近代數學概觀

第四册

李·柯倫脫
赫·洛平斯 合著

章春木
孫炳章 合譯

中華書局出版

本書內容提要

本書譯自 R. Courant 等所著 What is Mathematics 的最新修訂本，計分四冊，這是第四冊，內容包括函數、極限、導數、微積分等，而以極限觀念爲中心，詳述微積分的基本原理與方法，說理嚴密，而能融合直觀精神。書中指出科學進步的途徑，而就可以實證的現象入手，尤爲特點。有志理工科的學者與中學數學教師，讀此極多幫助。

近代數學概觀

WHAT IS MATHEMATICS?

（第四冊）

原著者 RICHARD COURANT
HERBERT ROBBINS

譯　者 章 春 木
孫 炳 章

大學用書 近代數學概觀 (全四册)

© 第四册定價人民幣一萬二千五百元

譯 者 章春木 孫炳章

原著者 Richard Courant and Herbert Robbins

原書名 What is Mathematics?

原出版者 Oxford University Press

原書出版年份 修訂第4版 1948年

出版者 中華書局股份有限公司
上海澳門路四七七號

印刷者 中華書局上海印刷廠
上海澳門路四七七號

發行者 中國圖書發行公司
北京絨線胡同六六號

編號：15713 (53,滬型,23開,89頁,136千字)

1953年5月初版 印數〔滬〕1—1,500

近代數學概觀第四册

目　次

近代數學概觀第四冊

第一編 函數與極限

引 言

近代數學的主體，圍繞着函數和極限的觀念，在本編內，我們要對此加以系統的分析.

像
$$x^2+2x-3$$
的一個式子，在 x 的值未定以先，是沒有確定數值的，我們叫這種式子的值，是 x 值的一個函數(function)，而寫成
$$x^2+2x-3=f(x).$$
例如 $x=2$ 時，$2^2+2\cdot2-3=5$，所以 $f(2)=5$. 同樣的，在 x 爲任何整數、分數、無理數，甚或是複素數時，都可由直接代入的方法，求 $f(x)$ 的值.

小於 n 的質數的個數，是整數 n 的一個函數 $\pi(n)$. 雖然我們尙不知道計算這值的代數式，但 n 的值已定時，$\pi(n)$ 的值即可決定. 一個三角形的面積，是三邊長的函數；邊長變化時，面積也變化，邊長有確定的值時，面積便可決定. 如果一個平面經過一個射影或形勢變換，在變換後一點的坐標，依這點原來的坐標決定，換句話說，也就是後者的函數. 當幾個數量間有一定的物理關係時，函數的觀念，也隨之而生. 封閉在一柱形器內的氣體體積，是溫度和在活塞上所受壓力的函數. 在氣球中測得的大氣氣壓，是在海平面以上高度的函數. 週期現象的全部範圍，如潮汐的運動，繃緊的弦的振動，自白熱絲發出的光波，都是受簡單三

角函數$\sin x$和$\cos x$支配的.

在首先用"函數"一詞的 Leibniz (1646—1716) 以及十八世紀的許多數學家看來,函數的意義,有幾分是指一個數學式的存在,能表示這些關係的正確性質.這樣的看法,對於數學物理說,已經證明是太狹了.函數的觀念,和有關的極限觀念,是經過了一個長時期的推廣和清理的,我們在本編內,就要加以說明.

第一章　變數與函數

第一節　定義和例釋

數學對象,有時可由在一組對象S內任意選擇.我們就叫這一對象爲在S域(range 或 domain)內的變數(variable).習慣上,用西文後面一部分字母來表變數.如S指全體整數所成的組,對S域說,變數X便指任意整數.我們可稱"變數X在S組之列",意思就是說,我們可以自由用符號X來表S組中任一份子.如需敍述在一全組中任選對象的事項,用變數來說,是很方便的.例如設S表整數的組,而X與Y皆是S域內變數,

$$X+Y=Y+X$$

就是一個便利的符號表示式,說明一件事實,即任意二整數的和與相加的順序無關.一個特款,可用含常數的等式

$$2+3=3+2$$

來表出,但是如須表示普遍的規律,對任何一對的數都成立,那就必需用有變數意義的符號.

一個變數的域S並不必要是一組數值.例如S可能是平面內一切的圓所成的組;則X表任何一圓.S也可表平面內一切多角形,而X便是任一多角形.變數的域也不必要含無限多的元素.例如X可表在某時間內某城市的任意一位人民.X也可表用 5 除一整數的餘數中任一個;

在這例中S域只含 0,1,2,3,4 五數.

數值變數——在此我們常用小寫字母x來表——最重要的一款是以實數軸上$a \leq x \leq b$一段(interval)爲S域.這時我們稱x是這一段內的**連續變數**(continuous variable).連續變數的域,可伸張至無窮遠.例如S可以爲一切正實數的組,卽$x>0$,甚或一切實數的組,而無例外.相類的,我們也可設想一變數X,其值是一平面上的點或平面中一部份的點,如在長方形或圓內的.因平面上任一點,由其關於一對固定軸的坐標x, y所確定,所以我們常稱此款爲**一對連續變數**x與y.

對於變數X的任一值,每可與他一變數U的一確定值相聯繫.U便稱爲X的**函數**(function).U與X的聯繫方式,可用符號表成

$$U=F(X) \qquad (\text{讀爲“}X\text{的函數}F\text{”}).$$

如X在S組之列,則變數U在他一組T之列.例如設S是平面內一切三角形X的組,可定一函數$F(X)$,使每一X皆有一周長$U=F(X)$.在此須知兩個不同的三角形,X_1與X_2,可能有同一周長,所以雖在$X_1 \neq X_2$時,方程式$F(X_1)=F(X_2)$也可能成立的.一平面S,經射影變換,移至他一平面T上,按一定的規律,可用函數符號表成$U=F(X)$,在S內的每一點X,化成T內的唯一點U.在此$X_1 \neq X_2$時$F(X_1) \neq F(X_2)$,我們說S移至T上是**二重唯一的**(biunique)(參看本書第一册的第二編第四章第一節).

連續變數的函數,常用代數式來界定.例如下列各函數:

$$u=x^2, \quad u=\frac{1}{x}, \quad u=\frac{1}{1+x^2}.$$

在首末兩式中,x可在全部實數之列.在第二式內,x可在全部實數之列,但 0 須除外——因爲 1/0 不是一個數.

n的質因數個數$B(n)$是n的函數,在此n在一切自然數之列.推廣來說,任何一敍列$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$,可以視爲一函數$u=F(n)$的數值所構成,在此自變數$n$的域是自然數的組.只是爲了簡便起見,我們將這敍列的n項寫成a_n,來代替較明顯的函數記號$F(n)$.本書第一册

第一編內討論的式子,如

$$S_1(n)=1+2+\cdots\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2(n)=1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3(n)=1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

都是整值變數 n 的函數.

如 $U=F(X)$,我們對於 X 保留着自變數(independent variable)的名稱,而稱 U 爲因變數(dependent variable),爲了它的值是 X 所選的值而定.

有時不論 X 爲任何值,U 值皆相同,所以 T 組只含一個元素.這是一種特殊情形,函數的值 U 事實上并無變動;就是說,U 爲常數(constant).我們要把這情形包含在函數的普遍概念內,初學對此可能覺得很奇怪,因爲他們看來,自然着重在 U 隨 X 而變的想法.但這種說法是無傷的,——事實上並且是有益的——即是把常數視爲變數的特例,不過它的"變動域"只含有一個元素而已.

函數的概念,不但只在純粹數學上,有極大的重要性,在實際應用上,也復如此.物理的規律,不過只是一種敍述語,說明某些數量中有一些可以變化時,其他數量如何因之而變.例如繃緊的弦發出音調的高低,視弦的長、重和張力而定,大氣的壓力,視高度而定,鎗彈的能,視其質量和速度而定.物理學家的任務,就在求定這種函數所聯繫的正確性質或差近性質.

函數的概念,使運動的特徵,得到正確的數學描寫.設一動質點集中於空間內有正交坐標 x,y,z 的一點,用 t 表時間,用 t 的函數表坐標 x,y,z,如:

$$x=f(t),\quad y=g(t),\quad z=h(t),$$

便可完全說明這質點的運動.例如一質點只受重力的作用,沿直立的 z 軸,自由下落,則

$$x=0, \quad y=0, \quad z=\frac{1}{2}gt^2,$$

式中 g 表由於重力的加速度. 又如一質點在 x,y 平面內的一個單位半徑圓上,等速旋轉,其運動特徵,即由函數

$$x=cos\omega t, \qquad y=sin\omega t$$

表出,在此 ω 為常數,便是所謂運動的角速度.

一個數學的函數,僅是一種規律,支配着變量間的相互聯繫. 於此並不含變量間有任何"因果"關係存在之意. 雖在普通的說法,用"函數"一詞時,常有後面一種含義,但是我們應當避免一切這類哲學的解釋. 例如一容器內氣體在一定溫度下的 Boyle 規律,說明壓力 p 與體積 v 的乘積為一常數 c(其值依溫度決定):

$$pv=c.$$

這關係,可就 p 或 v 解出,而成其他變數的函數,如

$$p=\frac{c}{v} \quad 或 \quad v=\frac{c}{p},$$

并不含有體積變化是壓力變化的"原因"之意,正如不視壓力變遷為體積變遷的"原因",是一樣的. 數學家所關切的,只是兩變數間聯繫的格式.

數學家和物理學家有時對於函數觀念上的重點,持不同的見解,前者常注意對應的規律(law of correspondence),就是數學運算作用於自變數 x 上可得到因變數 u 的值. 在這意義上, $f(\quad)$ 是一個數學運算的符號; $u=f(x)$ 的值是運算作用到 x 一數上的結果. 在另一方面,物理學家比較感到興趣的只是這樣的一個數量 u,而不是自 x 值去計算 u 值的數學過程. 例如空氣對動體的阻力 u 視速度 v 而定,可以由實驗求出,而不論是否知道有一個顯露的數學公式來計算 $u=f(v)$. 物理學家的主要興趣,只在實際的阻力,而不在於特殊的數學公式 $f(v)$,除非是這樣一個公式,可幫助我們分析數量 u 的性質. 把數學應用到物理或工程上時,一般的態度,常是如此. 在函數的高深計算時,如要避免含混,只須明確的知道是否指作用於 x 可得數量 $u=f(x)$ 的運算 $f(\quad)$,抑或是數量 u 本身,這量也可設想為依不同方式,由他一變數 z 決定. 例如圓面積由函數 $u=f(x)=\pi x^2$ 而定, x 指半徑,但也可用函數 $u=g(z)=$

$\frac{z^2}{4\pi}$表示,而 z 指圓周長.

一個變數的數學函數，最簡單的形式，恐怕要推**多項式** (polynomial),其形式如下:

$$u=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n,$$

此中 $a_0,a_1,\cdots\cdots,a_n$ 爲常"係數".其次爲**有理函數**(rational function),類如

$$u=\frac{1}{x},\qquad u=\frac{1}{1+x^2},\qquad u=\frac{2x+1}{x^4+3x^2+5},$$

這些都是多項式的商,此外爲三角函數 (trigonometric functions)，如 $\cos x,\sin x$ 以及 $\tan x=\sin x/\cos x$,最好的界定方法,是用 ξ,η 平面內的單位圓，$\xi^2+\eta^2=1$. 如一點$P(\xi,\eta)$在這圓周上移動,而 x 是從正向 ξ 軸旋轉到與 OP 相合時的方向角,則 $\cos x$ 與 $\sin x$ 便是 P 點的坐標: $\cos x=\xi$, $\sin x=\eta$.

第二節　角的弧度法

爲一切實用目標計,量角的單位,是將直角等分爲若干相等部分而得的.如等分的數是 90，所得單位便是習用的"度". 分成 100 等分,更適合於十進位,但仍是表示同一的度量原則. 然而爲理論計,宜用一個主要不同的方法,來辨識一角的大小,卽所謂弧度法.用這種制度,許多含三角函數的重要公式,都比以度來量角的形式簡單.

欲求弧度法,可以角的頂點爲心,作一半徑爲 1 的圓. 這角在圓周上截取一段弧 s，我們便取這弧長爲這角的**弧度** (radian measure).因半徑爲 1 的圓，全周長爲 2π，故旋轉一周的全角 360° 的弧度是 2π. 由此可知，如 x 表一角的弧度，y 表其度數，則 x 與 y 間的關係式是 $y/360=x/2\pi$,或

$$\pi y=180\,x.$$

故 90° 的角($y=90$)，弧度是 $x=90\pi/180=\frac{\pi}{2}$，餘倣此.他一方面說,

一弧度的角(卽一角弧度爲 $x=1$ 的)，卽爲所截弧與半徑等長的角;以度來表,便爲 $y=180/\pi=57.2957\cdots\cdots$ 度.我們必須用因數 $180/\pi$ 乘一角的弧度 x，方可得其度數 y.

一角的弧度 x 也可等於這角在單位圓內截取扇形面積的二倍，因這面積對圓全面積的比,等於相當弧長對全周長的比:

$$x/2\pi=A/\pi,\quad x=2A.$$

自此後，x 角就是指弧度爲 x 的角. x 度的角,記爲 x°，以免混淆.

弧度法在解析運算,可以顯出是很便利的,但在實用上,却不方便.因 π 是無理數,如果我們繼續把單位角,卽弧度爲 1 的角,連接起來,永遠不能回到圓上原來的點.普通量角法的設計，使得把 1 度連接劃 360 次,或是劃 90 度 4 次,便可回到原來位置.

第三節　函數的圖線　反函數

一個函數特徵,常可以用一個簡單的幾何圖線表現出來.如 x,u 是一平面內關於某一對正交軸的坐標,則平直函數如

$$u=ax+b,$$

是表直線;二次函數如

$$u=ax^2+bx+c,$$

是表抛物線;函數

$$u=\frac{1}{x},$$

表雙曲線,餘倣此.按定義,任何函數 $u=f(x)$ 的圖線(graph)，含平面上坐標合於關係 $u=f(x)$ 的一切諸點. $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ 的圖線如圖 1 與圖 2. 這些圖線明晰的表出,在 x 變化時,函數的值如何增減.

引入各種新函數的一個重要方法如次.開始取一個已知函數 $F(X)$，試解方程式 $U=F(X)$ 以求 X,使 X 成爲 U 的函數:

$$X=G(U).$$

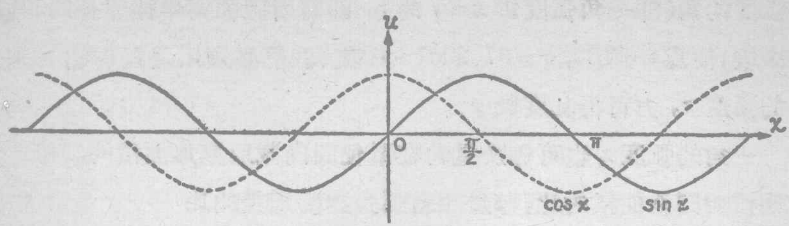

圖1. $\sin x$ 與 $\cos x$ 的圖線

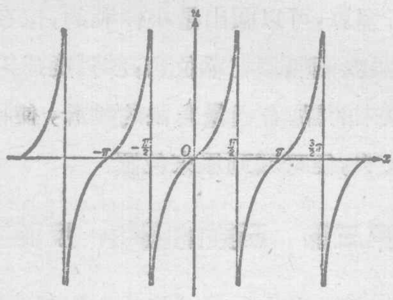

圖2. $u=\tan x$

函數 $G(U)$便叫做 $F(X)$的**反函數**(inverse function).設函數 $U=F(X)$ 界定一個二重唯一的移形,將 X 域移至 U 域上,就是說由於不等式 $X_1 \neq X_2$,一定有$F(X_1) \neq F(X_2)$,只在這時反函數的過程,方可得一個唯一的結果,因為只當如此時,有一個唯一確定的X與每一U相聯繫.前面有一例,其中 X 指平面內的任何三角形,而$U=F(X)$ 表其周長,就可針對這種情形.顯見的,這些三角形所成的S組,移到正實數的組T上,不是二重唯一的,因為有同一周長的相異三角形,有無窮的多.所以在這種情形中,關係 $U=F(X)$ 不能用來界定一個唯一的反函數.在他一方面,取函數 $m=2n$, 在此 n 在整數組 S 之列, 而 m 則在偶數組T之列,這二組間建立了一個二重唯一的對應,而反函數 $n=m/2$ 便可唯一界定.二重唯一移形的又一例,決定於函數

$$u=x^3.$$

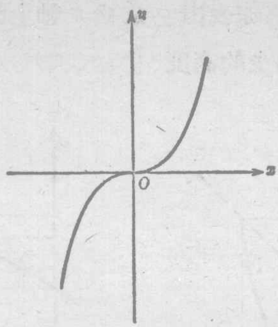

圖3. $u=x^3$

當 x 在一切實數所成組之列，u 也在一切實數所成組之列，等於組中各值一次而只有一次.唯一界定的反函數是

$$x=\sqrt[3]{u}.$$

但如取函數

$$u=x^2,$$

則反函數不能唯一界定.因 $u=x^2=(-x)^2$，每一正值的 u，可由二個前定值決定. 但如照習慣方法，界定符號 $\sqrt{u}$ 表平方爲 u 的正數，則在 x 與 u 限於正值時，反函數

$$x=\sqrt{u}$$

是存在的.

一元函數 $u=f(x)$ 能否有一個唯一的反函數存在，每可就其圖線一望而知.僅在對於 u 的每一值，只有 x 一值相對應時，反函數方可唯一界定.就圖線來說，意即 x 軸的平行線，無有與這圖線交於二點的.如函數 $u=f(x)$ 爲單調 (monotone)，就是說，x 值增加時，函數值一直的增加或減小，則上面的情形一定適合. 例如設 $u=f(x)$ 一直增加，則 $x_1<x_2$ 時，常有 $u_1=f(x_1)<u_2=f(x_2)$. 故對 u 的一已知值，至多只有一個 x 值，使 $u=f(x)$，這反函數便可唯一界定. 將一函數原來的圖線，依虛線 (見圖 4) 旋轉過 180° 的角，使 x 軸與 u 軸對調，只須如此，便可求得反函數 $x=g(u)$ 的圖線.這圖線的新位置，可以將 x 描成 u 的