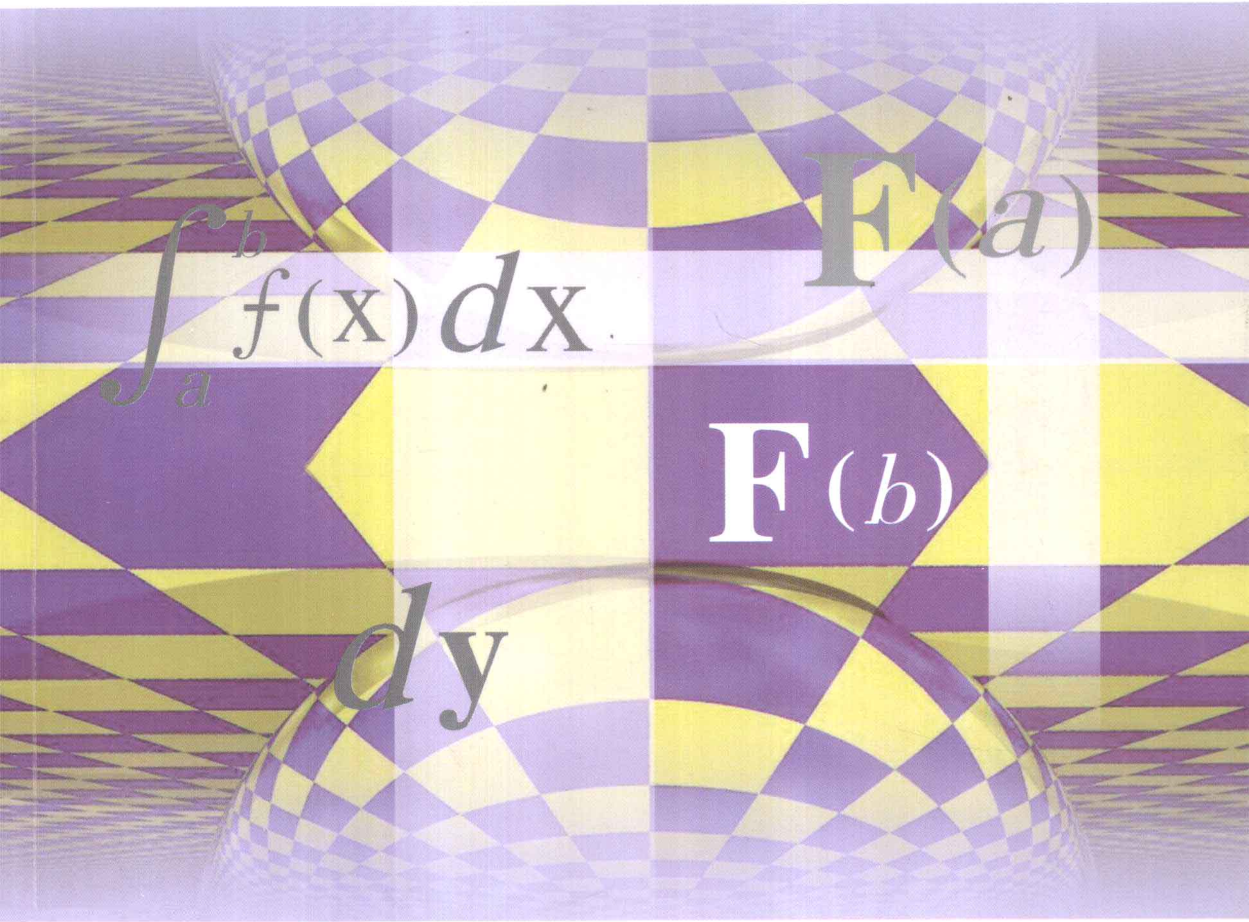
21世纪高等学校经济数学教材

微积分

◆ 杨爱珍 主编
◆ 陈启宏 主审



复旦大學出版社

21世纪高等学校经济数学教材

微积分

主编 杨爱珍
主审 陈启宏

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/杨爱珍主编.—上海:复旦大学出版社,2007.5
21世纪高等学校经济数学教材
ISBN 978-7-309-05421-7

Ⅰ.微… Ⅱ.杨… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第033461号

微积分
杨爱珍 主编

出版发行 复旦大学 **出版社** 上海市国权路579号 邮编200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65118853(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印 刷 上海第二教育学院印刷厂
开 本 787×960 1/16
印 张 24
字 数 431千
版 次 2007年5月第一版第一次印刷
印 数 1—5 100

书 号 ISBN 978-7-309-05421-7/O·392
定 价 36.00元

内 容 提 要

本书由上海财经大学应用数学系、上海金融学院应用数学系、上海商学院基础教学部教师合作编写，系“21 世纪高等学校经济数学教材”系列之一.

全书共分 8 章：函数与极限，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，无穷级数，微分方程与差分方程. 本书科学、系统地介绍了微积分的基本内容，重点介绍了微积分的方法及其在经济管理中的应用，每章均附有习题，书末附有习题的参考答案.

本书可作为高等经济管理类院校的数学基础课程教材，同时也适合财经类高等教育自学考试、各类函授大学、夜大学使用，也可作为财经管理人员的学习参考书.

21 世纪高等学校经济数学教材

编 委 会

（以姓氏笔画为序）

前 言

为适应我国高等教育的飞速发展和数学在各学科中更广泛的应用，根据高等教育面向21世纪发展的要求，我们上海财经大学应用数学系、上海金融学院应用数学系、上海商学院基础教学部教师合作编写了“21世纪高等学校经济数学教材”——《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》.

针对使用对象的特点，结合作者多年的教学实践和教学改革的实际经验，在这套系列教材的编写过程中，我们注重了以下几方面的问题：

1. 适应我国在21世纪经济建设和发展的需要，着眼于培养“厚基础，宽口径，高素质”的财经人才，注重加强基础课程，特别是数学基础课程.

2. 作为高等经济管理类院校数学基础课程的教材，在注意保持数学学科本身结构的科学性、系统性、严谨性的同时，力求深入浅出，通俗易懂，突出有关理论、方法的应用和简单经济数学模型的介绍.

3. 注意培养学生的学习兴趣，扩大学生的视野，使学生了解微积分创立发展的背景，提高学生对数学源流的认识，在每章后附有数学家简介，介绍对微积分创立发展过程中作出过伟大贡献的著名数学家.

4. 注意兼顾经济管理学科各专业学生，既能较好地掌握所学知识，又能满足后继课程及学生继续深造的需要. 为此，将本书习题分为两部分，习题(A)为基础题，习题(B)为提高题.

参加《微积分》一书编写的有上海财经大学应用数学系杨爱珍副教授(第一章、第二章、第三章)及叶玉全副教授(第四章、第五章)，上海金融学院应用数学系洪永成老师(第六章)及车荣强副教授(第七章)，上海商学院基础教学部苏海容老师(第八章)，最后由杨爱珍副教授对全书进行了统稿.

在本教材编写过程中，我们得到了上海财经大学、上海金融学院、上海商学院的重视和支持，并得到了复旦大学出版社的鼎力相助，特别是范仁梅老师的认真负责，在此一并致谢.

限于学识与水平，本书的缺点与错误在所难免，恳请专家和读者批评指正.

编者

2007年1月

目 录

第一章 函数与极限

微积分是研究函数关系的一门科学，它的研究对象是函数，其中主要是初等函数；极限是微积分的理论基础，每一个重要概念的产生过程可以说是人类对极限思想的认识逐渐加深、逐渐明确的过程. 本章将介绍函数、极限以及函数连续性等基本内容.

§1.1 函数

一、实数

1. 数轴

数轴是定义了原点、方向与单位长度的直线. 数轴上的每个点表示一个确定的实数. 若点 M 与原点的距离为 d，且点 M 在原点正向，则 M 表示正实数 d；若点 M 与原点的距离为 d，且点 M 在原点负向，则 M 表示负实数 $-d$；若点 M 与原点重合，则 M 表示数零. 这样，就建立了数轴上的点与实数间的一一对应. 每个实数可看成数轴上一个确定的点，数轴上的每个点代表一个确定的实数，并且不同的点代表不同的实数.

2. 区间

若 $\mathbf{R}$ 表示实数集，当 $a, b \in \mathbf{R}$，且 $a < b$，定义各类区间如下：

有限区间：$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$，

$(a, b) = \{x \mid a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$，

$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b, x \in \mathbf{R}\}$，

$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$；

无穷区间：$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty, x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$，

$(-\infty, a] = \{x \mid -\infty < x \leqslant a, x \in \mathbf{R}\}$，

$(-\infty, a) = \{x \mid -\infty < x < a, x \in \mathbf{R}\}$，

$[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x < +\infty, x \in \mathbf{R}\}$，

$$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty, x \in \mathbf{R}\}.$$

3. 邻域

定义 1.1 设 x_0 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,满足不等式 $|x - x_0| < \delta$ 的实数 x 的全体称为 x_0 的 δ 邻域.

若用 $O_\delta(x_0)$ 表示 x_0 的 δ 邻域,则

$$O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

其中 x_0 称为 $O_\delta(x_0)$ 的中心点,δ 称为 $O_\delta(x_0)$ 的半径;而

$$O_\delta(x_0) \backslash \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

称为 x_0 的 δ 去心邻域,其中 $(x_0 - \delta, x_0)$ 称为 $O_\delta(x_0)$ 的左邻域, $(x_0, x_0 + \delta)$ 称为 $O_\delta(x_0)$ 的右邻域.

x_0 的 δ 邻域 $O_\delta(x_0)$ 可用数轴形象地表示,见图 1.1.

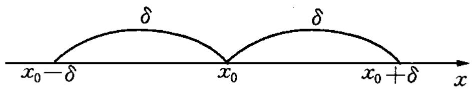


图 1.1

二、函数的概念

1. 变量与函数

所谓变量是指在某一过程中不断变化的量. 例如某地的气温;某种产品的产量、成本和利润;某时刻世界人口的总数等都是变量. 例如,物理学中自由落体的距离 h 与时间 t 的关系为 $h = \frac{1}{2}gt^2$;圆的面积 S 与圆的半径 r 的关系为 $S = \pi r^2$.

在任何一种自然规律或任何一个经济活动中,各个变量的变化不是孤立的,而是彼此联系并遵循着一定的变化规律.

在上面的关系式 $h = \frac{1}{2}gt^2$, $S = \pi r^2$ 中,变量之间联系的表达式完全不同,但它们却有着相同的本质,即在某个过程中的两个变量是相互联系的,当其中一个变量在某一范围内每取一个值时,另一个变量就按照一定的规律,有唯一确定的值与之对应. 变量之间的这种相互依赖关系就是函数的概念,下面给出一元函数(只含一个自变量的函数)的定义.

定义 1.2 设有两个变量 x 和 y,如果当变量 x 在某非空实数集合 D 内任取一个数值时,变量 y 按照一定的法则(对应规律) f,都有唯一确定的值 y 与之

对应，则称 y 是 x 的函数. 记作 $y=f(x)$，其中变量 x 称为自变量，它的取值范围 D 称为函数的定义域；变量 y 称为因变量，它的取值范围是函数的值域，记为 $Z(f)$，即 $Z(f)=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$.

从函数的定义中不难看出，定义域 D 与对应规律 f 是构成函数的两个基本要素. 如果两个函数的定义域与对应规律都分别相同，则称这两个函数相同.

一般情况下，函数的定义域就是使函数表达式在实数范围内有意义的自变量的全体. 当然，在实际问题中，尚需根据问题的实际意义来确定.

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_2(1-x^2)+\arcsin(2x-1)$；　(2) $y=\dfrac{\sqrt{6-x-x^2}}{x+1}$；

(3) $y=\dfrac{\sqrt{2x+7}}{\ln(x+4)}$.

解　(1) 由 $\begin{cases}1-x^2>0\\ |2x-1|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<1$，故定义域 $D=[0,1)$.

(2) 由 $\begin{cases}6-x-x^2\geqslant 0\\ x+1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3+x)(2-x)\geqslant 0\\ x+1\neq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[-3,-1)\cup(-1,2]$，故定义域 $D=[-3,-1)\cup(-1,2]$.

(3) 由 $\begin{cases}2x+7\geqslant 0\\ x+4>0\\ x+4\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant -\dfrac{7}{2}\\ x>-4\\ x\neq -3\end{cases}\Rightarrow x\in\left[-\dfrac{7}{2},-3\right)\cup(-3,+\infty)$，

故定义域 $D=\left[-\dfrac{7}{2},-3\right)\cup(-3,+\infty)$.

例 2 设 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，求 $f(1)$，$f(x+1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解　$f(1)=\dfrac{x}{x+1}\Big|_{x=1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$；

$$f(x+1)=\frac{(x+1)}{(x+1)+1}=\frac{x+1}{x+2}；$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{1+x}.$$

例 3 设 $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=3x+2$，求 $f(x)$.

解　用换元法，令 $t=\frac{x+1}{x-1}$，则 $x=\frac{t+1}{t-1}$，于是

$$f(t)=3\left(\frac{t+1}{t-1}\right)+2,$$

将 t 换成 x，即得

$$f(x)=3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+2=\frac{5x+1}{x-1}.$$

2. 函数的表示法

函数的表示法一般有 3 种：公式法（解析法）、表格法与图示法. 函数的 3 种表示法各有其特点，表格法和图示法直观明了，而解析法则简捷准确，易于运算，便于理论研究.

(1) 公式法. 公式法也称解析法，就是用解析表达式来表示函数关系的一种方法，常有显式与隐式两种.

显式的标准形式为 $y=f(x)$，这里 $f(x)$ 是一个含自变量 x 的解析式，例如 $y=x^2+\sin x$，$y=\sqrt{9-x^2}+\ln x$ 等.

隐式的标准形式为 $F(x, y)=0$，这里 $F(x, y)$ 是一个含自变量 x 与因变量 y 的一个解析式，由 x 的值和 $F(x, y)=0$ 可确定相应 y 的值，例如 $x^2+y^2-4=0\ (y>0)$.

(2) 表格法. 在现实生活中许多函数关系难以用公式来表示，例如一天的气温作为时间的函数等，表示这些函数关系就用表格法与图示法.

例如，某城市一年里每月大米的销售量（单位：万吨），如表 1.1 所示.

表 1.1

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 s	144	161	123	81	84	50	45	40	45	90	100	120

表 1.1 表示了某城市大米销售量 s 随月份 t 而变化的函数关系.

(3) 图示法. 图示法是用图形来表示函数关系的方法，它直观性强. 随着计算机的发展，图示法愈来愈得到广泛的使用.

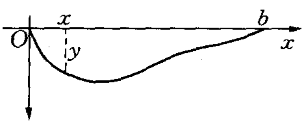


图 1.2

例如，某河道的一个断面图形如图 1.2 所示. 其深度 y 与测量点到岸边的距离 x 的函数关系如图 1.2 中的曲线所示.

这里深度 y 与测距 x 的函数关系是用图形表

示的.

3 种表示法可以结合使用.

在用解析法表示函数时,有时需要在自变量的不同范围中用不同的数学式子来表示一个函数,这种函数称为“分段函数”.

例 4　求函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & (x<0)\\ 1 & (0<x<1)\\ 2x-1 & (1\leqslant x<2)\end{cases}$ 的定义域,及函数值 $f(-1)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(1)$,并作其图形.

解　它是一个分段函数,定义域是其各段定义域的并集,即

$$D=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 2);$$

函数值:

$$f(-1)=(x+1)\big|_{x=-1}=0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=1,\ f(1)=(2x-1)\big|_{x=1}=1;$$

其图形如图 1.3 所示.

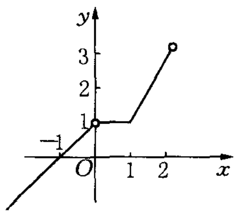


图 1.3

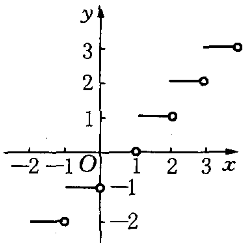


图 1.4

例 5　求函数 $y=[x]$ 的定义域,并作其图形.

解　这个函数称为取整函数,$y=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,即

$$y=[x]=n,\ n\leqslant x<n+1,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

是一个分段函数,它的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$,图形如图 1.4 所示.

例 6　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (0\leqslant x\leqslant 2)\\ x^2 & (2<x\leqslant 4)\end{cases}$,求 $f(x-1)$.

解　$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+2 & (0\leqslant x-1\leqslant 2),\\ (x-1)^2 & (2<x-1\leqslant 4),\end{cases}$