.

说明 复合函数中，内层函数的值域与外层函数的定义域之交集必须为非空集.

(2)由于$f(x)$的值域是$[0,+\infty)$，$\theta(x)$的定义域是$(0,+\infty)$，它们有公共部分，所以能复合成形如$\theta[f(x)]$的函数.

例 7 已知$f(\frac{1}{x})=\frac{2x}{1+x}$，（1）求$f(x)$；（2）以$f(x)$表示$f(3x)$；（3）求$f[f(x)]$.

解:

(1) $f(\frac{1}{x})=\frac{2x}{1+x}=\frac{2}{\frac{1}{x}+1}$，所以$f(x)=\frac{2}{x+1}$.

(2) $f(3x)=\frac{2}{1+3x}$，又由$f(x)=\frac{2}{x+1}$，得$x=\frac{2}{f(x)}-1$，代入$f(3x)$有

$$f(3x)=\frac{2}{1+3(\frac{2}{f(x)}-1)}=\frac{2}{\frac{6}{f(x)}-2}=\frac{f(x)}{3-f(x)}.$$

（3）$f[f(x)]=\frac{2}{f(x)+1}=\frac{2}{\frac{2}{x+1}+1}=\frac{2(x+1)}{x+3}$.

说明

(1)已知$f[\theta(x)]$的表达式，反求$f(x)$的表达式，一般求解步骤为：

令$\theta(x)=u$，解出$x=\theta^{-1}(u)$，求出$f(u)$的表达式，再将u换成x，即得$f(x)$的表达

式．当然变量替换$\theta(x)=u$,可以不写出来;

(2)已知$f(x)$和$g(x)$的表达式，求函数$f[g(x)]$的表达式，相当于已知$y=f(u)$及$u=g(x)$求复合函数$f[g(x)]$，只需用$g(x)$替换$f(x)$中的x即可.

例 8　已知$f(2x-1)=2x^2$，求$f(x)$.

解：令$u=2x-1$，则$x=\dfrac{1+u}{2}$，代入$f(2x-1)=2x^2$得$f(u)=\dfrac{(1+u)^2}{2}$.

因此$f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{2}$.

例 9　求函数$f(x)=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{x-1}{5}$的定义域.

解：　要使函数$f(x)$有意义，x应满足

$$\begin{cases} x^2-x-6\ge 0 \\ \left|\dfrac{x-1}{5}\right|\le 1 \end{cases}，即\begin{cases}(x+2)(x-3)\ge 0 \\ -4\le x\le 6\end{cases}，即\begin{cases}(-\infty,-2]\cup[3,+\infty) \\ [-4,\ 6]\end{cases}$$

其交集为$[-4,\ -2]\cup[3,\ 6]$，故函数的定义域为$[-4,\ -2]\cup[3,\ 6]$.

练习

(1) 函数$f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-2}+\ln(4-x)$ 的定义域;

(2) 已知$f(x)=\begin{cases}x^2-2x,x\le 0; \\ 0,x>0,\end{cases}$求$f(x-1)$.

(3) 1～14 岁的儿童，其平均身高y (单位：cm)与年龄x成线性函数关系．已知一岁的儿童的平均身高为 80 cm，10 岁儿童的平均身高为 135 cm，写出平均身高y与年龄x的函数关系.

例 10　直接函数$y=f(x)$，其直接反函数为$x=f^{-1}(y)=\varphi(y)$，其矫形反函数为$y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$，问:

(1) $y=\varphi(x)$的定义域、值域如何确定?

（2）$x=\varphi(y)$与$y=\varphi(x)$是否为同一函数？

分析 直接反函数$x=\varphi(y)$是从函数$y=f(x)$中解出x而得到的．$y=f(x)$的自变量取在横轴，而$x=\varphi(y)$的自变量取在纵轴，所以$y=f(x)$的值域就是$x=\varphi(y)$的定义域．人们习惯用x表示自变量的取值，得出矫形反函数$y=\varphi(x)$，并未改变函数的二要素：对应规律与定义域，只是$x=\varphi(y)$与$y=\varphi(x)$的图象关于一，三象限的角平分线对称．

解：

（1）$y=\varphi(x)$的定义域是$y=f(x)$的值域，$y=\varphi(x)$的值域是$y=f(x)$的定义域．

（2）$x=\varphi(y)$ 与$y=\varphi(x)$是同一函数．

例 11 将一个西红柿在时刻 t＝0 以 16m/s 的速度垂直抛向空中，在时刻 t（单位：s）时，它距地球表面的距离y由方程$y=-5t^2+10t$给出，画出位置关于时间的图像，并在图像上注出西红柿落地瞬时与达到最高点相应点的坐标．

分析 西红柿垂直向上抛，其运动路线是上下方向的，并且从那里抛出，就从那里落地，但用水平轴表示时间，而不是表示水平方向的距离，其运动轨迹就是一开口向下的抛物线．

解：西红柿落地时抛物线的纵标$y=0$，

即：$0=-5t^2+10t$或$0=-5t(t-2)$，所以$t=0,2$．

西红柿的运动轨迹位于时刻$t=0$和 2 之间，表示西红柿落地瞬间的点为（2，0），它的最高点位于整个行程的一半处，即得$t=1\text{s}$，这时$y=-5\times1^2+10\times1=5(\text{m})$．距离关于时间的函数图像如图 1-1 所示．

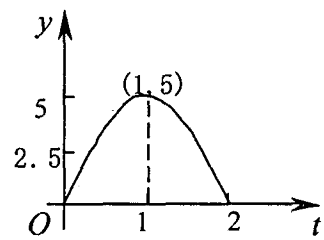


图 1-1

例12 设水以常速注入图 1-2 所示的容器内，画出水的高度关于时间t的函数$y=f(t)$的图像．

分析 为了描绘水面高度关于时间t的函数$y=f(t)$的图像，应搞清如下几个问题：（1）函数的定义域与值域；（2）函数的单调性．

解：设在t时刻，水面高度为$y=f(t)$．由于在$t=0$时刻水面高度为零，所以有

$f(0)=0$．又因为随着时间t的增加，水面高度y要增加，所以水面高度是时间的单增函数，并且水面的最大高度等于容器的高．因此，$y=f(t)$的图像必为图 1-3（a）或图 1-3（b）二者之一．由于容器底部细，上部粗，故开始水面上升较快，随着水面的升高，水面的上升速度在减小，即水面上升高度曲线$y=f(t)$越来越平，所以$y=f(t)$的图像必如图 1-3（b）所示．

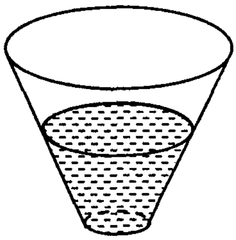
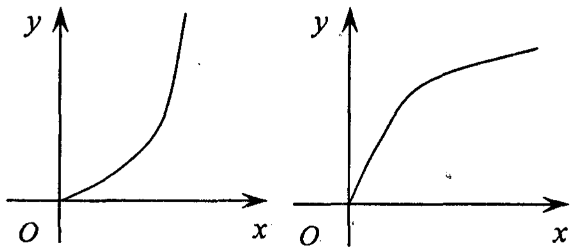


图 1-2



(a) (b)

图 1-3

例13 给出函数f,g,h的一部分取值，并且知道：f为偶函数，g为奇函数，$h=g[f(x)]$是f与g的复合函数，完成表 1-1．

表 1-1

x	f	g	h
-3	-1	-1	
-2	2	2	
-1	2	2	
0	0	0	
1			
2			
3			

分析 表 1-1 相当于给出了函数 f，g，h 的定义域与对应规律，根据条件求出函数值．

解：

因为f为偶函数，所以，$f(1)=2,f(2)=2,f(3)=-1$．

因为g为奇函数，所以，$g(1)=-2,g(2)=-2,g(3)=1$．

又$h=g(f)$，所以，

$h(-3)=g[f(-3)]=g(-1)=2, h(-2)=g[f(-2)]=g(2)=-2, h(-1)=g[f(-1)]=g(2)=-2,$

$h(0)=g[f(0)]=0, h(1)=g[f(1)]=-2, h(2)=g[f(2)]=-2,$

$h(3)=g[f(3)]=2$.

将所求值填在表 1-1 中，见表 1-2

表 1-2

x	f	g	h
-3	0	0	2
-2	2	2	-2
-1	2	2	-2
0	0	0	0
1	2	-2	-2
2	2	-2	-2
3	-1	1	2

例 14 一位旅客住在旅馆里，用图 1—4 描述他的一次行动，请根据图形给纵坐标赋予一个物理量后，再叙述他的这次行动．试给图 1—4 标上具体的数字，精确描述这位旅客的这次行动，并且用函数解析式表达出来．

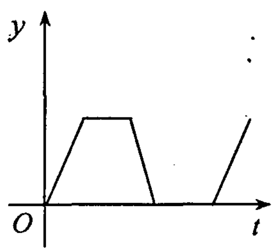


图 1-4

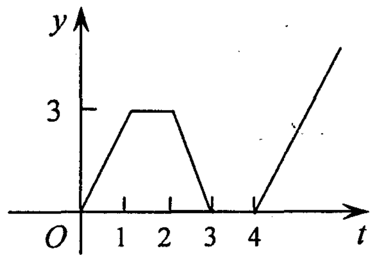


图 1-5

分析 若纵坐标为离开旅馆的距离 y，则图 1—4 可描述他的行动也不是唯一的，只要叙述一次行动即可．

解： 设纵坐标 y 为离开旅馆的距离，时间为 t，则图 1—4 可描述为：这位旅客离开旅馆出外办事，一件事办完后，又回到旅馆，休息一段时间，然后在离开旅馆．

标明具体数据如图 1-5，设距离 y 的单位为 k，时间 t 的单位为 h，则这位旅客这次行动可描述为：他以 3km/h 的速度出外办事，行走 $1h$ 到达办事处，用 1h 办完一件事，以同样的速度回到旅馆，休息 1h，又以同样的速度离开旅馆．这次行动用函数解析式表达如下：

$$y=\begin{cases}3t, & 0\le t\le 1;\\ 3, & 1<t\le 2;\\ -3t+9, & 2<t\le 3;\\ 0, & 3<t\le;\\ 3t-12 & t>4.\end{cases}$$

例 15 设函数 $y=f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的函数，试证明 $f(2x)$ 是以 $\frac{T}{2}$ 为周期的周期函数.

证： 按周期函数的定义：$f(x+T)=f(x)$，只需证明 $f[2(x+\frac{T}{2})]=f(2x)$ 即可，而 $f[2(x+\frac{T}{2})]=f(2x+T)$ ．因为 $f(x+T)=f(x)$，所以 $f(2x+T)=f(2x)$，

即 $f[2(x+\frac{T}{2})]=f(2x)$. 故 $f(2x)$ 是以 $\frac{T}{2}$ 为周期的周期函数.

例 16 一球的半径为 $r=1$，作外切于球的圆锥，试将其体积表示为高 h 的函数，并指出其定义域.

分析 建立函数关系式最重要的问题是寻找变量之间的对应关系，即 f．但是并没有一个统一的规律可循，必须对其具体问题进行具体分析，从分析中找出各个量之间的关系．可利用几何、代数、三角、物理或其他知识来确定量与量之间的对应关系，从而找出对应规律.

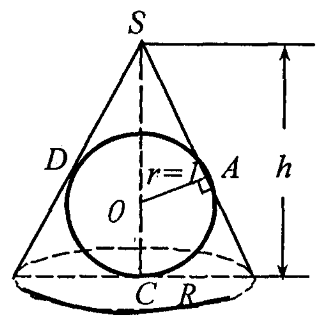


图 1-6

解： 画出示意图如图 1—6 所示. 已知圆 O 内切于圆锥，切点为 $A,C,D,AO=r$, 圆锥体积 $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$, R 为圆锥底面圆的半径，h 为圆锥的高.

若 R 能由已知量 r 或 h 表示，则问题解决．为此可通过以下几何知识找寻 R 与 r,h 的关系．因为 A、C、D 是切点，则 $OA\perp SB, SC\perp BC$.所以直角三角形 SAO 与 SCB 相似.

又 $SO=h-r, SB=\sqrt{h^2+R^2}$ $AO=r$，BC=R，且 $\frac{SO}{SB}=\frac{AO}{BC}$，

所以 $\frac{h-r}{\sqrt{r^2+R^2}}=\frac{r}{R}$. 解得 $R^2=\frac{hr^2}{h-2r}$，.

得 $V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{h^2r^2}{h-2r},(2r<h<+\infty)$， 即 $v=\frac{\pi h^2}{3(h-2)}(2<h<+\infty)$.