丛书主编：周　圆
本册主编：郑　涛

高考上线百分百

100%

百分百紧扣考试大纲　百分百专家名师编写
百分百抓住命题考点　百分百高考出色表现

第1轮复习用书

数学

TJKJ 天津科学技术出版社

高考上线

百分百

主　编：郑　涛
副主编：张功萍　王祖德　周根华　周红卫
编　委：（按姓氏笔画排列）
马　程　付　勇　包勇华　刘云超
刘玉清　齐国辉　杨尚奎　吴拥华
张　剑　李家将　李瑞华　周志圣
官雄平　赵青云　柯炳四　高兴兵
徐　志　郭　岩　曹　平　黄师学
章柏梅　彭丽樟　廖明芳

数学

天津科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考上线百分百．数学/周圆主编;郑涛分册主编．—天津:天津科学技术出版社,2007

ISBN 978-7-5308-4360-4

Ⅰ．高...　Ⅱ．①周...②郑...　Ⅲ．数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 073232 号

责任编辑:刘丽燕

责任印制:白彦生

天津科学技术出版社出版

出版人:胡振泰

天津市西康路 35 号　邮编 300051

电话(022)23332393(发行部)　23332392(市场部)　27217980(邮购部)

网址:www.tjkjcbs.com.cn

新华书店经销

南昌市印刷四厂印刷

开本 850×1168　1/16　印张 26.5　字数 1 123 200

2007 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

定价:49.00 元

前言

高考上线百分百　出色表现百分百

一年一度的高考，一年一度的较量；一年一度的胜负，一年一度的喜忧。谁都想在高考中上线，谁都想在高考中胜出，谁都想在高考中有出色表现！要上线，离不开你眼前的《高考上线百分百》，真正让你百分百高考上线的好丛书。

《高考上线百分百》第一轮总复习用书本着"以复习课程为依据，以应对高考为根本，以超常发挥为基点"的原则，从第一轮课程复习教学特点与教学要求出发，突出复习课程重中之重，突破课程考点难中之难，突显知识联系节中之节。以"一看就懂"、"一学就会"、"一用就对"为基本目标，体系严谨明了，讲解深入浅出，表达通俗易懂，训练新颖高效。以"事半功倍"、"全面提高"、"就是高考"为编写准绳，每一节内容选材新而意高，选题精而实用，选论易而独到，而且更有教研专家、知名教师的原创好题与个人见解。一套独一无二的复习用书，必然给您一个真正改写人生的亮丽舞台！

权威百分百——百分百专家名师编写

《高考上线百分百》由国家教育部中央教育科学研究所高中课程研究室专家策划指导，由知名中学高三一线特、高级名师集本人近二十年高考复习经验与心得整理编写。不仅理念新颖，充分体现高考精神，而且内容实用，直接为高三第一轮复习服务。真正是理念权威与实践权威的完美结合！

内容百分百——百分百紧扣考试大纲

在紧扣考试大纲要求和充分解读、体现考试大纲的基础上，《高考上线百分百》突出原创与改造，无论是对知识的讲解、对考点的归纳，还是对变式训练的设置、对知能测试的命制，都尽量突出原创，与天下同类教辅绝少雷同。第一轮复习的独门绝技，处处彰显，寓含其中！

实用百分百——百分百抓住命题考点

在紧紧抓住、抓全高考命题考点的前提下，丛书尤其强调从实用的复习策略、实用的复习方法、实用的讲解演练和实用的学习技巧入手，帮助学生尽快掌握高考命题考点，强调"高考零失误"的理念。第一轮用书，只有实用的，才是最好的！

成绩百分百——百分百高考出色表现

用书，就要用能让你在最后决战关头完美胜出的好书。百分百完美呈现的好书，只要你百分百用得好，所得到的，必然是在高考中百分百的出色表现，让你在高考中超常发挥，赢得精彩！同时也赢得美好人生！

只有百分之百的真正精彩，才有百分之百的出色表现！

本册导读

近几年高考数学试题坚持新题不难、难题不怪的命题方向，强调“注意通性通法，淡化特殊技巧”。正如教育部考试中心命题处处长任子朝所说，“不能借口能力考查和理论联系实际而弱化、淡化基础知识、基本理论”。有的知识点看起来在课本中没有出现过，但它属于“一捅就破”的情况，出现的可能也是有的。“注意通性通法，淡化特殊技巧”，就是说高考最重视的是具有普遍意义的方法和相关的知识。例如，将直线方程代入圆锥曲线方程，整理成一元二次方程，再利用根的判别式、求根方式、韦达定理、两点间距离公式等可以编制出很多精彩的试题。这些问题考查了解析几何的基本方法，也体现了考试中心提出的“应更多地从知识网络的交汇点上设计题目，从学科的整体意义、思想含义上考虑问题”的思想。但我们仍然要注意回归课本。只有吃透课本上的例题、习题，才能全面、系统地掌握基础知识和基本方法，构建数学的知识网络，以不变应万变。在求活、求新、求变的命题的指导思想下，高考数学试题虽然不可能考查单纯背诵、记忆的内容，也不会考查课本上的原题，但对高考试卷进行分析就不难发现，许多题目都能在课本上找到"影子"，不少高考题就是对课本原题的变型、改造及综合。回归课本，不是要强记题型、死背结论，而是要抓纲悟本，对着课本目录回忆和梳理知识，把重点放在掌握例题涵盖的知识及解题方法上，选择一些针对性极强的题目进行强化训练、复习才有实效。对于高三数学复习，一般可分为三个阶段。第一阶段为基础性复习阶段，第二阶段为提高性复习阶段，第三阶段为综合性复习阶段。作为第一阶段的复习也就是我们所说的高三第一轮复习主要体现在“基础性、全面性和熟练性”。

(1)基础性，即强调复习内容应是中学数学中的基础知识，它包括数学基础知识、基本技能和基本方法。复习中，要强调概念清楚，基本运算要熟练正确，基本方法运用得当，书写表达规范准确等。

(2)全面性，即强调对高中数学中的130个知识点要进行全面的复习，对常用数学方法的复习要全面。

(3)熟练性，即指通过复习，学生对数学基础知识和基本数学方法要熟练地掌握和运用，为以后进一步复习打下扎实的基础。

本书是根据国家教育部现行的教学大纲并参照有关版本的内容和高三第一阶段的复习特点编写的高三第一轮复习用书，全书分章节编写，内容包括“能力要求”、“知识要点”、“例题分析(附变式训练)”、“错解分析”、“归纳小结”和“能力训练”等，每一章都配备了一套测试题，对本章全部知识进行了综合性的回顾、总结和提炼。全书注重基础知识和基本技能，突出其中的核心概念和基本的数学思想方法，并适当反映各部分之间的联系。题目强调基础性、综合性和创新性，并覆盖考纲中的每一个知识点。例题分析和能力训练内容分基础、能力、提高三个层次，与不同层次学生对应，符合不同层次的学生和学校的需要。全书力求体现高中课程标准的要求，达到实施高中数学课程标准后的高考对考生的要求。相信本书的出版会给参加高考的考生提供针对性强且切实有效的复习资料。

目录

目录

第一章 集合与简易逻辑

1.1 集合的概念

考纲要求概述 KAO GANG YAO QIU GAI SHU

1. 理解集合、子集的概念,能利用集合中元素的性质解决问题,掌握集合问题的常规处理方法.

2. 集合中元素的3个性质,集合的3种表示方法,集合语言、集合思想的运用.

考点通透讲解 KAO DIAN TONG TOU JIANG JIE

1. 集合

① 集合的概念:某些指定的对象集在一起就成为一个集合,每个对象叫做集合的元素.

② 表示方法

列举法:将集合中的元素一一列举出来,用大括号括起来,如$\{a,b,c\}$

描述法:将集合中的元素的共同属性表示出来,形式为:$P=\{x \mid P(x)\}$,如$\{x \mid y=\sqrt{x-1}\}$,$\{y \mid y=\sqrt{x-1}\}$,$\{(x,y) \mid y=\sqrt{x-1}\}$

图示法:用文氏图表示题中不同的集合.

③ 分类:有限集、无限集、空集.

④ 性质

确定性:$a\in A$或$a\notin A$必居其一

互异性:不写$\{1,1,2,3\}$而写$\{1,2,3\}$,集合中元素互不相同

无序性:$\{1,2,3\}=\{3,2,1\}$

2. 常用数集

复数集$\mathbf{C}$,实数集$\mathbf{R}$,整数集$\mathbf{Z}$,自然数集$\mathbf{N}$,正整数集$\mathbf{N}^*$(或$\mathbf{N}_+$),有理数集$\mathbf{Q}$

3. 元素与集合的关系:$a\notin A$或$a\in A$

4. 集合与集合的关系

① 子集:若对任意$x\in A$都有$x\in B$(或对任意$x\notin B$都有$x\notin A$),则A是B的子集.

记作:$A\subseteq B$或$B\supseteq A$ $A\subseteq B, B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$

② 真子集:若$A\subseteq B$,且存在$x_0\in B$,但$x_0\notin A$,则A是B的真子集.

记作:$A\subsetneqq B$(或"$A\subseteq B$且$A\neq B$") $A\subsetneqq B, B\subsetneqq C\Rightarrow A\subsetneqq C$

③$A\subseteq B$且$B\subseteq A \Leftrightarrow A=B$

④ 空集:不含任何元素的集合,用$\varnothing$表示

对任何集合A有$\varnothing\subseteq A$,若$A\neq\varnothing$则$\varnothing\subsetneqq A$

注:$a\neq\{a\}$ $\varnothing\neq\{0\}$ $\varnothing\neq\{\varnothing\}$

5. 子集的个数

若$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,则A的子集个数、真子集的个数、非空真子集的个数分别为2^n个,2^n-1个和2^n-2个.

考题立体评析 KAO TI LI TI PING XI

题型一:集合的表示方法

【例1】 (1) 分别用列举法表示集合:

$A=\{y \mid y=x^2-1, |x|\leqslant 2, x\in\mathbf{Z}\}=$________,

$B=\{(x,y) \mid y=x^2-1, |x|\leqslant 2, x\in\mathbf{Z}\}=$________;

(2) 已知集合$A=\{2,3,a^2+4a+2\}$,$B=\{0,7,a^2+4a-2,2-a\}$,且$A\cap B=\{3,7\}$,则集合$B=$________;

(3) 设$I=\{2,4,a^2-5\}$,$M=\{2,a^2-a+2\}$,当$\complement_I M=\{-1\}$时,则$a=$________.

分析:(1) 关键在于分清集合A、B的不同含义;(2)、(3)均含有待定系数,应在准确领会集合的相等、全集与补集等概念的基础上进行分析与转化.

解:(1)A表示当$x=0,\pm1,\pm2$时函数$y=x^2-1$的值域,从而$A=\{-1,0,3\}$;B则表示曲线$y=x^2-1$当$x=0,\pm1,\pm2$时对应的点集,因而易得

$B=\{(-2,3),(-1,0),(0,-1),(1,0),(2,3)\}$.

(2)$\because A\cap B=\{3,7\}$,$\therefore a^2+4a+2=7$

$\therefore a^2+4a-5=0$ $\therefore a=-5$或$a=1$

i) 当$a=1$时,$a^2+4a-2=3$,$2-a=1$

$\therefore B=\{0,7,3,1\}$

ii) 当$a=-5$时,$a^2+4a-2=3$,$2-a=7$,此时在集合B中有两个元素均为7,与集合元素的互异性矛盾,舍去.

综上所述,$B=\{0,7,3,1\}$

(3)$\complement_I M\subseteq I$,$\therefore -1\in I$,

$\therefore a^2-5=-1$得$a=\pm2$.

当$a=2$时,$M=\{2,4\}$,$M\cup\complement_I M=I$,符合要求.

当$a=-2$时,$M=\{2,8\}\not\subseteq I$,不合题意,舍去,故$a=2$为所求.

【点评】 **集合元素有三个性质:确定性、互异性和无序性,其中元素的互异性有着广泛的应用,若一个集合是以列举法给出的,则所给元素应是互异的,解决含待定系数的集合问题时,常常会引起讨论,因而要注意检验是否符合全部条件,合理取舍,谨防增解.**

◇变◇式◇训◇练◇

1. 已知向量集合$M=\{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a}=(1,2)+\lambda(3,4), \lambda\in\mathbf{R}\}$,$N=\{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a}=(-2,-2)+\lambda(4,5), \lambda\in\mathbf{R}\}$,则$M\cap N$

= (　　)

A. $\{(1,1)\}$　　B. $\{(1,1),(-2,-2)\}$

C. $\{(-2,-2)\}$　　D. $\varnothing$

2. 设集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求 a 的值.

题型二：元素与集合的关系

【例2】　设 S 为满足下列两个条件的实数所构成的集合：① S 内不含 1；② 若 $a\in S$，则 $\frac{1}{1-a}\in S$. 解答下列问题：

(1) 若 $2\in S$，则 S 中必有其他两个元素，求出这两个元素；

(2) 求证：若 $a\in S$，则 $1-\frac{1}{a}\in S$；

(3) 在集合 S 中元素的个数能否只有一个？请说明理由.

分析：反复利用题设，若 $a\in A$，且 $a\neq 1$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$，注意角色转换；单元素集是指集合中只有一个元素.

解：(1) $\because 2\in S$，$\therefore \frac{1}{1-2}\in S$，即 $-1\in S$，$\therefore \frac{1}{1-(-1)}\in S$，即 $\frac{1}{2}\in S$；

(2) 证明：$\because a\in S$，$\therefore \frac{1}{1-a}\in S$，

$\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=1-\frac{1}{a}\in S$；

(3) 集合 S 中不能只有一个元素，用反证法证明如下：

假设 S 中只有一个元素，则有 $a=\frac{1}{1-a}$，即 $a^2-a+1=0$，该方程没有实数解，$\therefore$ 集合 S 中不能只有一个元素.

【点评】　(3) 的证明使用了反证法，体现了“正难则反”的思维方法.

【例3】　(2006年辽宁卷) 设 $\oplus$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个运算，A 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，若对任意 $a,b\in A$ 有 $a\oplus b\in A$，则称 A 对运算 $\oplus$ 封闭，下列数集对加法、减法、乘法和除法（除数不等于零）四则运算都封闭的是 (　　)

A. 自然数集　　B. 整数集

C. 有理数集　　D. 无理数集

分析：A 中 $1-2=-1$ 不是自然数，即自然数集不满足条件；B 中 $1\div 2=0.5$ 不是整数，即整数集不满足条件；C 中有理数集满足条件；D 中 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ 不是无理数，即无理数集不满足条件，故选择答案 C.

【点评】　本题考查了阅读和理解能力，同时考查了做选择题的一般技巧排除法.

◇变◇式◇训◇练◇

3. 已知 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$，其中 $a\in\mathbf{R}$，如果集合 B 的元素都是集合 A 的元素，求实数 a 的取值范围.

4. 已知集合 $A=\{a\mid a=\frac{n}{2^m},m、n\in\mathbf{N}^*\}$，$b\in A$，$c\in A$，试证明 $b+c$ 与 bc 均属于 A.

5. 设集合 $A=\{f(x)\mid |f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|,|x_1|\leqslant 1,|x_2|\leqslant 1\}$，又 $g(x)=x^2+2x-1$，试判断 $g(x)$ 与 A 的关系.

题型三：判断（证明）集合与集合的关系

【例4】　设集合 $P=\{a\mid a=\sin^2\theta-2\sin\theta+2,\theta\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{b\mid$ 关于 x 的方程 $x^2+2(b+3)x+2(b^2+7)=0$ 有实根$\}$，则下述关系正确的是 (　　)

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $Q\subsetneqq P$

C. $P=Q$　　D. $P\subsetneqq Q$ 且 $Q\subsetneqq P$

分析：集合 P、Q 的结构比较复杂，必须准确理解 P、Q 中元素的数学意义，集合 P 的元素为 a，而 a 可以看作函数 $a=f(\theta)=\sin^2\theta-2\sin\theta+2(\theta\in\mathbf{R})$ 的值域；集合 Q 的元素为 b，而 b 是使得方程 $x^2+2(b+3)x+2(b^2+7)=0$ 有实数解的取值的集合.

通过求出 $f(\theta)$ 的值域和列方程有解的充要条件可以将 P、Q 都化简.

$\because a=(\sin\theta-1)^2+1$，而 $-1\leqslant\sin\theta\leqslant 1$，

$\therefore P=\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 5\}$；

$\because$ 一元二次方程有实数解的充要条件是：

$\Delta=4(b+3)^2-8(b^2+7)\geqslant 0\Rightarrow b^2-6b+5\leqslant 0$，$\therefore Q=\{x\mid 1\leqslant b\leqslant 5\}$；

$\therefore P=Q$，故答案为 C.

【点评】　正确理解每个集合的含意，首先是分析集合中的元素有什么特点，一个集合能化简（或求解）的一般应考虑将它化简（或求解），然后再分析集合间的关系，并正确使用各种符号.

【例5】　设集合 $M=\{x\mid x=n^2,n\in\mathbf{N}\}$，$T=\{x\mid x=4k$ 或 $x=4k+1,k\in\mathbf{N}\}$，求证：$M\subsetneqq T$.

分析：证明应分两个步骤：① 证明 M 的任何元素都属于 T；② 证明 T 中至少有一个元素不属于 M.

证明：任取 $a\in M$，$\therefore$ 存在 $n_0\in\mathbf{N}$，使得 $a=n_0^2$，

i) 若 n_0 为奇数，设 $n_0=2m+1(m\in\mathbf{N})$，

$\therefore a=4(m^2+m)+1$，

$\because m^2+m\in\mathbf{N}$，$\therefore a\in T$；

ii) 若 n_0 为偶数，设 $n_0=2m(m\in\mathbf{N})$，$\therefore a=4m^2$，

$\because m^2 \in \mathbf{N}, \therefore a \in T$;

综合i),ii) 知 $a \in T, \therefore M \subseteq T$,

$\because \begin{cases} 5 \in T \\ 5 \notin M \end{cases}, \therefore M \neq T$,由此得 $M \subsetneq T$.

【点评】 上面是一组关于集合的包含关系的问题,解答关键是正确理解问题中的集合以及子集的具体意义,理解得越准确越有利于问题的解决,然后才能正确选择解答问题的数学方法.

◇变◇式◇训◇练◇

6. 与角集 $M = \{\alpha = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$ 相等的集合是 ( )

A. $\left\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

B. $\left\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{或} \alpha = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

C. $\left\{\alpha \mid \alpha = k\pi - \frac{\pi}{4} \text{或} \alpha = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

D. $\left\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \text{或} \alpha = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

7. 设集合 $A = \{1,2\}, B = \{2,3\}, P = \{x \mid x \subsetneq A\}, Q = \{x \mid x \subsetneq B\}$,则 $P \cap Q =$ ( )

A. $\{2\}$　　B. $\{1,2,3\}$

C. $\{\{2\}\}$　　D. $\{\varnothing, \{2\}\}$

8. 设 $A = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}, B = \{x \mid x = 4k \pm 1, k \in \mathbf{Z}\}$,求证:$A = B$.

题型四:已知集合与集合的关系求参数值(范围)

【例6】 设 $A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant a\}, B = \{y \mid y = 2x + 3, x \in A\}, C = \{z \mid z = x^2, x \in A\}$,且 $C \subseteq B$.

求实数 a 的取值范围.

分析一:当 $-2 \leqslant x \leqslant a$ 时,$z = x^2$ 的范围与 a 的取值的正负以及 $|a|$ 与2的大小均有关系,因而先对 a 进行讨论,求得 C 后,再根据 $C \subseteq B$ 求 a 的取值范围.

解法一:$\because A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant a\}$,

$\therefore B = \{y \mid y = 2x + 3, x \in A\} = \{y \mid -1 \leqslant y \leqslant 2a + 3\}$

① 当 $-2 \leqslant a \leqslant 0$ 时,$C = \{z \mid a^2 \leqslant z \leqslant 4\} \because C \subseteq B$

$\therefore 4 \leqslant 2a + 3$,解之得 $a \geqslant \frac{1}{2}$,这与 $-2 \leqslant a \leqslant 0$ 矛盾

② 当 $0 < a \leqslant 2$ 时,$C = \{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 4\} \because C \subseteq B$

$\therefore 4 \leqslant 2a + 3$ 解之得 $a \geqslant \frac{1}{2}, \therefore \frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 2$

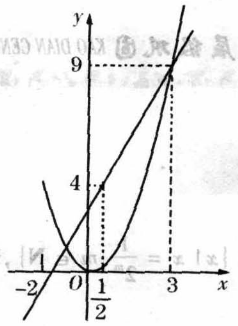
③ 当 $a > 2$ 时,$C = \{z \mid 0 \leqslant z \leqslant a^2\} \because C \subseteq B$

$\therefore a^2 \leqslant 2a + 3$ 解之得 $-1 \leqslant a \leqslant 3, \therefore 2 < a \leqslant 3$

综上所述:a 的取值范围是 $[\frac{1}{2}, 3]$.

分析二:作出函数的图像,数形结合求解.

解法二:如图,在同一坐标系内,作出函数的图像.



令 $2x + 3 = (-2)^2$,解之得:$x = \frac{1}{2}$,令 $2x + 3 = x^2 (x \geqslant -2)$ 解之得 $x = 3$,$\therefore a$ 的取值范围是 $[\frac{1}{2}, 3]$.

◇变◇式◇训◇练◇

9. 已知集合 $A = \{y \mid y^2 - (a^2 + a + 1)y + a(a^2 + 1) > 0\}, B = \left\{y \mid y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}, 0 \leqslant x \leqslant 3\right\}, A \cap B = \varnothing$,求实数 a 的取值范围.

考试误区警示 KAO SHI WU QU JING SHI

【例1】 已知 $f(x) = x^2$,集合 $A = \{x \mid f(x+1) = ax\}$,且 $A \cup \{x \mid x > 0\} = \{x \mid x > 0\}$,求实数 a 的范围.

错解:由 $f(x+1) = ax$ 和 $f(x) = x^2$ 可得 $x^2 + (2-a)x + 1 = 0$,又由 $A \cup \{x \mid x > 0\} = \{x \mid x > 0\}$ 得 $A \subseteq \{x \mid x > 0\}$ 即 $x > 0$,

则有 $x^2 + (2-a)x + 1 = 0$ 有正根,故有

$\begin{cases} \Delta = (2-a)^2 - 4 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 = a - 2 > 0, \Rightarrow a \geqslant 4 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $[4, +\infty)$.

错因:错解忽视了 $A = \varnothing$ 时的情况.

正解:(1) 当 $A \neq \varnothing$ 时,由错解知 $a \in [4, +\infty)$;

(2) 当 $A = \varnothing$ 时 $x^2 + (2-a)x + 1 = 0$ 无实数根,由 $\Delta = (2-a)^2 - 4 < 0 \Rightarrow 0 < a < 4$,综合(1)(2)可得 a 的取值范围是 $a > 0$.

考力整合升华 KAO LI ZHENG HE SHENG HUA

1. 解决集合问题,首先要弄清楚集合中的元素是什么;
2. 弄清集合中元素的本质属性,能化简的要化简;
3. 抓住集合中元素的3个性质,对互异性要注意检验;

4. 正确进行“集合语言”和普通“数学语言”的相互转化.

考点层级巩固 KAO DIAN CENG JI GONG GU

A组

1. 设集合 $A=\{x\mid x=\frac{1}{2^m},m\in\mathbf{N}\}$，若 $x_1\in A,x_2\in A$，则必有 ( )

A. $x_1+x_2\in A$　　B. $x_1x_2\in A$

C. $x_1-x_2\in A$　　D. $\frac{x_1}{x_2}\in A$

2. 函数 $y=\lg[x^2+(m-3)x+\frac{9}{4}]$ 的定义域为 A，值域为 B，集合 $M=\{m\mid 使A=\mathbf{R}\}$，$N=\{m\mid 使B=\mathbf{R}\}$，则有 ( )

A. $M\cap N=\varnothing$　　B. $M\supseteq N$

C. $M\subseteq N$　　D. $M\cup N=R$

3. 集合 $A=\{a\mid 使|x-4|+|3+x|<a 有实数解\}$，则 $A=$ ( )

A. $(-\infty,1)$　　B. $[1,+\infty)$

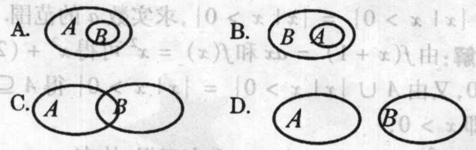
C. $(1,+\infty)$　　D. $(3,4)$

4. (2006辽宁卷) 设集合 $A=\{1,2\}$，则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是 ( )

A. 1　　B. 3

C. 4　　D. 8

5. 设集合 $A=\left\{x\mid x=\frac{n}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{x\mid x=n+\frac{1}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$，则下列图形中能表示 A 与 B 的关系的是 ( )



6. (2006上海卷) 已知集合 $A=\{-1,3,2m-1\}$，集合 $B=\{3,m^2\}$. 若 $B\subseteq A$，则实数 $m=$ ______.

7. 含有三个实数的集合可表示为 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$，又可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$，则 $a^{2003}-b^{2004}=$ ______.

8. 已知非空集合 $M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，且若 $a\in M$，则 $6-a\in M$，则集合 M 的个数为 ______.

9. 已知关于 x 的不等式 $\frac{ax-5}{x^2-a}<0$ 的解集为 M.

(1) 当 $a=4$ 时，求集合 M；

(2) 若 $3\in M$ 且 $5\notin M$，求实数 a 的取值范围.

10. 设 $a,b\in\mathbf{Z}$，$E=\{(x,y)\mid(x-a)^2+3b\leqslant 6y\}$，点 $(2,1)\in E$，但 $(1,0)\notin E$，$(3,2)\notin E$，求 a,b 的值.

B组

11. 设 $f(x)=x^2+px+q$，$p,q\in\mathbf{R}$，$M=\{x\mid x=f(x)\}$，$N=\{x\mid x=f(f(x))\}$.

(1) 证明：$M\subseteq N$；(2) 当 $M=\{1,3\}$ 时，求 N.

12. 设集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant a\}$，$P=\{y\mid y=x+1,x\in A\}$，$Q=\{y\mid y=x^2,x\in A\}$.

(1) 若 $Q\subseteq P$，求实数 a 的取值范围；

(2) 是否存在实数 a，使得 $P=Q$？并说明理由.

1.2　集合的运算

考纲要求概述 KAO GANG YAO QIU GAI SHU

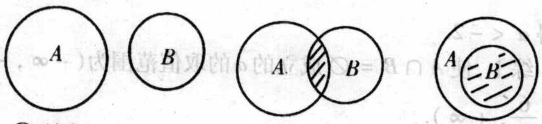
1. 理解交集、并集、全集、补集的概念，掌握集合的运算性质，能利用数轴或文氏图进行集合的运算，进一步掌握集合问题的常规处理方法.

2. 交集、并集、补集的求法，集合语言、集合思想的运用.

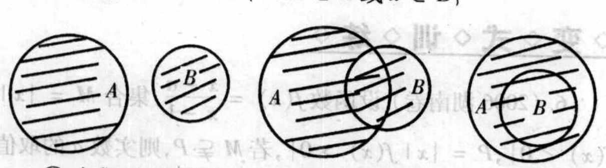
考点通透讲解 KAO DIAN TONG TOU JIANG JIE

1. 有关概念

① 交集：$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$

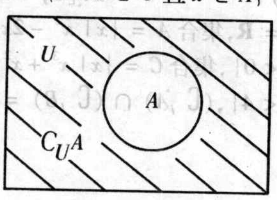


② 并集：$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}$



③ 全集：如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集，通常用 U 表示.

④ 补集：$C_U A = \{x \mid x \in U \text{且} x \in A\}$



2. 常用运算性质及一些重要结论

① $A \cap A = A$　　$A \cap \varnothing = \varnothing$　　$A \cap B = B \cap A$

② $A \cup A = A$　　$A \cup \varnothing = A$　　$A \cup B = B \cup A$

③ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$

④ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

⑤ $A \cap \complement_U A = \varnothing$　　$A \cup \complement_U A = U$

⑥ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$　　$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

⑦ $\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$

$\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$

⑧ $card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

考题立体评析 KAO TI LI TI PING XI

题型一：集合的简单运算

【例1】（2006 江苏卷）若 A、B、C 为三个集合，$A \cup B = B \cap C$，则一定有（　　）

A. $A \subseteq C$　　　B. $C \subseteq A$

C. $A \neq C$　　　D. $A = \varnothing$

分析：本题主要考查集合的并集与交集运算，集合之间关系的理解.

解：由题意知应选 A.

【点评】　对集合的子、交、并、补运算，以及集合之间的关系要牢固掌握. 本题考查三个抽象集合之间的关系，可以考虑借助于文氏图.

【例2】（2005 年春考·北京卷·理 15）

设函数 $f(x) = \lg(2x - 3)$ 的定义域为集合 M，函数 $g(x) = \sqrt{1 - \dfrac{2}{x-1}}$ 的定义域为集合 N. 求：

(1) 集合 M, N；

(2) 集合 $M \cap N, M \cup N$.

分析：本小题主要考查集合的基本知识，考查逻辑思维能力和运算能力.

解：(1) $M = \{x \mid 2x - 3 > 0\} = \{x \mid x > \dfrac{3}{2}\}$；

$N = \{x \mid 1 - \dfrac{2}{x-1} \geqslant 0\} = \{x \mid \dfrac{x-3}{x-1} \geqslant 0\} = \{x \mid x \geqslant 0 \text{或} x < 1\}$.

(2) $M \cap N = \{x \mid x > \dfrac{3}{2}\}$；

$M \cup N = \{x \mid x < 1 \text{或} x > \dfrac{3}{2}\}$.

◇变◇式◇训◇练◇

1. (2006 重庆卷) 已知集合 $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A = \{2,4,5,7\}$，$B = \{3,4,5\}$，则 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) =$（　　）

A. $\{1,6\}$　　　B. $\{4,5\}$

C. $\{1,2,3,4,5,7\}$　　　D. $\{1,2,3,6,7\}$

2. 集合 A、B 的并集 $A \cup B = \{a_1, a_2, a_3\}$，当 $A \neq B$ 时，(A,B) 与 (B,A) 视为不同的对，则这样的 (A,B) 对的个数有（　　）

A. 8　　B. 9　　C. 26　　D. 27

3. (1) $A = \{y \mid y = -x^2 + 3x - 2, x \in \mathbf{R}\}$，$B = \{y \mid y = x^2 - x, x \in \mathbf{R}\}$，求：$A \cap B$.

(2) $A = \{(x,y) \mid y = -x^2 + 3x - 2, x \in \mathbf{R}\}$，$B = \{(x, y) \mid y = x^2 - x, x \in \mathbf{R}\}$，求：$A \cap B$.

题型二：集合与方程

【例2】　设集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$，$B = \{x \mid x^2 + 2(a+1)x + (a^2 - 5) = 0\}$，

(1) 若 $A \cap B = \{2\}$，求实数 a 的值；

(2) 若 $A \cup B = A$，求实数 a 的取值范围；

(3) 若 $U = \mathbf{R}$，$A \cap \complement_U B = A$，求实数 a 的取值范围.

解：$\because A = \{1,2\}$，(1) $\because A \cap B = \{2\}$，$\therefore 2 \in B$，代入 B 中的方程，

得 $a^2+4a+3=0\Rightarrow a=-1$ 或 $a=-3$；

当 $a=-1$ 时，$B=\{x\mid x^2-4=0\}=\{-2,2\}$，满足条件；

当 $a=-3$ 时，$B=\{x\mid x^2-4x+4=0\}=\{2\}$，满足条件；

综上，a 的值为 -1 或 -3；

(2) 对于集合 B，$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-5)=4(2a+6)$

$\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$，

① 当 $\Delta<0$，即 $a<-3$ 时，$B=\varnothing$，满足条件；

② 当 $\Delta=0$，即 $a=-3$ 时，$B=\{2\}$，满足条件；

③ 当 $\Delta>0$，即 $a>-3$ 时，$B=A=\{1,2\}$，

由韦达定理得 $\begin{cases}1+2=-2(a+1)\\ 1\times 2=a^2-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{5}{2}\\ a^2=7\end{cases}$，矛盾；

综上，a 的取值范围是 $a\leqslant -3$；

(3) $\because A\cap \complement_U B=A$，$\therefore A\subseteq \complement_U B$，$\therefore A\cap B=\varnothing$；

① 若 $B=\varnothing$，则 $\Delta<0\Rightarrow a<-3$ 适合；

② 若 $B\neq\varnothing$，则 $a\leqslant -3$，此时 $1\notin B$ 且 $2\notin B$；

将 2 代入 B 的方程得 $a=-1$ 或 $a=-3$；

将 1 代入 B 的方程得 $a^2+2a-2=0\Rightarrow a=-1\pm\sqrt{3}$；

$\therefore a\neq -1$ 且 $a\neq -3$ 且 $a\neq -1\pm\sqrt{3}$；

综上，a 的取值范围是 $a<-3$ 或 $-3<a<-1-\sqrt{3}$ 或 $-1-\sqrt{3}<a<-1$ 或 $-1<a<-1+\sqrt{3}$ 或 $a>-1+\sqrt{3}$.

【点评】 由条件 $A\cup B=A$ 可得 $B\subseteq A$，同理当 $B\cap A=B$ 时也有 $B\subseteq A$ 的结论成立. 对于上述结论我们在复习时要加以重视. 另外，当 A 为有限集且 B 为 A 的子集时，我们首先应考虑 $B=\varnothing$ 这一情形，对于这种情形，在学习时往往容易疏忽.

◇变◇式◇训◇练◇

4. 设集合 $A=\{x\mid x^2-5x+4>0\}$，$B=\{x\mid x^2-2ax+(a+2)=0\}$，

若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

5. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2+ax-12=0\}$，$B=\{x\mid x^2+bx+b^2-28=0\}$，若 $A\cap\complement_U B=\{2\}$，求 a、b 的值.

题型三：集合与不等式

【例3】 (2006 全国Ⅱ卷) 设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=ax^2-2x-2a$. 若 $f(x)>0$ 的解集为 A，$B=\{x\mid 1<x<3\}$，$A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解： 由 $f(x)$ 为二次函数知 $a\neq 0$，

令 $f(x)=0$ 解得其两根为 $x_1=\dfrac{1}{a}-\sqrt{2+\dfrac{1}{a^2}}$，$x_2=\dfrac{1}{a}+\sqrt{2+\dfrac{1}{a^2}}$.

由此可知 $x_1<0$，$x_2>0$.

(i) 当 $a>0$ 时，$A=\{x\mid x<x_1\}\cup\{x\mid x>x_2\}$，

$A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2<3$，即 $\dfrac{1}{a}+\sqrt{2+\dfrac{1}{a^2}}<3$

解得 $a>\dfrac{6}{7}$.

(ii) 当 $a<0$ 时，$A=\{x\mid x_1<x<x_2\}$，

$A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2>1$，即 $\dfrac{1}{a}+\sqrt{2+\dfrac{1}{a^2}}>1$

解得 $a<-2$.

综上，使 $A\cap B=\varnothing$ 成立的 a 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup(\dfrac{6}{7},+\infty)$.

◇变◇式◇训◇练◇

6. (2006 湖南卷) 设函数 $f(x)=\dfrac{x-a}{x-1}$，集合 $M=\{x\mid f(x)<0\}$，$P=\{x\mid f(x)>0\}$，若 $M\subsetneqq P$，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(0,1)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

7. 设全集 $I=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-2x>0\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-ax-b<0\}$，集合 $C=\{x\mid x^3+x^2+x=0\}$ 且 $A\cap B=\{x\mid 2<x<4\}$，$(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=C$，求 a，b 的值.

题型四：有关集合元素个数问题

【例4】 (2006 湖北卷) 有限集合 S 中元素的个数记作 $\mathrm{card}(S)$，设 A，B 都为有限集合，给出下列命题：

① $A\cap B=\varnothing$ 的充要条件是 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$；

② $A\subseteq B$ 的必要条件是 $\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$；

③ $A\not\subseteq B$ 的充分条件是 $\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$；

④ $A=B$ 的充要条件是 $\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$.

其中真命题的序号是 (　　)

A. ③④　　B. ①②　　C. ①④　　D. ②③

解： ① $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow$ 集合 A 与集合 B 没有公共元素，正确.

② $A\subseteq B\Leftrightarrow$ 集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，正确.

③ $A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 集合 A 中至少有一个元素不是集合 B 中的元素，因此 A 中元素的个数有可能多于 B 中元素的个数，错误.

④ $A=B\Leftrightarrow$ 集合 A 中的元素与集合 B 中的元素完全相同，两个集合的元素个数相同，并不意味着它们的元素相同，错误，故选 B.

◇变◇式◇训◇练◇

8. 某班有学生60名，其中报名参加课外数学兴趣小组的有22人，报名参加课外英语兴趣小组的有36人，而这两个小组都没有报名参加的学生有10人，求同时报名参加这两个小组活动的学生人数和恰报名参加其中一个小组活动的学生人数.

9. 某校组织高一学生对所在市的居民中拥有电视机、电冰箱、组合音响的情况进行一次抽样调查，调查结果：3户特困户三种全无；至少有一种的：电视机1 090户，电冰箱747户，组合音响850户；至少有两种的：电视机、组合音响570户，组合音响、电冰箱420户，电视机、电冰箱520户，“三大件”都有的265户. 调查组的同学在统计上述数字时，发现没有记下被调查的居民总户数，你能避免重新调查而解决这个问题吗？

考试误区警示 KAO SHI WU QU JING SHI

【例1】 设全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|2a-1|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，求实数 a 的值.

错解：$\because \complement_U A=\{5\}$，$\therefore a\in U$ 且 $5\notin A$，$\therefore a^2+2a-3=5$，$\therefore a=2$ 或 $a=-4$.

错因：错误在于忽视了本题的隐含条件 $A\subseteq U$.

正解：(1) 应继续对 a 的值是否适合 $A\subseteq U$ 进行验证：

当 $a=2$ 时，$|2a-1|=|4-1|=3\neq 5$，此时 $A=\{2,3\}\subseteq U$.

当 $a=-4$ 时，$|2a-1|=|-8-1|=9\neq 5$，此时 $A=\{2,9\}$ 不满足 $A\subseteq U$.

$\therefore a$ 的值只能为2.

(2) 可按以下方法解答：$\because \complement_U A=\{5\}$，$A=\{|2a-1|,2\}$，$U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，

则有：$\begin{cases}|2a-1|=3,\\ a^2+2a-3=5,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}a=2\text{ 或 }a=-1\\ a=2\text{ 或 }a=-4\end{cases}$ $\therefore a=2$.

考力整合升华 KAO LI ZHENG HE SHENG HUA

1. 求交集、并集、补集，要充分发挥数轴或文氏图的作用.

2. 含参数的问题，要有讨论的意识，分类讨论时要防止在空集上出问题.

3. 集合的化简是实施运算的前提，等价转化常是顺利解题的关键.

考点层级巩固 KAO DIAN CENG JI GONG GU

A组

1. (2006安徽卷) 设集合 $A=\{x||x-2|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y|y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$ 等于 ( )

A. $\mathbf{R}$　B. $\{x|x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$　C. $\{0\}$　D. $\varnothing$

2. (2006天津卷) 设集合 $M=\{x|0<x\leqslant 3\}$，$N=\{x|0<x\leqslant 2\}$，那么“$a\in M$”是“$a\in \mathbf{N}$”的 ( )

A. 充分而不必要条件　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

3. (2006福建卷) 已知全集 $U=\mathbf{R}$，且 $A=\{x||x-1|>2\}$，$B=\{x|x^2-6x+8<0\}$，则 $(\complement_U A)\cap B$ 等于 ( )

A. $[-1,4]$　B. $(2,3)$　C. $(2,3]$　D. $(-1,4)$

4. (2005全国卷Ⅰ) 设 I 为全集，S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$，则下面论断正确的是 ( )

A. $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$

B. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

C. $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$

D. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

5. (2006辽宁卷) 设集合 $A=\{1,2\}$，则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是 ( )

A. 1　B. 3　C. 4　D. 8

6. (2006四川卷) 已知集合 $A=\{x|x^2-5x+6\leqslant 0\}$，集合 $B=\{x||2x-1|>3\}$，则集合 $A\cap B=$ ( )

A. $\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$　B. $\{x|2\leqslant x<3\}$

C. $\{x|2<x\leqslant 3\}$　D. $\{x|-1<x<3\}$

7. 已知 $x\in\mathbf{R}$，$y\in\mathbf{N}^*$，$A=\{y|y=x^2-4x+6\}$，$B=\{y|y=-x^2-2x+18\}$，求 $A\cap B$.

8. 设集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+2=0\}$，若 $A\cup B=A$，求 a 的值构成的集合.

9. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-x-6<0\}$，$B=\{x \mid 0<x-m<9\}$，

(1) 若 $A\cup B=B$，求实数 m 的取值范围；

(2) 若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

10. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-x-2>0\}$，$B=\{x \mid x^2+4x+p<0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

B 组

11. 设集合 $A=\{(x,y) \mid y^2=x+1\}$，$B=\{(x,y) \mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$，$C=\{(x,y) \mid y=kx+b\}$，问是否存在自然数 k,b，使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，说明理由.

12. 已知两个正整数集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2\}$，其中 $a_1<a_2<a_3<a_4$，若 $A\cap B=\{a_1,a_4\}$，且 $a_1+a_4=10$，且 $A\cup B$ 的所有元素之和是 124，求集合 A、B.

1.3　含绝对值的不等式的解法

考纲要求概述 KAO GANG YAO QIU GAI SHU

1. 掌握一些简单的含绝对值的不等式的解法.

2. 解含绝对值不等式的基本思想是去掉绝对值符号，将其等价转化为一元一次(二次)不等式(组)，难点是含绝对值不等式与其他内容的综合问题及求解过程中，集合间的交、并等各种运算.

考点通透讲解 KAO DIAN TONG TOU JIANG JIE

1. 绝对值的意义：(其几何意义是数轴的点 $A(a)$ 离开原点的距离 $|OA|=|a|$)

$$|a|=\begin{cases}a,(a>0)\\0,(a=0)\\-a,(a<0)\end{cases}$$

2. 含有绝对值不等式的解法：(解绝对值不等式的关键在于去掉绝对值的符号)

(1) 定义法；

(2) 零点分段法：通常适用于含有两个及两个以上的绝对值符号的不等式；

(3) 平方法：通常适用于两端均为非负实数时(比如 $|f(x)|<|g(x)|$)；

(4) 图像法或数形结合法；(如讨论 $|x^2-2x-1|=a$ 的解的个数)

(5) 不等式同解变形原理：即

$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$

$|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$

$|ax+b|<c(c>0)\Leftrightarrow -c<ax+b<c$

$|ax+b|>c(c>0)\Leftrightarrow ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$

$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$

$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)<-g(x)$ 或 $f(x)>g(x)$

$a<|f(x)|<b(b>a>0)\Leftrightarrow a<f(x)<b$ 或 $-b<f(x)<-a$

3. 不等式的解集都要用集合形式表示，不要使用不等式的形式.

考题立体评析 KAO TI LI TI PING XI

题型一：简单含绝对值不等式的解法

【例1】　解下列不等式：

(1) $4<|2x-3|\leqslant 7$；(2) $|x-2|<|x+1|$；

(3) $|2x+1|+|x-2|>4$.

解：(1) 原不等式可化为 $4<2x-3\leqslant 7$ 或 $-7\leqslant 2x-3<4$，∴ 原不等式解集为 $[-2,-\frac{1}{2})\cup(\frac{7}{2},5]$.

(2) 原不等式可化为 $(x-2)^2<(x+1)^2$，即 $x>\frac{1}{2}$，

∴ 原不等式解集为 $(\frac{1}{2},+\infty)$.

(3) 当$x \leqslant -\frac{1}{2}$时,原不等式可化为$-2x-1+2-x>4$,$\therefore x<-1$,此时$x<-1$;

当$-\frac{1}{2}<x<2$时,原不等式可化为$2x+1+2-x>4$,$\therefore x>1$,此时$1<x<2$;

当$x \geqslant 2$时,原不等式可化为$2x+1+x-2>4$,$\therefore x>\frac{5}{3}$,此时$x>\frac{5}{3}$.

综上可得:原不等式的解集为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

【点评】 灵活掌握和运用含绝对值不等式的基本解法,如何去掉绝对值是解题的关键,本例体现了几种去绝对值的方法.

◇变◇式◇训◇练◇

1. 解下列不等式:

(1) $|x^2-4x+2| \geqslant \frac{x}{2}$;(2) $||x+3|-|x-3||>3$.

(3) $|x^2-3|x|-3| \leqslant 1$.

2. 已知$A=\{x||x-1|<c,c>0\}$,$B=\{x||x-3|>4\}$,且$A\cap B=\varnothing$,求c的范围.

题型二:有关绝对不等式的证明及恒成立的问题

【例2】 (1) 对任意实数x,$|x+1|+|x+2|>a$恒成立,则a的取值范围是________;

(2) 对任意实数x,$|x-1|-|x+3|<a$恒成立,则a的取值范围是________.

解:(1) 可由绝对值的几何意义或$y=|x+1|+|x-2|$的图像或者绝对值不等式的性质得:

$|x+1|+|x-2|=|x+1|+|2-x| \geqslant |x+1+2-x|$ 得$|x+1|+|x-2| \geqslant 3$,$\therefore a<3$;

(2) 与(1)同理可得$|x-1|-|x+3| \leqslant 4$,$\therefore a>4$.

【例3】 已知$|a|<1$,$|b|<1$,求证:$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

证明:$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1 \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{(1+ab)^2}<1$

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2<1+2ab+a^2b^2$

$\Leftrightarrow 1-a^2-b^2+a^2b^2>0$

$\Leftrightarrow (1-a^2)(1-b^2)>0$,

由$|a|<1$,$|b|<1$,可知$(1-a^2)(1-b^2)>0$成立,

所以$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

【点评】 这道题的证明过程中,用了$|x|<a(a>0) \Leftrightarrow x^2<a^2$这一结论.

◇变◇式◇训◇练◇

3. 求使不等式$|x-4|+|x-3|<a$有解的a的取值范围.

4. 已知$f(x)=\sqrt{1+x^2}$,当$a \neq b$时,求证:$|f(a)-f(b)|<|a-b|$.

题型三:含参数的绝对值不等式的解法

【例3】 设$a>0$,$b>0$,解关于x的不等式:$|ax-2| \geqslant bx$.

解:原不等式可化为$ax-2 \geqslant bx$或$ax-2 \leqslant -bx$,即$(a-b)x \geqslant 2$①或$(a+b)x \leqslant 2 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{2}{a+b}$②,

当$a>b>0$时,由①得$x>\frac{2}{a-b}$,$\therefore$ 此时,原不等式解为:$x \geqslant \frac{2}{a-b}$或$x \leqslant \frac{2}{a+b}$;

当$a=b>0$时,由①得$x\in\varnothing$,$\therefore$ 此时,原不等式解为:$x \leqslant \frac{2}{a+b}$;

当$0<a<b$时,由①得$x \leqslant \frac{2}{a-b}$,$\therefore$ 此时,原不等式解为:$x \leqslant \frac{2}{a+b}$.

综上可得,当$a>b>0$时,原不等式解集为$\left(-\infty,\frac{2}{a+b}\right]\cup\left[\frac{2}{a-b},+\infty\right)$,

当$0<a \leqslant b$时,原不等式解集为$\left(-\infty,\frac{2}{a+b}\right]$.

◇变◇式◇训◇练◇

5. 已知$A=\{x||2x-3|<a\}$,$B=\{x||x_1| \leqslant 10\}$,且$A \subsetneqq B$,求实数$a$的取值范围.

6. 设 $a>0$,不等式 $|ax+b|<c$ 的解集为 $\{x|-2<x<1\}$,求 $a:b:c$.

7. 数轴上有三个点 A、B、C,坐标分别为 $-1,2,5$,在数轴上找一点 M,使它到 A、B、C 三点的距离之和最小.

考试误区警示 KAO SHI WU QU JING SHI

【例1】 设 $x,y\in\mathbf{R}$ 则使 $|x|+|y|>1$ 成立的充分不必要条件是 ( )

A. $|x+y|\geqslant 1$ B. $|x|>\frac{1}{2}$ 或 $|y|>\frac{1}{2}$

C. $x\geqslant 1$ D. $x<-1$

错解:选B,对充分不必要条件的概念理解不清,"或"与"且"概念不清,正确答案为D.

考力整合升华 KAO LI ZHENG HE SHENG HUA

1. 解关于绝对值的不等式,关键是理解绝对值的意义,掌握其基本类型.

2. 解绝对值不等式有时要利用数形结合,利用绝对值的几何意义,结合数轴解决.

考点层级巩固 KAO DIAN CENG JI GONG GU

A组

1. 不等式 $\left|\frac{ax-1}{x}\right|>a(a>0)$ 的解集是 ( )

A. $\{x|x>\frac{1}{a}\}$ B. $\{x|x<\frac{1}{2a}\}$

C. $\{x|\frac{1}{2a}<x<\frac{1}{a}\}$ D. $\{x|x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{2a}\}$

2. 设 $|x-2|<a$ 时不等式 $|x^2-4|<1$ 成立,则正数 a 的取值范围是 ( )

A. $a>\sqrt{5}-2$ B. $0<a\leqslant\sqrt{5}-2$

C. $a\geqslant\sqrt{5}-2$ D. 以上均不正确

3. 命题 P:若 $a,b\in\mathbf{R}$,则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充分而不必要条件;命题 Q:函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$,则 ( )

A. "P 或 Q" 为假 B. "P 且 Q" 为真

C. P 真 Q 假 D. P 假 Q 真

4. 不等式 $(2x-1)(1-|x|)<0$ 成立的充要条件为 ( )

A. $x>1$ 或 $x<\frac{1}{2}$ B. $x>1$ 或 $-1<x<\frac{1}{2}$

C. $-1<x<\frac{1}{2}$ D. $x<-1$ 或 $x>\frac{1}{2}$

5. 当 $x\in(\frac{1}{10},10)$ 时,$|\log_a x|<1$ 恒成立,则 a 的取值范围是 ( )

A. $a\geqslant 10$ B. $0<a\leqslant\frac{1}{10}$ 或 $a\geqslant 10$

C. $0<a\leqslant\frac{1}{10}$ D. $\frac{1}{10}\leqslant a<1$ 或 $0<a\leqslant 10$

6. 已知 $f(x)=3x+1(x\in\mathbf{R})$,若 $|f(x)-4|<a$ 的充分条件是 $|x-1|<b(a,b>0)$,则 a,b 之间的关系是________.

7. 不等式 $|\sqrt{3x-2}-3|>3$ 的解集是________.

8. 解不等式 $3|2-\log_2 x|-|3+2\log_{\frac{1}{4}}x|<1$.

9. 关于 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ 的解集分别为 A 与 B. 如果 $A\cup B=B$,求实数 a 的取值范围.

10. 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $|f(1)|\leqslant 1$, $|f(0)|\leqslant 1$, $|f(-1)|\leqslant 1$,求证:$|x|\leqslant 1$ 时,有 $|f(x)|\geqslant\frac{5}{4}$.