21世纪高等教育系列教材

高等数学

闫　厉
董小刚　主编

西南交通大学出版社
SWJUP
Http://press.swjtu.edu.cn

21 世纪高等教育系列教材

高 等 数 学

闫 历
董小刚 主编

西南交通大学出版社
·成都·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/闫厉,董小刚主编.一成都:西南交通大学出版社,2005.6

ISBN 7-81104-011-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①闫… ②董… Ⅲ.高等数学一高等学校一教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 132378 号

高 等 数 学

闫 厉 董小刚 主编

*

责任编辑 张宝华 张华敏

封面设计 水木时代

西南交通大学出版社出版发行

(成都市二环路北一段 111 号 邮政编码:610031 发行部电话:028-87600564)

http://press.swjtu.edu.cn

E-mail:cbsxx@swjtu.edu.cn

安徽省蚌埠方达印刷厂印刷

*

开本:787mm×960mm 1/16 印张:22.5

字数:404 千字 印数:1—2000 册

2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 7-81104-011-5/O·002

定价:**32.00** 元

编审说明

本书系高等学校文科专业的数学系列教材之一 。内容包括：函数，极限，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，无穷级数，多元函数，等等。经审定，本书可作为高等学校文科专业高等数学课程教材(年学时数为 100～120 学时)，学时少的相关专业对内容适量删减后也可使用。

高等学校的基本任务是培养合格人才。对于文科学生来说，数学的学习不只是一种必不可少的专业技术教育，也是文化素质教育的重要组成部分。

目前，国内各高校都在积极进行教学改革，教学内容的改革是教学改革的重点与难点。为了编写适合于广大文科学生使用的数学教材，编者进行了深入细致的调研与探讨，参考了国内外相关优秀教材，结合编者多年教学经验，在内容编写上力求从数学概念的实际背景出发，简明扼要地介绍高校文科专业所需要的数学知识，由浅入深，展现给学生一个完整的科学理论体系，注重基本理论、基本运算技能的培养，注重培养学生分析问题和解决问题的能力，为学生今后的学习打下坚实的基础。

由于编者学识有限，书中肯定存在疏漏错误之处，诚望广大读者和有关专家学者不吝批评指正，以便不断修订完善。

编　者

2004 年 9 月

目 录

第1章　函数、极限

高等数学是以极限为基本工具，以变量及变量间的依赖关系即函数关系为研究对象的一门课程．作为基础知识，本章将介绍函数、极限和连续等概念，并重点介绍极限这一工具和方法．

§1.1　函　数

一、函数的概念

我们先从两个简单例子来看变量之间相互依存的关系，然后抽象出函数的定义．

例1　真空中自由落体下落的路程 s 和下落的时间 t 都是变量，由物理学知道 $s=\frac{1}{2}gt^2$，当 t 在其变化范围内变化时，s 也随之变化，t 有一确定的值时，s 的值随之确定．

例2　在电子技术中，经常会遇到各种波形，图1-1是一种三角波中的一个波形，图中横坐标表示时间 t，纵坐标表示电压 u，从图中可以知道，电压 u 随 t 的变化而变化，在区间 $0\leqslant t\leqslant 20$ 内，每取定一个时间 t 的值，都有一个确定的 u 值和它相对应，u 和 t 的关系也可以用数学式子来表示，由于图形是由不同的两条线段组成（在区间 $0\leqslant t\leqslant 10$ 内，u 和 t 的关系由线段 OA 的方程 $u=t$ 所决定；在区间 $10<t\leqslant 20$ 内，u 和 t 的关系由线段 AB 的方程 $u=20-t$ 所决定），因此，在区间 $0\leqslant t\leqslant 20$ 内，u 和 t 的关系应分段表示，即

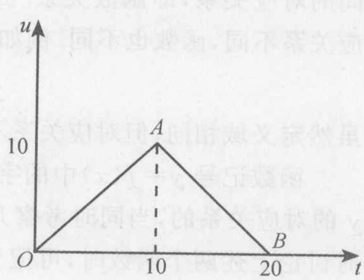

图1-1

$$u=\begin{cases} t, & 0\leqslant t\leqslant 10 \\ 20-t, & 10<t\leqslant 20 \end{cases}$$

上面这两个例子，它们都表达了两个变量之间的相互依赖关系，这种相互依

赖关系由一种对应法则所确定，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应，两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定数集，如果对于每一个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

函数的定义包括以下三个方面的内容.

1. 函数的定义域

自变量 x 的变化范围(数集 D)称为函数的定义域. 如果自变量取数集 D 中某一数值 x_0 时，函数有确定的值和它对应，那么就称函数在 x_0 处有定义. 这时函数值记作 $f(x_0)$. 因此函数定义域可以说成是使函数有意义的实数的全体.

定义域不同，函数就不相同，例如

$$f(x)=\lg x^2 \quad 与 \quad g(x)=2\lg x$$

前者的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，后者的定义域是 $(0,+\infty)$.

2. 对应关系

定义中“变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应”一语，表明了 y 与 x 之间的关系是按照一定的法则联系起来的. 这个“一定的法则”就是 x 与 y 之间的对应关系，即函数关系. 因此，给出 y 与 x 间对应关系就是给出了函数，对应关系不同，函数也不同. 例如

$$y=x \quad 与 \quad y=\sqrt{x^2}$$

虽然定义域相同，但对应关系不同，所以仍是两个不同的函数.

函数记号 $y=f(x)$ 中的字母 f(取自英语中函数 function 一词)是表示 x 与 y 的对应关系的，当同时考察几个不同函数时，就要用不同的字母来表示，如同时讨论上述两个函数时，可记为

$$y=f(x)=x \quad 与 \quad y=F(x)=\sqrt{x^2}$$

3. 函数的值域

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，那么对于 D 中的每一个 x 值，对应的函数值全体组成的数集 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域. 函数的值域是由函数的定义域和关系所决定的，函数的值域不同，说明定义域与对应关系中至少有一个不同，所以函数也不相同. 在上例中也可由 $y=x$ 的值域 $(-\infty,+\infty)$ 与 y

$=\sqrt{x^2}$ 的值域 $(0,+\infty)$ 不同而得出两个函数不同的结论.

此外,若对于每一个数 $x\in D$,函数 y 都只有一个确定值与它对应,这种函数称为**单值函数**,否则就称为多值函数.例如,由方程 $x^2+y^2=a^2$ 所确定的函数 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ 就是一个多值函数.

值得注意的是,在函数定义中,并不要求在自变量变化时,函数一定要变化,所以常数也可看做函数.

二、函数的表示法

表示函数的方法除了表格法(把一系列自变量与对应的函数值列成表,如三角函数表等)和图示法(用坐标系中曲线表示函数)外,最主要的就是解析法.它是通过自变量的数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系.有些函数在其定义域内用一个式子就可完全表示,有的函数在其定义内要用几个式子才能完全表示.后者称为**分段函数**,如前面例 2 中的

$$u=\begin{cases}t, & 0\leqslant t\leqslant 10\\ 20-t, & 10<t\leqslant 20\end{cases}$$

就是分段函数.

函数的定义域、值域常用区间表示.关于区间的名称和记号在中学数学中已经学过,这里不再重复,但以后常常会遇到被称为邻域的开区间:$(a-\delta,a+\delta)$,其中 a、δ 为两个实数,且 $\delta>0$.称此区间为**点 a 的 δ 邻域**,记作 $U(a,\delta)$,点 a 称为**邻域的中心**,δ 称为**邻域的半径**(见图 1-2).

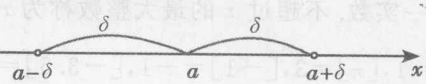

图 1-2

按区间的定义,$(a-\delta,a+\delta)$ 是满足不等式 $a-\delta<x<a+\delta$ 的实数 x 的集合,所以有

$$U(a,<\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$$

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉.点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为**点 a 的去心 δ 邻域**,记作 $U(\hat{a},\delta)$,即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

下面再举几个函数的例子.

例 3　函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-3 所示.

例 4　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

称为**符号函数**，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1-4 所示，对于任何实数 x，下列关系成立：$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$.

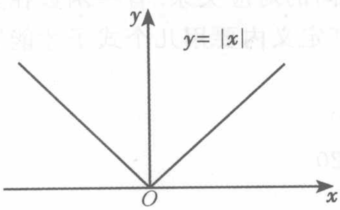

图 1-3

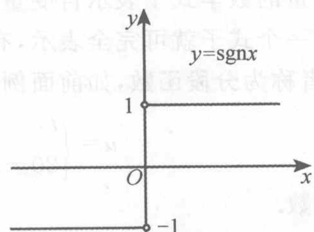

图 1-4

例 5　设 x 为任一实数. 不超过 x 的最大整数称为 x 的**最大整数**. 记作 $[x]$，例如，$\left[\frac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$. 把 x 看做变量，则函数 $y=[x]$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\mathbf{Z}$. 它的图形如 1-5 所示，这个图形称为**阶梯曲线**，在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1. 这一函数称为**取整函数**.

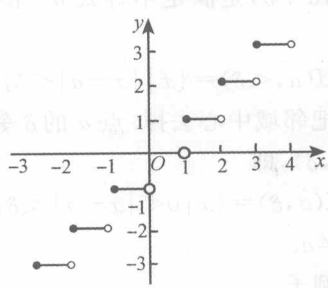

图 1-5

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果存在正数 M，使得与任一数值 $x\in X$ 所对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**，如果这样的 M 不存在，就称为函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**，就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1\in X$，使 $|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为无论 x 取任何实数，$|\sin x|\leqslant 1$ 都能成立. 这里取 $M=1$. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增的；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递减的. 单调递增和单调递减的函数统称为单调函数.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$）. 如果对于任一数 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对任一数 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的；奇函数的图形是关于原点对称的.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 T，使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的周期，通常，周期函数的周期指最**小正周期**.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$，$\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

四、复合函数和初等函数

在初等数学中，我们学习了幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，我们把这五类函数称为基本初等函数（列表于附录）. 实际问题中所遇到的

函数,大多数是由这些函数构成的.

1. 复合函数

如果函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域的全部或部分 W_2 在 $f(u)$ 的定义域内,即 $W_2\subset D_1$,那么,$y=f[\varphi(x)]$ 称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,u 称为**中间变量**.

例 6 设 $y=\sin u, u=x^2+1$,则 $y=\sin(x^2+1)$ 就是 x 的复合函数.

例 7 设 $y=\sqrt{u}, u=1-x^2$,则 $y=\sqrt{1-x^2}$ 就是 x 的复合函数.

必须注意,不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的.

例如,$y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数,因为 $u=2+x^2$ 的值域 $u\geqslant 2$ 全不在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 之内.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成. 例如,$y=(1+\cos^2 x)^2$ 可以看成是由 $y=u^2, u=1+v^2, v=\cos x$ 复合而成的,这里 u 和 v 是两个中间变量.

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤而构成,并用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

例如,$y=\sqrt{1-x^2}$,$y=3x^2+2x+1$,$y=\cos^2 x$ 都是初等函数,但前面提到的分段函数就不是初等函数,称为**非初等函数**.

习题 1.1

1. 回答下列问题:

(1)x^2 是不是 x 的函数?

(2)在函数的公式表达法中,一个函数是否只能用一个式子表示?

(3)x 与 y 之间的一个方程,是否总能确定 y 与 x 之间是函数关系?

(4)若变量 x 与 y 不能用公式表示其相互间的关系时,能否说 x 与 y 不存在函数关系?

2. 判断正误(对的划√,错的划×):

(1)若 $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=|x|$,则 $f(x)=g(x)$;

(2)若 $f(x)=\dfrac{x^2}{x}, g(x)=x$,则 $f(x)=g(x)$;

(3)若 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$,则 $f(x)=g(x)$;

(4)若 $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\cos x}, g(x)=2\sin x$,则 $f(x)=g(x)$;

(5)函数必须有自变量 x,因此 $y=2$ 不是函数;

(6)区间 (a,b) 中的最小数是 a,最大数是 b;

(7)$y=\operatorname{arccot}\dfrac{x}{2}$ 是一个基本初等函数;

(8)$y=|\sin x|$ 是初等函数;

(9)设 $-1<x<1$,则函数 $y=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 是初等函数;

(10)$y=x^3(x>0)$ 是奇函数,$y=x^2(x>0)$ 是偶函数;

(11)定义在 $(-1,1)$ 上的偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

3. 求下列函数的定义域:

(1)设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,求 $f(\lg x), f(\sin x), f(\sqrt{1-x^2})$ 的定义域;

(2)$y=\dfrac{1}{1\sqrt{1-x}}$;　　(3)$y=\sqrt{x}+\lg(1-x^2)$;

(4)$y=\sqrt{3^{2x-1}-\dfrac{1}{27}}$;　　(5)$y=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1+x}{1-x}$;

(6)$y=\sqrt{3-x}+\arccos\dfrac{x-2}{3}$;　　(7)$y=e^{\frac{1}{x}}$.

4. 若 $\varphi(t)=\ln\dfrac{1-t}{1+t}$,证明:$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(\dfrac{x+y}{x+xy})$.

5. (1)设 $f(\dfrac{1}{x})=x(1+\sqrt{x^2+1}), x>0$,求 $f(x)$;

(2)设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$,求下列函数值:$f(0), f(1), f(\dfrac{1}{a}), f(x_0), f(x_0+h)$;

(3)设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\leqslant 0\\ 2, & 0<x<+\infty\end{cases}$,求 $f(-2), f(0), f(1)$.

6. 在下列各题中,求由所给函数复合而成的函数,并求这函数分别对应于给定自变量 x_1 和 x_2 的函数值:

(1)$y=u^2, u=\sin x, x_1=\dfrac{\pi}{6}, x_2=\dfrac{\pi}{3}$;

(2)$y=\sin u, u=2x, x_1=\dfrac{\pi}{8}, x_2=\dfrac{\pi}{4}$;

(3)$y=\sqrt{u}, u=1+x^2, x_1=1, x_2=2$;

(4)$y=e^u, u=x^2, x_1=0, x_2=1$;

(5) $y=u^2, u=\mathrm{e}^u, x_1=1, x_2=-1$.

7. 指出下列函数是怎样复合而成的？

(1) $y=(1+x)^{20}$； (2) $y=2^{\sin^2 x}$；

(3) $y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$； (4) $y=\log_a \sin \mathrm{e}^{x+1}$.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

§1.2 数列及函数的极限

极限的概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的. 我国古代数学家刘徽提出用圆内接正多边形的周长来推算圆周长的方法——"割圆术". 他说"割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣"，意思是说：圆的内接正多边形的边数 n 越多，正多边形的周长 s_n 就越接近于圆周长 s. 在 n 无限增多的过程中，正多边形周长 s_n 就无限接近于圆周长 s，把这种极限思想用精确的数学语言加以描述，就可得到数列和函数的极限的概念. 下面我们就分别加以分析.

一、数列的极限

1. 数列极限的概念

按自然数 1,2,3,… 编号依次排成的一列数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 称为**数列**，记为 x_n. 数列中每一个数叫数列的**项**，第 n 项 x_n 叫做数列的**一般项**.

在几何上，数列 x_n 可看做数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点 $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n, \cdots$（见图 1-6）.

图 1-6

数列 x_n 可看做自变量为正整数 n 的函数

$$x_n=f(n)$$

对于我们要讨论的问题来说，重要的是：当 n 无限增大时（即 $n\to\infty$ 时），对应的 $x_n=f(n)$ 是否能无限接近于某个确定的数值？如果能够的话，这个数值等于多

少？

我们对数列 $x_n=\frac{1}{n}$ 加以分析可以知道，两个数 a 与 b 之间的接近程度可以用这两个数之差的绝对值 $|b-a|$ 来度量，$|b-a|$ 越小，a 与 b 越接近. 就数列 $x_n=\frac{1}{n}$ 来说，因为

$$|x_n-0|=\frac{1}{n}$$

由此可见，当 n 越来越大时，$\frac{1}{n}$ 越来越小，从而 x_n 就越来越接近于 0. 因为只要 n 足够大，$|x_n-0|$ 即 $\frac{1}{n}$ 可以小于任意给定的正数（一般用希腊字母 ε 表示），所以说，当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 0. 例如，给定 $\frac{1}{100}$，则由 $\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$ 可见，只要 $n>100$，就是从第 100 项开始，后面所有的项 $x_{101},x_{102},x_{103},\cdots,x_n,\cdots$ 就都能使不等式 $|x_n-0|<\frac{1}{100}$ 成立. 同样地，如果给定 $\frac{1}{1000}$，只要 $n>1000$ 就可以了，就是从第 1000 项开始，后面所有的项 $x_{1001},x_{1002},x_{1003},\cdots,x_n,\cdots$ 就都能使不等式 $|x_n-0|<\frac{1}{1000}$ 成立. 一般地，不论给定的正数 δ 多么小，总存在着一个正整数 N，使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n，不等式 $|x_n-0|<\varepsilon$ 都成立，这就是数列 $x_n=\frac{1}{n}$ 当 $n\to\infty$ 时，无限接近于 0 这一关系的实质. 这样的一个数 0，称为数列 $x_n=\frac{1}{n}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.

一般地，对于数列 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 来说，有如下定义：

定义 1　若 x_n 是一个数列，a 是一个常数，如果对于任意给定的正数（不论它多么小），总存在正整数 N，使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，便说明**数列** x_n 以 a 为**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

或

$$x_n\to a\quad(n\to\infty)$$

如果数列没有极限，就称数列是发散的.

上面定义中，正数 ε 可以任意给定是很重要的，因为只有这样，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 才能表达出 x_n 与 a 无限接近的意思. 此外还应注意到：定义中的正

整数 N 与任意给定的正数 ε 是有关的,它随着 ε 的给定而选定.

我们给"数列 x_n 的极限为 a"一个几何解释:

将常数 a 及数列 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 在数轴上用它们的对应点表示出来,再在数轴上作点 a 的 ε 邻域.因不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 与不等式 $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ 等价,所以当 $n>N$ 时,从第 N 项以后的一切点 $x_{N+1},x_{N+2},x_{N+3},\cdots$ 全部落在点 a 的 ε 邻域 $U(a,\varepsilon)$ 之内,而只有有限个(至少只有 N 个)在这区间以外,如图 1-7 所示.

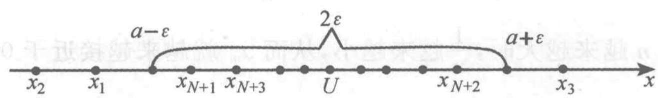

图 1-7

数列极限的定义并未直接提供如何去求数列的极限,以后要讲极限的求法,而现在只先举个说明极限概念的例子.

例 1 设 $|q|<1$,证明:等比数列 $1,q,q^2,\cdots,q^{n-1},\cdots$ 的极限是 0.

证 任意给定 $\varepsilon>0$(设 $\varepsilon<1$),因为 $|x_n-0|=|q^{n-1}-0|=|q|^{n-1}$,要使 $|x_n-0|<\varepsilon$,只要 $|q|^{n-1}<\varepsilon$.

取自然对数,得 $(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$,因 $|q|<1$,$\ln|q|<0$,故

$$n>1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$$

取 $N=\left[1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $|q^{n-1}-0|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}=0$.

2. 收敛数列的基本性质

定理 1(极限的唯一性) 若数列 x_n 有极限,则其极限是唯一的.

证 用反证法.假设同时有 $x_n\to a$ 及 $x_n\to b$,且 $a<b$.取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$.因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,故存在正整数 N_1,使得对于 $n>N_1$ 的一切 x_n,不等式

$$|x_n-a|<\frac{b-a}{2} \tag{1}$$

都成立.同理 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$,故存在正整数 N_2,使得对 $n>N_2$ 的一切 x_n,不等式

$$|x_n-b|<\frac{b-a}{2} \tag{2}$$

都成立.取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,式(1)及式(2)同时成立,但由式(1)有 $x_n<\frac{a+b}{2}$,由式(2)有 $x_n>\frac{a+b}{2}$,这矛盾证明了本定理的正确性.