21世纪研究生
数学教材系列

# 矩阵分析

同济大学应用数学系　编著

同济大学出版社

21世纪研究生数学教材系列

同济大学研究生院“十五”出版基金资助

# 矩阵分析

同济大学应用数学系　编著

同济大学出版社

## 内容提要

本书是为适应蓬勃发展的研究生教育，根据“矩阵分析”（或“矩阵论”）课程教学基本要求编写而成的，主要讲述大多数理学、工学、管理学、经济学等各专业常用的、一般的矩阵基本理论和方法，内容包括基础知识，矩阵的 Jordan 标准形，线性空间与线性变换，内积空间，矩阵分析，广义逆矩阵，矩阵的范数和特征值估计. 各章都配有一定数量的习题用作练习，以帮助学生巩固知识.

本书内容简明得当，主次分明，叙述通俗易懂，既具有数学的抽象性和严密性，又重视工程技术中的实用性，可用作高等院校非数学类专业研究生的教材，也可供其他师生和工程技术人员阅读参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

矩阵分析/同济大学应用数学系编著. —上海：同济大学出版社，2005.8

（21世纪研究生（非数学专业）数学教材系列）

ISBN 7-5608-3135-4

Ⅰ. 矩…　Ⅱ. 同…　Ⅲ. 矩阵分析—研究生—教材
Ⅳ. O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 091722 号

21 世纪研究生数学教材系列

**矩阵分析**

同济大学应用数学系　编著

责任编辑　曹　建　责任校对　杨江淮　封面设计　李志云

出版发行　同济大学出版社
（上海四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622）
经　销　全国各地新华书店
印　刷　同济大学印刷厂印刷
开　本　787mm × 960mm　1/16
印　张　13
字　数　260 000
印　数　3 101—6 200
版　次　2005 年 9 月第 1 版　2006 年 3 月第 2 次印刷
书　号　ISBN 7 - 5608 - 3135 - 4/O · 280
定　价　18.00 元

# 前　言

本书是研究生(非数学类专业)数学课程系列教材之一,是为适应进入 21 世纪以来,我国研究生教育蓬勃发展的新形势而编写的.

矩阵作为基本的数学工具,在数学和其他各学科,包括理科、工科、管理学科、乃至经济学科都有广泛而多样的应用,熟知的科学、工程计算设计软件 MATLAB,其名称不过是由 Matrix Laboratory(矩阵实验室)缩略而得,由此也可窥见矩阵意义之一斑.所以深入学习,并掌握矩阵的基本理论和方法对研究生来说是十分重要的,因此,从 20 世纪 80 年代起,此课程就成为研究生的基础理论课.

正基于此课程的这一定位和要求,本书主要讲述大多数理学、工学、管理学、经济学等各专业常用的、一般的矩阵基本理论和方法,其特点是内容简明得当,叙述通俗易懂,主次分明;既重视基本理论也注重应用.对于必要的、典型的理论推导和分析尽量条理清晰,以提高读者论证和抽象思维的能力;而对个别理论则不苛求严密的推导,着重介绍方法和应用,但也不过细地展开这方面的讨论,以使本书能普遍地适用不同专业的研究生学习此课程.

全书共七章,内容包括矩阵的基础知识,约当(Jordan)标准形,线性空间和线性变换,内积空间,矩阵分析,广义逆矩阵,范数和特征值的估计.各章均配有一定数量的习题.全书教学时数约 50 学时.

凡学习过线性代数课程的读者,均可阅读本书,所用术语和记号大部分沿用同济大学应用数学系编的《线性代数》(第四版或第三版,北京:高等教育出版社).

本书由陈承东策划.由同济大学应用数学系陈承东(第 5 章、第 6 章、第 7 章)、胡志庠(第 3 章、第 4 章)、吴群(第 1 章、第 2 章)编写,最后由陈承东统稿.编者均多年在同济大学执教研究生《矩阵论》课程,使用的是由同济大学应用数学系吴雄华、陈承东、钱仲范编写的《矩阵论》.因此,在编写此书时,无论在内容的取舍还是章节的安排上,它均给予编者不少影响和参考,在此对他们深表诚挚的谢意.

本书的编写、出版得到同济大学研究生院“十五”出版基金资助,在编写本书

过程中还得到同济大学研究生院和应用数学系领导，特别是蒋凤瑛老师的大力支持，也在此表示衷心的感谢，同时还要感谢为这本书的出版做了大量工作的同济大学出版社.

由于水平所限，书中难免疏漏甚至错误之处，敬请广大读者指正.

编　者

2005 年 8 月

# 符号表

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,0,\underset{\text{第}i\text{个}}{1},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ | 第 $i$ 个单位向量 |
| $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ | 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 |
| $\mathbf{R}^n$ | $n$ 维实向量空间 |
| $\mathbf{C}^n$ | $n$ 维复向量空间 |
| $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ | 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置 |
| $\boldsymbol{A}^*$ | 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 |
| $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ | $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价 |
| $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ | $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似 |
| $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$ | 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置 |
| $\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ | 对角元为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的对角阵 |
| $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{J}_s\}=\boldsymbol{J}_1\oplus\boldsymbol{J}_2\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{J}_s$ | 准对角阵 |
| $\mathbf{R}^{m\times n}$ | $m\times n$ 阶实矩阵全体 |
| $\mathbf{C}^{m\times n}$ | $m\times n$ 阶复矩阵全体 |
| $N(\boldsymbol{A})$ | 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核空间 |
| $R(\boldsymbol{A})$ | 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的像空间 |
| $\mathrm{Ker}T$ | 线性变换 $T$ 的核空间 |
| $\mathrm{Im}T$ | 线性变换 $T$ 的像空间 |
| $\dim V$ | 线性空间 $V$ 的维数 |
| $\boldsymbol{E}$ | 单位(恒等)矩阵 |
| $I$ | 恒等变换 |
| $V_1\oplus V_2$ | 子空间 $V_1$ 与 $V_2$ 的直和 |
| $V_\lambda$ | 特征值 $\lambda$ 的特征子空间 |
| $D_i(\lambda)$ | 第 $i$ 阶行列式因子 |
| $d_i(\lambda)$ | 第 $i$ 阶不变因子 |
| $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ | 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 |
| $T\leftarrow S$ | 向量组 $T$ 可由向量组 $S$ 线性表示 |
| $T\leftrightarrow S$ | 向量组 $T,S$ 等价 |
| $<\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s>$ | 由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 张成的子空间 |
| $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ | 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹 |

# 目　　录

# 第 1 章　基础知识

矩阵分析是以矩阵作为主要研究对象的课程，同时也是大学线性代数课程的直接延续课程. 本章前三节的主要目的是回顾和总结一下线性代数的主要知识，便于以后章节的学习.

## 1.1　矩阵运算

线性代数主要讨论了线性方程组的求解问题. 引入了矩阵的概念以后，与之前只用消元法比较，我们可以更方便地得到求解线性方程组的算法.

在研究矩阵时，很重要的一点是要明确矩阵的型，即矩阵的行数和列数.

矩阵的基本运算包括加法、乘法、转置等 9 种，下面分别介绍.

### 1.1.1　矩阵的加法

设两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则矩阵 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记作 $-\boldsymbol{A}$.

矩阵加法的运算规律：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是三个同型矩阵，则

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(2) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{O}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同型的零矩阵；

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

规定矩阵的减法为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

**例 1.1.1**　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

**解**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & -1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & -6 & 3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

### 1.1.2　数与矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为一个矩阵，$k$ 为一个实数，则矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 称为 $k$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的

乘积，简称 $k$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的数乘，记作 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$.

数乘矩阵的运算规律：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个同型矩阵，$k,l$ 是两个实数，则

(1) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$；

(2) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

(3) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(4) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

### 1.1.3 矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$ 为一个 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$ 为一个 $s\times n$ 矩阵，则 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记作 $\boldsymbol{AB}$，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}\quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

矩阵乘法的定义源于两个线性变换的复合运算，例如，两个线性变换

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\end{cases}\quad 与\quad \begin{cases}x_1=b_{11}t_1+b_{12}t_2,\\ x_2=b_{21}t_1+b_{22}t_2,\\ x_3=b_{31}t_1+b_{32}t_2\end{cases}$$

的复合为

$$\begin{cases}y_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31})t_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})t_2,\\ y_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31})t_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})t_2.\end{cases}$$

若记

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{t}=\begin{pmatrix}t_1\\ t_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\ b_{21}&b_{22}\\ b_{31}&b_{32}\end{pmatrix},$$

利用矩阵的乘法，两个线性变换为 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Bt}$，则它们的复合为 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{ABt}$.

矩阵乘法的运算规律：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为矩阵，$k$ 为实数(假设运算都是可行的)，则

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$；

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$；

(4) $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O}$，其中 $\boldsymbol{E}=\mathrm{diag}\{1,1,\cdots,1\}$ 是单位阵.

注意，矩阵的乘法不满足交换律和消去律，即一般地 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，不能得出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 例如，设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\1 & -1\end{pmatrix},$$

则 $AB=O, BA=\begin{pmatrix}-6 & -12\\3 & 6\end{pmatrix}$，即 $AB\neq BA$；又 $AB=O=AO$，但 $B\neq O$.

由于矩阵的乘法不满足交换律，因此，$AB$ 可看成 $A$ 左乘 $B$，或 $B$ 右乘 $A$.

对于 $n$ 阶方阵 $A$，规定 $A^2=AA, A^k=A^{k-1}A$.

**例 1.1.2** 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $A^2, A^n$.

**解** 设 $H=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则

$$H^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad H^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad H^n=O\quad(n\geqslant 4),$$

$$A^2=(E+H)^2=E+2H+H^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 1\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$A^n=(E+H)^n=E+C_n^1H+C_n^2H^2+C_n^3H^3=\begin{pmatrix}1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3\\0 & 1 & C_n^1 & C_n^2\\0 & 0 & 1 & C_n^1\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

### 1.1.4 矩阵的转置

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为一个矩阵，则把 $A$ 的行与列对换所得矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

矩阵转置的运算规律：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为矩阵，$k$ 为实数(假设运算都是可行的)，则

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

**例 1.1.3** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，试证 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

**证** 充分性. 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

必要性. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 对角线上的元素为

$$a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2 \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 知，$a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0$，

故 $a_{ij}=0\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. □

### 1.1.5 方阵的行列式

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为一个方矩阵，则行列式 $\det(a_{ij})$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det(\boldsymbol{A})$.

方阵行列式的运算规律如下：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为方阵，$k$ 为实数，则

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$；

(2) $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$；

(3) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

$n$ 阶行列式 $\det(a_{ij})$ 也可以如下定义：

$$\det(a_{ij})=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}\cdot a_{2p_2}\cdot\cdots\cdot a_{np_n},$$

其中，$p_1p_2\cdots p_n$ 为数 $i=1,2,\cdots,n$ 的任意一个全排列，$t$ 为这个排列的逆序数. 根据这个定义可以得到三个性质：

(1) $\det(a_{ij})$ 的每一项都是 $n$ 个处于不同行、不同列的元素的积；

(2) $\det(a_{ij})$ 有 $n!$ 项；

(3) $\det(a_{ij})$ 每一项的符号是由组成该项的 $n$ 个元素下标排列的奇、偶性所确定的.

由定义还可得 $n$ 阶行列式 $\det(a_{ij})$ 按行(列)展开的性质：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}\det(a_{ij}),$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\delta_{ij}\det(a_{ij}),$$

其中，$A_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

**例 1.1.4**　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为一个 $n$ 阶方阵，$A_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=(A_{ij})^{\mathrm{T}}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，试证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

**证**　设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=(b_{ij})$，则

$$b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=|\boldsymbol{A}|\delta_{ij},$$

故
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=(|\boldsymbol{A}|\delta_{ij})=|\boldsymbol{A}|(\delta_{ij})=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

类似地可得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=(A_{i1}a_{j1}+A_{i2}a_{j2}+\cdots+A_{in}a_{jn})=(|\boldsymbol{A}|\delta_{ij})=|\boldsymbol{A}|(\delta_{ij})=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},$$

其中，$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 当\ i=j, \\ 0, & 当\ i\neq j.\end{cases}$ □

### 1.1.6　逆矩阵

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为一个 $n$ 阶方阵，若存在一个 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

下列命题都是方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件：

(1) $|\boldsymbol{A}|\neq 0$（又称 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的），此时 $\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}^*$；

(2) 若存在一个方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$），此时 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

逆矩阵的运算规律：设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为可逆阵，则

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是可逆的，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

(2) 当实数 $k\neq 0$ 时，$k\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(3) $\boldsymbol{AB}$ 是可逆的，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(4) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是可逆的，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

**例 1.1.5**　求二阶阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　$(ad-bc\neq 0)$ 的逆矩阵.

**解**　$|\boldsymbol{A}|=ad-bc\neq 0$，$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

### 1.1.7 方阵的迹

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为一个 $n$ 阶方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的对角元素的和称为 $\boldsymbol{A}$ 的迹，记作 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$，即

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

方阵迹的运算规律：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个 $n$ 阶方阵，则

(1) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$；

(2) $\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A})=k\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$；

(3) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$.

**例 1.1.6** 试证：对任意的方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都有

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{E}.$$

**证** 由于 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})-\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})=0$，而 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{E})=n$，因此对任意的方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都有 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{E}$. □

### 1.1.8 共轭矩阵

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为一个复矩阵，$\bar{a}_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的共轭复数，则复矩阵 $(\bar{a}_{ij})_{m\times n}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵.

共轭矩阵的运算规律：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为复矩阵，$k$ 为复数，则

(1) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$；

(2) $\overline{k\boldsymbol{A}}=\overline{k}\overline{\boldsymbol{A}}$；

(3) $\overline{\boldsymbol{AB}}=\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$.

### 1.1.9 分块矩阵

为了便于讨论，对行数和列数较大的矩阵可用分块法. 原则上，若分块后矩阵的运算都是可行的，则可先把矩阵的子块当成“元素”来运算，然后再对子块作运算. 所谓分块后矩阵的运算都是可行的(或可认为分块是合理的)是分别指运算的下列情形：

(1) 作加法运算 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 时，要求对 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 用相同的分块方法；

(2) 作数乘运算 $k\boldsymbol{A}$ 时，对 $\boldsymbol{A}$ 的分块方法没有要求；

(3) 作乘法运算 $\boldsymbol{AB}$ 时，要求对 $\boldsymbol{A}$ 的列的分法与 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法相同；

(4) 作转置运算 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 时，对 $\boldsymbol{A}$ 分块方法没有要求.

现分别举例讲解如下.

**例 1.1.7** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 为 $n$ 阶方阵，其中 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵，试证：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B|.$$

**证**　利用分块矩阵乘法,有

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

再利用行列式的性质,就有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B|. \qquad \square$$

**例 1.1.8**　设 $A,B$ 为 $n$ 阶方阵,试证:

(1) $|AB|=|A||B|$;　(2) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$.

**证**　(1) 考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix}$,则有 $\begin{vmatrix} A & O \\ E & B \end{vmatrix} = |A||B|$.

另一方面

$$\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & B \\ O & -E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ A & AB \end{pmatrix},$$

于是有　$\begin{vmatrix} A & O \\ E & B \end{vmatrix} = |AB|$,　即 $|AB|=|A||B|$.

(2) 利用分块矩阵

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -E & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & O \\ E & E \end{pmatrix},$$

可得

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -E & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ E & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & B \\ O & A-B \end{pmatrix}.$$

再利用行列式的性质,就有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|. \qquad \square$$

**例 1.1.9**　设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,求 $A^{-1}$.

**解** 设

$$A=\left(\begin{array}{c:cc}3 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 5\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix},$$

$$A_1=3,\quad A_1^{-1}=\frac{1}{3};\quad A_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix},\quad A_2^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & A_2^{-1}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

分块矩阵在讨论线性方程组时的作用也十分明显.例如,对线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$$

设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},$$

$$B=(A,b)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix},$$

其中,$A$ 称为线性方程组的系数矩阵,$x$ 称为未知数向量,$b$ 称为常数项向量,$B$ 称为增广矩阵,则线性方程组可表示为

$$Ax=b.$$

若把 $A$ 按它的列分块,并记 $\alpha_j=(a_{1j}\ \ a_{2j}\ \ \cdots\ \ a_{mj})^{\mathrm{T}}$,则 $A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)$,于是线性方程组又可表示为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b.$$

Cramer 法则可以改写成:如果线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵是非奇异的,那么,$Ax=b$ 有惟一解

$$x=A^{-1}b.$$

# 1.2 线性方程组

在线性代数的有关求解线性方程组的内容中，最显著的特点是用矩阵的初等变换替代 Gauss 消元法，这种作法的优点是明显的.

## 1.2.1 初等变换与初等矩阵

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，矩阵的初等变换包括下列变换：

(1) 对换 $i,j$ 两行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$；对换 $i,j$ 两列，记作 $c_i\leftrightarrow c_j$；

(2) 第 $i$ 行乘非零数 $k$，记作 $r_i\times k$；第 $i$ 列乘非零数 $k$，记作 $c_i\times k$；

(3) 第 $i$ 行加上第 $j$ 行的 $k$ 倍，记作 $r_i+kr_j$；第 $i$ 列加上第 $j$ 列的 $k$ 倍，记作 $c_i+kc_j$.

相对应的初等矩阵分别为

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j)^{\mathrm{T}}$；

(2) $\boldsymbol{E}(i(k))=\boldsymbol{E}+(k-1)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}$；　其中 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{E}$；

(3) $\boldsymbol{E}(i,j(k))=\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}$.

对矩阵作一次初等行变换等同于对该矩阵左乘一个初等矩阵，而作一次初等列变换等同于对该矩阵右乘一个初等矩阵的转置，例如，

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$；　$\boldsymbol{A}\xrightarrow{c_i\leftrightarrow c_j}\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i,j)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{k\times r_i}\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$；　$\boldsymbol{A}\xrightarrow{k\times c_i}\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i(k))^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i+kr_j}\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$；　$\boldsymbol{A}\xrightarrow{c_i+kc_j}\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i,j(k))^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$.

若 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{P}$ 为有限个 $\boldsymbol{E}(i,j)$ 类的初等矩阵的乘积，即存在有限个 $\boldsymbol{E}(i,j)$ 类的初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$，使得 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$，则称 $\boldsymbol{P}$ 为 $n$ 阶置换阵.

显然，矩阵的初等变换都是可逆的，结合定义可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

有了初等矩阵，可以把矩阵的初等变换都转换为矩阵的乘法运算，同时对矩阵之间的等价性以及方阵的可逆性提供新的表示方法.

(1) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$.

(2) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{E}$.

(3) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

## 1.2.2 阶梯形矩阵

利用矩阵的初等行变换求解线性方程组的优点之一就是使用了阶梯形矩阵