

# 固体力学基础

李同林 编

中国地质大学出版社

# 序 言

本书是根据地质类专业(地质专业、工程地质专业、地质力学专业等)开设固体力学课程(60—80学时)的教学需要而编写的。教材内容是以编者开设固体力学课程的讲稿为基础,参考和吸取有关教材的有益之处,结合教学实践的经验 and 体会编写而成的。这次教材的正式出版,是在内部教材经五届地质类专业本科和地球科学班(双学位)本科的教学使用,并广泛征求教师与学生的意见基础上进行了修订。

考虑到地质类专业的实际教学情况,在内容的编排上,尽量保持力学理论的系统性,由浅入深。本书首先从静力学部分开始,在这个基础上进入固体力学基础部分的学习,目的是使地质类专业学生能较好地掌握为分析研究地质构造形迹、地壳运动、岩石和岩体的力学特性、岩土边坡的稳定等所必需的固体力学基础部分的基本概念、最基础理论以及固体力学分析与解决问题的基本思路、方法和有关的一些基础知识。

本教材分两大部分共十二章编写。第一章到第四章为静力学部分,主要是研究物体受力作用平衡时,作用力所应满足的条件——平衡条件,同时也研究力的基本性质、力系的简化规律和滑动摩擦等问题。目的是为固体力学部分的学习打基础。

第五章以后为固体力学基础部分,是讲授的重点内容。第五章较详细地介绍了固体力学的一些基本概念,第六、七、八、九四章,分章讨论了固体四种基本变形的内力、应力和变形的分布与变化规律,着重突出了固体力学分析与解决问题的基本思路与方法。考虑到理论分析与实验结果在固体力学的研究中具有同等的重要性,因而在§6.5中以较大的篇幅讨论了固体材料的力学性质。

应力和应变、应力状态和应变状态等概念是固体力学中最基本最重要的概念,为使学生易于接受和理解这些较抽象的概念,本书采取循序渐近,反复讨论,不断巩固与加深的叙述方法,在内容的编排上也采取一些新的尝试,以期收到良好的教学效果。

本书内容在讲清基本理论的同时,注意加强与专业知识的联系、结合和应用,以求理论联系实际,学以致用。教材除在有关章节中适当地联系一些实际地质构造现象和工程实例进行简单地力学机理分析外,还着重介绍了莫尔强度理论、库伦-纳维叶剪断准则及其在工程中地质上的应用。当然,这样做的目的,仅在于帮助阐明一些力学概念和基础理论在工程和地质中的应用,提高地质工作者的力学素养,打好力学基础。

书中带星号的章节适当地扩大了内容的深度和广度,教师可根据不同的教学对象和实际的教学情况进行取舍。

鉴于初学者常易产生的概念性错误,为了巩固各章所学内容,每章末均设置了一定数量的思考题。为满足教学需求,另编写有与本教材教学配套使用的《固体力学基础习题集》以备选用。

为了配合材料力学试验和加强学生动手能力的训练,书末编入了附录:电测应力分析的基本原理和液压摆式万能材料试验机简介。

本书的编写,得到了中国地质大学力学教研室黄作宾教授和殷绥斌教授的热情支持、鼓励和指导。并由黄作宾教授和殷绥斌教授审阅了全文,提出了许多宝贵的修改意见;长春地

质学院王士升教授和成都地质学院陈津民副教授对本书的修订和出版也给予了指导和支持。有关的教师也提出一些很好的意见。在此一并深表谢意。

限于编者水平，书中一定还存在有错误或不妥之处，衷心地希望使用本书的教师和同学们，以及其他读者批评指正。

编者

1993年3月10日

# 字 符 表

字符	意 义	国际制单位	字 符	意 义	国际制单位
$p$	全应力	Pa	$\psi$	截面收缩率	无量纲
$\sigma$	正应力	Pa	$\varphi$	内摩擦角	rad
$\sigma_{max}$	最大正应力	Pa		扭转角	rad
$\sigma_{min}$	最小正应力	Pa	$f$	摩擦系数	无量纲
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	主应力	Pa	$n$	强度工作安全系数	无量纲
$[\sigma]$	许用正应力	Pa	$\theta$	体积应变	无量纲
$\sigma_m$	平均正应力	Pa		单位长度扭转角、 转角	$^{\circ}/m$ rad
$\sigma_p$	比例极限应力	Pa	$\gamma$	挠度	cm
$\sigma_e$	弹性极限应力	Pa	$P$	集中载荷、外力	N
$\sigma_s$	屈服极限应力	Pa	$P_{cr}$	压杆临界载荷	N
$\sigma_b$	强度极限应力	Pa	$R_A, R_B$	约束反力	N
$\sigma_c$	极限正应力	Pa	$N$	法向反力	N
$\sigma_k$	抗拉强度极限	Pa		轴力	N
$\sigma_w$	抗压强度极限	Pa	$Q$	剪力	N
$\sigma_{cr}$	临界应力	Pa		扭矩	N·m
$\tau$	剪应力	Pa	$M_k$	弯矩	N·m
$\tau_{max}$	最大剪应力	Pa	$M$	分布载荷集度	N/m
$\tau_{min}$	最小剪应力	Pa	$q$	形心坐标	cm
$U$	弹性变形能	J	$x_1, y_1, z_1$	半径	cm
$u$	弹性变形比能	J/m <sup>3</sup>	$r, R$	曲率半径	cm
$u_v$	体积改变比能	J/m <sup>3</sup>	$\rho$	直径	cm
$u_d$	形状改变比能	J/m <sup>3</sup>	$d, D$	截面宽度	cm
$K$	纯剪切时的抗剪强度	Pa	$b$	截面高度	cm
$K_0$	$\sigma_n=0$ 时的抗剪强度 或称粘聚力	Pa	$h$	厚度	cm
$[\tau]$	许用剪应力	Pa	$l$	杆件长度	cm
$\tau_s$	剪切屈服极限应力	Pa	$L$	面积	cm <sup>2</sup>
$\tau_b$	剪切强度极限应力	Pa	$A$	体积	cm <sup>3</sup>
$\tau_k$	极限剪应力	Pa	$V$	位移	cm
$\epsilon$	线应变或正应变	无量纲	$\Delta l$	惯性半径	cm
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	主应变	无量纲	$i_x, i_y, i_z$	抗弯截面模量	cm <sup>3</sup>
$\gamma$	剪应变或角应变、容重	rad/m <sup>3</sup>	$W_x, W_y, W_z$	极惯性矩	cm <sup>4</sup>
$E$	弹性模量	Pa	$J_p$	一次矩或静矩	cm <sup>4</sup>
$G$	剪切弹性模量	Pa	$S_x, S_y, S_z$	二次矩或惯性矩	cm <sup>4</sup>
$\nu$	泊桑比	无量纲	$J_x, J_y, J_z$	温度	$^{\circ}C$
$\delta$	延伸率	无量纲	$T, t$		

# 目 录

字符表 .....	VI
-----------	----

## 上 篇 静力学

第一章 静力学的基本概念和公理 .....	1
§ 1. 1 静力学的任务 .....	1
§ 1. 2 力的概念及其分类 .....	2
§ 1. 3 静力学公理 .....	3
§ 1. 4 约束·约束反力 .....	5
§ 1. 5 物体的受力分析·受力图·力系的分类 .....	7
思考题 .....	9
第二章 平面力系 .....	10
§ 2. 1 平面汇交力系的合成及其平衡条件 .....	10
§ 2. 2 力对点之距 .....	15
§ 2. 3 平面力偶系的合成及其平衡条件 .....	15
§ 2. 4 平面一般力系的简化及其平衡条件 .....	18
§ 2. 5 物体系的平衡·静定与静不定问题 .....	25
思考题 .....	28
第三章 摩擦 .....	30
§ 3. 1 摩擦现象 .....	30
§ 3. 2 滑动摩擦 .....	30
§ 3. 3 考虑摩擦时的平衡问题举例 .....	32
思考题 .....	34
第四章 空间力系·重心 .....	36
§ 4. 1 力在空间坐标轴上的投影 .....	36
§ 4. 2 力对轴之矩 .....	36
§ 4. 3 空间力系的平衡方程 .....	38
§ 4. 4 重心的概念 .....	39
§ 4. 5 重心坐标公式 .....	39
§ 4. 6 物体重心的求法 .....	41
思考题 .....	43

## 下 篇 固体力学基础

第五章 固体力学的基本概念 .....	44
§ 5.1 绪言 .....	44
§ 5.2 变形固体及其基本假设·小变形条件 .....	45
§ 5.3 外力及其分类 .....	46
§ 5.4 内力·截面法·应力的概念 .....	47
§ 5.5 位移与应变的概念 .....	49
思考题 .....	51
第六章 轴向拉伸与压缩 .....	52
§ 6.1 拉伸与压缩的概念 .....	52
§ 6.2 拉伸(压缩)时横截面上的内力与应力 .....	52
§ 6.3 拉伸(压缩)时的变形 .....	56
§ 6.4 单向拉伸(压缩)应力状态斜截面上的应力 .....	60
§ 6.5 拉伸(压缩)时固体材料的力学性质 .....	61
§ 6.6 拉伸(压缩)时的强度条件 .....	70
§ 6.7 拉伸(压缩)静不定问题 .....	71
思考题 .....	74
第七章 剪切 .....	75
§ 7.1 剪切变形·剪力·剪应力 .....	75
§ 7.2 纯剪切应力状态斜截面上的应力 .....	76
§ 7.3 剪切虎克定律 .....	77
§ 7.4 地质体中的剪切变形现象 .....	77
思考题 .....	79
第八章 扭转 .....	80
§ 8.1 扭转变形的概念 .....	80
§ 8.2 无限大弹性平板的扭转 .....	80
§ 8.3 圆柱体的扭转 .....	82
§ 8.4* 矩形截面柱体扭转的概念 .....	88
思考题 .....	89
第九章 弯曲 .....	90
§ 9.1 弯曲变形的概念 .....	90
§ 9.2 梁横截面上的内力——剪力与弯矩 .....	91
§ 9.3 剪力方程与弯矩方程·剪力图与弯矩图 .....	94
§ 9.4* 载荷集度 $q$ 、剪力 $Q$ 、弯矩 $M$ 间的微分关系 .....	97
§ 9.5 梁纯弯曲时横截面上的正应力 .....	99

§ 9. 6	矩形截面梁横截面上的剪应力	103
§ 9. 7	梁的强度条件及有关分析	104
§ 9. 8	弯曲变形	107
§ 9. 9*	多层梁的弯曲	114
	思考题	117
<b>第十章</b>	<b>应力与应变分析</b>	<b>118</b>
§ 10. 1	应力状态的概念	118
§ 10. 2	平面应力状态	119
§ 10. 3*	空间应力状态简介	127
§ 10. 4	平面应变状态	133
§ 10. 5*	从平面一点三个方向线应变的测量结果求主应变和主方向	136
§ 10. 6	广义虎克定律	138
§ 10. 7	单元体的弹性变形能	142
§ 10. 8*	弹性常数 $E$ 、 $G$ 、 $\nu$ 间的关系	143
	思考题	144
<b>第十一章</b>	<b>强度理论</b>	<b>145</b>
§ 11. 1	材料的破坏形式	145
§ 11. 2	强度理论的概念	146
§ 11. 3	古典强度理论简介	147
§ 11. 4	莫尔强度理论	150
§ 11. 5	库伦-纳维叶剪断裂准则及其应用	153
	思考题	157
<b>第十二章</b>	<b>屈曲</b>	<b>158</b>
§ 12. 1	稳定的平衡和不稳定的平衡	158
§ 12. 2	细长压杆的临界力——欧拉公式	160
§ 12. 3	临界应力·欧拉公式的适用范围	163
§ 12. 4*	两端铰支杆的纵横弯曲	164
§ 12. 5*	关于岩层褶皱问题的简单讨论	165
	思考题	167
<b>附录 I</b>	<b>电测应力分析的基本原理</b>	<b>168</b>
<b>附录 II</b>	<b>油压摆式万能材料试验机简介</b>	<b>175</b>
<b>附录 III</b>	<b>国际制词冠表·单位换算表</b>	<b>177</b>
	参考书目	178

# 上篇 静 力 学

## 第一章 静力学的基本概念和公理

### § 1.1 静力学的任务

力学是一门研究物质机械运动的科学。

自然界的一切物质都在不停地运动着、变化着，绝对不动的物质是不存在的。运动是物质存在的形式，是物质的固有属性，它包括宇宙中发生的一切现象和过程——从简单的位置变化直到人的思维活动。机械运动则是所有运动形式中最简单、最基本的一种。所谓机械运动，指的是物体在空间的位置或其各部分之间在空间的相对位置随时间的变动。它是人们日常生活和生产实践中最常见到的一种运动。

平衡是机械运动中的一种特殊情况。在一般工程问题中，所谓物体的平衡，指的是物体相对于地面保持静止或作匀速直线运动的状态。无疑，在宇宙中没有绝对的平衡，一切平衡状态都只是相对的和暂时的。

在自然界或工程中，任何物体受到力的作用都要发生运动状态的改变或产生变形。但在许多情形中，当研究物体的平衡或运动时，物体本身的变形，相对于所研究问题的范围或尺度要小得多，这些相对微小的变形就可以略去不计，而视其为不变形的物体。因为，这样做并不会影响所研究问题的精度，相反可使问题的研究大为简化，突出主要矛盾。例如，地球因自转在离心力的作用下而变形成椭球体，但它的变形尺度相对其运动轨迹来说是非常小的。所以，当人们研究行星的运行规律时，完全可将行星看作是一个不变形的物体来进行研究。通常人们就将这种不变形的物体称为刚体。所谓刚体，指的是在外力作用下，其内部任意两点间的距离始终保持不变的物体。显然，刚体客观上是不存在的，它是人们经理想化、抽象化后建立起来的一个力学模型。

静力学是研究物体在力系作用下的平衡问题的科学。静力学中，所研究的物体只限于刚体，所以又称刚体静力学，它是研究变形体力学的基础。

作用在物体上的一群力，称为力系。若物体在力系作用下处于平衡状态，则该力系必须满足一定的条件。作用于物体上使物体处于平衡状态的力系称为平衡力系；平衡力系应满足的条件称为平衡条件。在研究物体的运动或平衡问题时，需要将复杂的力系进行简化。所谓简化就是将作用于物体上的力系替换成为一个与之等效的比较简单力系。如果两个力系对物体的作用效应相同，则它们互为等效力系。显然，将一个复杂的力系进行简化，就更易于了解该力系对物体的总的的作用效应，进而可探求力系的平衡条件。



综上所述、静力学研究的基本问题为：

- (1) 力系的简化；
- (2) 力系的平衡条件及其应用。

## § 1.2 力的概念及其分类

### 一、力的概念

力的概念是人们在生活和生产实践中，通过长期的观察和分析而形成的。例如，当人们抬物体时，从肌肉的紧张收缩中，感受到了物体对人施加的作用，同时也体察到了人对物体施加的作用。进一步的观察发现，物体与物体之间也有这样的相互作用。这种作用就是力。通过大量的生产实践和科学实验，人们从感性到理性，逐步建立起力的概念：力是物体间相互的机械作用，这种作用使物体的机械运动状态发生变化，或使物体产生变形。又如，自高空自由下落的物体，受地球引力的作用，速度越来越大；挑担时扁担受力作用而产生弯曲；在地壳中，岩体与岩体相互作用，产生了各种类型的地质构造等等。

自然界中有各种各样的力。如水压力、土压力、摩擦力、万有引力等等，它们的物理本质各不相同，但在力学中，将不探究力的物理本质，而只研究力对于物体产生的效应。力对物体的效应表现在物体运动状态的改变和变形。我们把力使物体整体的运动状态发生变化的效应称为外效应，而把力使物体产生变形的效应称为内效应。事实上，变形也是物体内各部分之间运动状态变化的结果，但因其具有特殊性，故与通常所说的运动状态的变化区分开来。显然，静力学只研究力的外效应，而变形体力学将着重研究力的内效应。

力对物体的效应取决于以下三个要素：①力的作用点；②力的方向；③力的大小。当这三个要素中的任何一个改变时，力的作用效应也就不同。力的三要素可用有向线段来表示。通过力的作用点  $A$  沿着力的方向引出（或指向）的直线，称为力的作用线，它表示力的方位。在作用线上截取有向线段  $AB$ ，线段的始端（或末端）表示力的作用点。在线段末端所画的箭头应符合力的指向。线段的长度按一定比例尺代表力的大小，如图 1-1 所示。力是有大小和方向的量，而且力的相加服从矢量加法规则（参见 § 1.3），因此力是矢量。在本书静力学部分，力矢一律用黑斜体字母（如  $F$ ）来标记。力矢的大小称为它的模，矢量的模用对应的斜体字母（如  $F$ ）来表示。

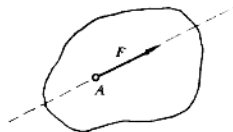


图 1-1

量度力的大小的单位，将随采用的单位制而不同。本书采用国际单位制（SI）。力的国际制单位是牛顿（N）。目前工程实际中也常采用工程单位制，其力的单位为公斤力（kgf）。两者的换算关系为：

$$1\text{kgf} = 9.80665\text{N}$$

### 二、力的分类

力按其分布规律，一般可分为体积力和表面力两种。

#### 1. 体积力

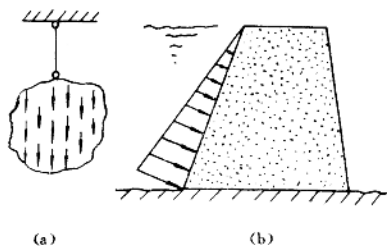


图 1-2

体积力是指分布在物体整个体积内的力，它作用在物体内所有各点。如物体的自重 [见图 1-2 (a) 所示] 以及运动物体的惯性力、离心力等。体积力的单位是  $\text{N}/\text{m}^3$ 。

## 2. 表面力

表面力是指分布在物体表面上的力，又可分为分布力和集中力。

连续作用于物体表面面积上的力即为分布力。例如桥面上等厚度的积雪就形成均匀分布力；而水坝所受静水压力与水深成正比，就形成非均匀分布力，如图 1-2 (b) 所示。分布力的单位是  $\text{N}/\text{m}^2$ 。有些作用于杆件上的体积力或表面力，还可简化为沿着杆件轴线作用的线分布力，其单位长度上的大小称为线分布力集度，单位是  $\text{N}/\text{m}$ 。

若分布力作用的面积远小于物体的表面尺寸，或沿杆件轴线的分布范围远小于轴线长度，就可将其近似地、抽象地看作是作用于一点处的集中力。例如，火车车轮对钢轨的压力等。集中力的单位是  $\text{N}$ 。事实上，任何物体受力后都会产生变形，受力处必定是一块面积，所以力不可能通过一个点来传递，但当采用的这种简化所引起的误差很小时，或将可变形的物体抽象为刚体，且能满足我们所研究问题的要求时，就可以使用集中力这一抽象的概念。

## § 1.3 静力学公理

人们通过长期的观察和实验，根据大量的客观事实，对力的基本性质进行了概括和总结，得出了静力学公理。这些公理是静力学的根本规律，它们构成了静力学理论的基础。

**公理一（二力平衡公理）** 作用于刚体上的两个力，使刚体处于平衡的必要与充分条件是：此两力大小相等、指向相反且沿同一作用线。如图 1-3 所示。

公理一揭示了作用于刚体上的最简单力系的平衡条件。它是推证平衡条件的基础。必须注意，这里说的是刚体的平衡；对于变形体来说，以上所述只是必要条件而非充分条件。例如，一根绳索受两个等值、反向、共线的拉力作用时处于平衡状态；但如改为受相同条件的一对压力作用时则不能平衡。

只受两个力作用而处于平衡的物体称为二力体（或二力杆）。这种情形在工程实际中经常遇到。根据公理一，可确定这两个力的方位：必定沿着两力作用点的连线。例如，矿井巷道支护的三铰拱，如图 1-4 所示，当 BC 杆不计自重时，即为二力杆。

**公理二（加减平衡力系公理）** 在作用于刚体上的已知力系中加上或减去任一平衡力系，并不改变原力系对刚体的作用效应。也就是说，只相差一个平衡力系的两个力系，作

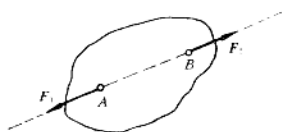


图 1-3

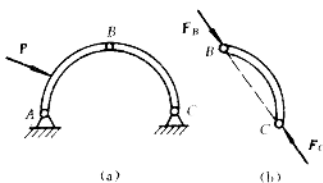


图 1-4

用效应相同，可以互相替换。必须注意，此公理只适用于刚体而不适用于变形体。由公理一和公理二可导出如下重要推论：

**推论（力的可传性原理）** 作用于刚体上的力可沿其作用线移至刚体的任一点，而不改变此力对刚体的作用效应。

事实上，力的这个重要性质是人们所熟知的。例如，人在车后推车与在车前拉车，效果是一样的，如图 1-5 所示。因此，对于刚体来说，以作用线代之力的三要素之一的作用点，在这种情况下，力矢可沿其作用线任意滑移，成为滑移矢量。

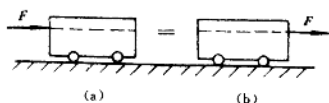


图 1-5

必须注意，力的可传性原理只适用于刚体而不适用于变形体。例如，一直杆的两端受到一对为  $F_1$ 、 $F_2$  的力作用而处于平衡，如图 1-6 (a) 所示。现将这两个力沿其作用线分别滑移到杆的另一端，如图 1-6 (b) 所示。显然，杆件仍处于平衡，即为  $F_1$ 、 $F_2$  对杆的外效应没有变。但是，经过力矢的滑移，力  $F_1$ 、 $F_2$  对杆的内效应却变得性质截然相反：直杆由产生拉

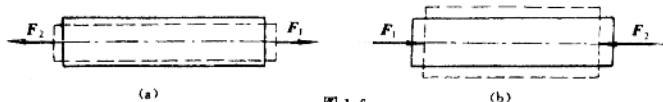


图 1-6

伸变形变为压缩变形。因此，在考虑物体的变形时，力矢不得离开其作用点，而应看成为固定矢量。

**公理三（力的平行四边形法则）** 作用于物体上同一点的两个力可合成为一个力，此合力也作用于该点，合力的大小和方向由以原两力矢为邻边所构成的平行四边形的对角线来表示。如图 1-7 (a) 所示。或者说，合力矢  $R$  等于两分力矢  $F_1$ 、 $F_2$  的几何和，即： $R = F_1 + F_2$ 。

为了方便，有时我们不用平行四边形法则而用力的三角形法则求合力的大小和方向。如图 1-7 (b) 所示，在物体外任取一点  $A$ ，作矢  $\overline{AB}$  代表力  $F_1$ ，再从  $F_1$  的终点  $B$  作矢  $\overline{BC}$  代表力  $F_2$ ，最后从  $F_1$  的起点  $A$  向  $F_2$  的终点  $C$  作矢  $\overline{AC}$ ，则  $\overline{AC}$  即为合力矢  $R$ 。但应注意，力三角形

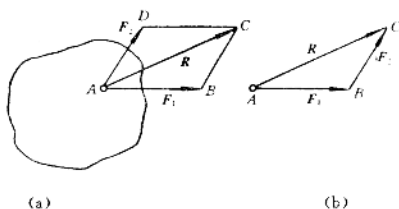


图 1-7

只表明了力的大小和方向，而没有表明力的作用点或作用线。应用力三角形法则求解力的大小和方向时，可利用数学中的三角公式。

平行四边形法则既是力合成的法则，也是力分解的法则。例如，沿斜面下滑的物体（如图 1-8 所示），有时就把重力  $P$  分解为两个分力  $F$  和  $N$ ，与斜面平行的力  $F$  使物体沿斜面下滑，与斜面相垂直的力  $N$  使物体下滑时紧贴斜面。

**推论（三力平衡汇交定理）** 若刚体在三个力的作用下处于平衡状态时，且此三力作用线必位于同一平面内，当其中二力相交于一点时，则第三个力的作用线必通过同一点。该定理可由公理三和公理一证得，请读者试证之。

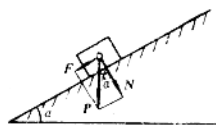


图 1-8

**公理四（作用与反作用定律）** 作用力与反作用力总是同时存在，二力的大小相等，方向相反，沿着同一直线分别作用在两个相互作用的物体上。

公理四指出，力总是成对出现的。甲物体给乙物体一作用力时，乙物体必给甲物体一反作用力，且两者等值、反向、共线。必须明确，作用力和反作用力并非作用于同一物体上，而是分别作用于不同的两物体上。因此，不能把作用力和反作用力看成是作用于同一物体上的一对平衡力。在分析若干个物体所组成的系统的受力时，借助公理四，可从一个物体的受力分析过渡到相邻的物体的受力分析。

公理三和公理四的适用范围不限于刚体，它们对变形体也是成立的。

## § 1.4 约束·约束反作用力

在空间运动不受任何限制的物体，称为自由体。例如，飞行中的飞机、射出的炮弹等。如果物体在空间的运动受到了其他物体的限制，因而不能沿某些方向运动时，这类物体就称为非自由体，起限制作用的物体就称为约束。例如，悬挂着重物、机车、电动机的转子、某一岩体等物体都是非自由体，而钢索对于重物、钢轨对于机车、轴承对于电机转子、周围的岩体对于该岩体等等都是约束。既然约束能限制物体的运动，也就能改变物体的运动状态。所以，约束对物体的作用实质上就是力，这种力称为约束反作用力，常简称为约束反力或反力。显然，约束反力的作用点应在被约束物体与约束相接触处，其方向总是与约束所能限制的运动方向相反。这是我们确定约束反力作用点和指向的准则。约束反力的大小则需利用力系的

平衡条件来求得。

能使物体运动或有运动趋势的力，称为主动力（或载荷）。图 1-9、图 1-10 中所示重力  $P$  就是物体所受的主动力。通常，约束反力是由主动力的作用所引起的。所以，约束反力也称为被动力。

下面介绍几种工程中常见的约束类型，并分析其约束反力的特点。

### 1. 柔软体约束

用柔软物体（如钢丝绳、链条、皮带等）所造成的约束称为柔软体约束。这种约束只能限制物体沿柔软体伸长方向的运动。因此，柔软体的约束反力的方向一定沿着柔软体的中心线，且只能是拉力。图 1-9 所示为绳索对重球的约束。

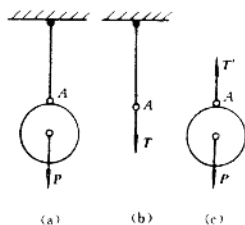


图 1-9

### 2. 光滑面约束

当两物体接触面上的摩擦力与其他作用力相比很小，可忽略不计时，该接触面就可看成是光滑面。无疑，不论接触面是平面或是曲面，都不能限制物体沿接触面或接触点切线方向的运动，而只能限制物体沿接触面或接触点的公法线向着约束体内部的运动。因此，光滑支承面约束反力的方向，应沿着接触面在接触点的公法线且指向物体内部，亦即必为压力。如图 1-10 所示。这种约束反力也称为法向反力，通常用  $N$  表示。例如钢轨对车轮的约束，岩体与岩体之间通过结构面的相互约束等等。

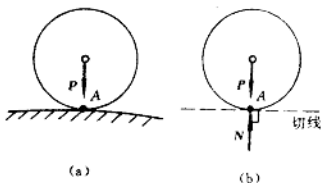


图 1-10

### 3. 固定铰链约束

铰链是工程上常见的一种约束。它的构造是将物体和固定支座在连接处钻上圆孔，再用圆柱形销子（又叫销钉）串连起来，使物体只能绕销钉的轴线

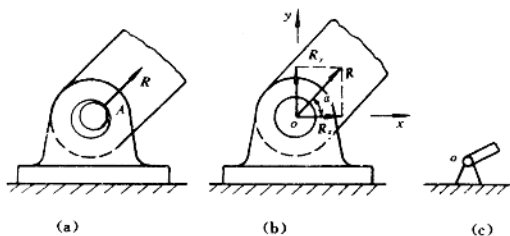


图 1-11

转动，而不能移动。设接触面非常光滑，摩擦可以忽略，则销钉与构件圆孔间的接触是两个

光滑圆柱面接触。按照光滑面约束反力的性质，可知销钉给构件的约束反力  $R$  应沿圆柱面在接触点  $A$  的法线，并通过铰链中心  $o$ ，如图 1-11 (a) 所示。但因接触点  $A$  的位置是随着轴所受主动力的不同而随之变化。当主动力尚未确定时，约束反力  $R$  的方向不能预先确定。因此，通常用通过铰链中心的两个互相垂直的分力  $R_x$  和  $R_y$  来表示，如图 1-11 (b) 所示。其关系为：

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad ; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x}$$

图 1-11 (c) 是常用的固定铰链约束的简化表示图。如果两构件用圆柱形光滑销钉连接，则称中间铰，如图 1-12 所示。

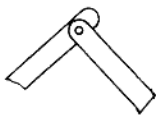


图 1-12

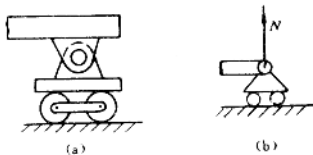


图 1-13

#### 4. 滑动铰链约束

这种约束只能限制物体在与支座接触处向着或离开支承面的运动，而不能阻止沿着支承面的运动或绕着销钉的转动，如图 1-13 (a) 所示。因此，其约束反力必通过销钉的中心，垂直于支承面，而指向待定，如图 1-13 (b) 所示。该约束常被用来表示物体在垂直于支承面向上的位移受到的限制。

以上讨论了几种工程中常见的简单类型的约束。在工程实际问题中，约束的类型还很多，有的约束类型还比较复杂，但由于与工程地质问题联系较少，此处从略。在 § 2.3 中，我们将介绍另一种约束类型——固定端约束。

## § 1.5 物体的受力分析·受力图·力系的分类

### 一、物体的受力分析、受力图

作用在物体上的每一个力，都会对该物体的运动（包括平衡）产生一定的影响。因此，在研究物体的运动（包括平衡）时，必须考虑作用在该物体上（包括主动力和约束反力）的所有力。为了清晰地表示物体的受力情况，我们把需要研究的物体（称为受力体）从周围的物体（称为施力体）中分离出来，单独画出其简单的轮廓图形，把施力物体对它的作用分别用力表示出来。这种简明的图形称为受力图。画受力图是解决静力学问题的一个重要步骤，下面举例加以说明。

**例 1-1** 如图 1-14 (a) 所示。用力  $F$  拉动碾子压平路面，受到一石块的阻碍，试分析碾子的受力情况。

**解** 1) 杆件  $CO$  在  $C$  处受主动力  $F$  作用，在  $O$  处与碾子为光滑铰链约束。据光滑铰链的性质，该约束反力  $F_1$  必定通过  $O$  点，方位暂不能确定（一般情况下可用相互垂直的两个分力

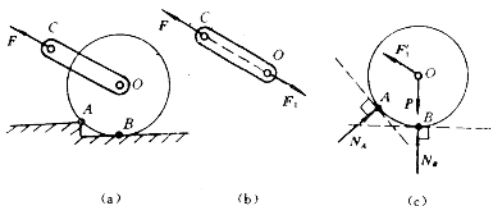


图 1-14

表示)。但是这里若进一步考虑到杆  $CO$  只在力  $F$  和  $F_1$  作用下平衡,则由二力平衡公理知,这两个力必定作用线重合且等值反向,由此定出  $F_1$  力的大小和方向。杆  $CO$  的受力情况如图 1-14 (b) 所示。

2) 碾子受地球引力  $P$  (主动力) 及杆  $CO$  对碾子中心  $O$  作用的拉力  $F_1'$ , 而  $F_1'$  与  $F_1$  是一对作用力与反作用力。若碾子与地面和石块之间近似地看成是光滑面接触,则碾子在  $B$  处受地面的法向反力  $N_B$ , 在  $A$  处受石块反力  $N_A$ ,  $N_A$  的方向沿碾子与石块接触面的公法线。碾子的受力图如图 1-14 (c) 所示。

有时需要对由若干个物体通过约束组成的系统 (物体系) 进行受力分析。这时必须注意区分内力和外力。系统内部各物体之间的相互作用力是该系统的内力; 外部物体对系统内物体的作用力是该系统的外力。但是, 必须认识到, 内力与外力的区分不是绝对的, 在一定的条件下, 内力与外力是可以相互转化的。例如, 上例中  $F_1$ 、 $F_1'$  分别是拉杆  $CO$  和碾子的外力。如果将拉杆  $CO$  和碾子合为一个系统作为研究对象, 则力  $F_1$ 、 $F_1'$  属于系统内这两部分之间的相互作用力, 成为该系统的内力。显然, 由公理四可知, 在作系统整体的受力图时, 只需画出其所受全部外力, 而内力则成对出现, 彼此抵消, 不必画出。

综上所述, 对物体或物体系进行受力分析, 即恰当地选择研究对象, 取分离体并正确的画出受力图, 是求解静力学问题的基础。

## 二、力系的分类

为了有利于力系的简化和平衡分析, 有必要对力系进行分类。

按力系中各力的作用线是否位于同一平面内, 力系可分为:

- (1) 平面力系 力系中各力的作用线都位于同一平面内;
- (2) 空间力系 力系中各力的作用线不位于同一平面内。

按力系中各力的作用线在空间的相互关系, 可分为:

- (1) 共线力系 力系中各力的作用线都位于同一直线上;
- (2) 汇交力系 力系中各力的作用线都汇交于同一点;
- (3) 平行力系 力系中各力的作用线都互相平行;

(4) 一般力系 又称任意力系, 力系中各力的作用线既不完全汇交于同一点, 也不完全平行。

## 思 考 题

1. 什么是力？如何正确理解力的概念？
2. 什么是刚体？为何要提出这一力学模型？
3. 何谓物体的平衡？静力学主要研究的问题是什么？
4. 解释下列名词：力系、等效力系、平衡力系、合力、力系的平衡条件。
5. 二力平衡公理与作用与反作用定律有何区别？
6. 何谓力的可传性？当分析图 1-15 所示  $AB$  与  $BC$  杆的受力时，能否将作用于杆  $AB$  上  $D$  点处的力  $P$  沿其作用线传到杆  $BC$  上的  $E$  点？为什么？若将力的可传性原理用于变形固体的研究时，将产生什么结果？应如何处理？

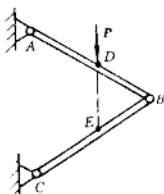


图 1-15

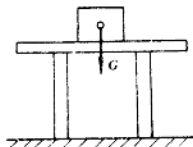


图 1-16

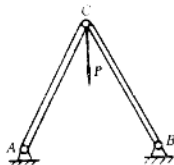


图 1-17

7. 如图 1-16 所示，放在桌子上的物块重为  $G$ ，试分析哪些力是作用力和反作用力？哪些力构成平衡力系？
8. 如图 1-17 所示的对称结构，力  $P$  作用于销钉  $C$  上，杆  $AC$  与  $BC$  自重不计。试问销钉  $C$  对杆  $AC$  的作用力与销钉  $C$  对杆  $BC$  的作用力是否等值、反向、共线？为什么？
9. 试根据三力平衡汇交定理回答下列问题：
  - (1) 作用在刚体上的三个力汇交于一点，该刚体是否一定平衡？
  - (2) 作用在刚体上的三个力互成平衡时，这三个力是否一定在同一平面内？
  - (3) 若共面的三个力不汇交于一点，是否能平衡？
10. “合力一定大于分力”，这一说法对吗？
11. 常见的约束类型有哪几种？其约束反力的作用点与方向如何确定？
12. “有约束存在就一定产生有约束反力”这一说法对吗？
13. 何谓受力图？画受力图的一般步骤是什么？
14. 何谓内力、外力？内力与外力的区分是绝对的吗？在什么情况可以相互转化？



## 第二章 平面力系

### § 2.1 平面汇交力系的合成及其平衡条件

#### 一、平面汇交力系合成的几何法及其平衡的几何条件

##### 1. 力多边形

如图 2-1 (a) 所示, 设有一平面共点力系  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$ 、 $F_4$ , 作用于点  $A$ 。求该力系的合力。为此, 只需连续应用力的三角形法则将这些力依次相加, 便可求出合力的大小和方向, 如图 2-1 (b) 所示。

$$R_1 = F_1 + F_2; \quad R_2 = R_1 + F_3; \quad R = R_2 + F_4;$$

显而易见, 在上述作图过程中, 中间矢  $\overline{ac}$  和  $\overline{ad}$  不必作出, 只要把各力矢首尾相接, 作出一个开口的多边形  $abcde$ , 连接  $ae$  两点, 矢  $\overline{ae}$  就代表了该力系合力  $R$  的大小和方向。这个多边形  $abcde$  就叫力多边形, 代表合力  $R$  的矢  $\overline{ae}$  边叫力多边形的封闭边。

这种以力多边形求合力的作图规则, 称为力多边形法则。这种方法也称为几何法。显然, 无论汇交力的数目有多少, 都可以用这种方法求出其合力。

综上所述, 可得如下结论: 平面汇交力系合成的结果是一个合力, 其大小和方向由力多边形的封闭边来表示, 其作用线通过各力的汇交点, 即合力等于各分力的矢量和 (或几何和)。可用矢量式表示为:

$$R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i \quad (2-1)$$

##### 2. 平面汇交力系平衡的几何条件

由于平面汇交力系可用其合力来代替, 显然, 平面汇交力系平衡的必要和充分条件是该力系的合力等于零。用矢量等式表示为

$$R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad (2-2)$$

若合力等于零, 力多边形的封闭边就会退变成一个点, 此时力多边形封闭。因此, 平面汇交力系平衡的几何条件是力多边形封闭。

#### 二、力的分解

由公理三已知, 两个共点力可以合成为一个合力, 且解答是唯一的。但反过来将一个已

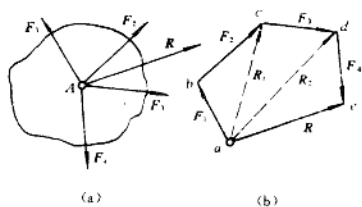


图 2-1