全国奥数领队担纲　奥赛金牌教练主笔

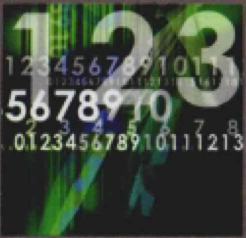
奥数讲义

AOSHU JIANGYI

高三年级下

◆ 主编 朱华伟

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社



全国奥数领队担纲　奥赛金牌教练主笔

★ 奥数讲义　（高一年级上、下）

★ 奥数讲义　（高二年级上、下）

★ 奥数讲义　（高三年级上、下）

ISBN 978-7-308-05530-7

9 787308 055307 >

定价：15.00 元

奥数讲义

高三年级下

主编　朱华伟

编著　朱华伟　蒋太煌　张　雷

符开广　范端喜

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数讲义．高三年级．下/朱华伟主编．—杭州：浙江大学出版社，2007.10
ISBN 978-7-308-05530-7

Ⅰ.奥...　Ⅱ.朱...　Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 137322 号

奥数讲义(高三年级下)

主　　编　朱华伟

责任编辑　钱欣平
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
　　　　　(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
　　　　　(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
　　　　　(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　浙江中恒世纪印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　11.5
印　　数　00001—10000
字　　数　290 千
版 印 次　2007 年 10 月第 1 版　2007 年 10 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05530-7
定　　价　15.00 元

前　　言

数学被誉为科学的皇后。在人类文明的历史进程中，中华民族对数学的发展曾作出过卓越的贡献。勾股定理、祖冲之圆周率、九章算术等丰硕成果无不闪烁耀眼的光芒。新中国成立以后，中国的现代数学有了长足的发展，先后涌现出华罗庚、陈景润等一批著名数学家。数学大师陈省身教授曾预言："21世纪，中国必将成为数学大国。"从1985年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克以来，中国代表队共122人参赛，共取得92块金牌、23块银牌、5块铜牌，13次团体总分第一的好成绩。中学生在国际数学奥林匹克中的出色表现，使人们相信陈省身教授的这一"猜想"将在本世纪得到证明。

由于计算机的出现，数学已不仅是一门科学，还是一种普适性的技术。从航空到家庭，从宇宙到原子，从大型工程到工商管理，无一不受惠于数学技术。高科学技术本质上是一种数学技术。美国科学学院院士格里姆(J. Glimm)说："数学对经济竞争力至为重要，数学是一种关键的普遍使用的，并授予人能力的技术。"时至今日，数学已兼有科学与技术两种品质，这是其他学科少有的。数学对国家的贡献不仅在于富国，而且还在于强民。数学给予人们的不仅是知识，更重要的是能力，这种能力包括观察实验、收集信息、归纳类比、直觉判断、逻辑推理、建立模型和精确计算。这些能力的培养，将使人终身受益。这些能力的培养，必须从小抓起，从青少年抓起。而数学奥林匹克活动，则是培养这些能力的良好载体。

基于这样的想法，我们以国内外高中数学奥林匹克为背景，以《全日制高中数学课程标准》的新理念、新要求为准绳，兼顾"大纲"与"新课标"的过渡，根据多年培训数学奥林匹克选手的经验和体会，编写这套《奥数讲义》。通过这套讲义的学习，使学生发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创造力，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐，进而激发学习数学的兴趣。她既为学有余力且对数学感兴趣的高中生提供一个施展才华和提高数学解题能力的有效指导，也为参加数学奥林匹克的高中生提供一套科学实用的培训教程。

本丛书设计新颖，方便老师、学生和家长使用，分高一、二、三年级上册，和高一、二、三年级下册，共六册。

每册内容包括专题讲座篇、同步测试篇、全真测试篇。专题讲座篇的专题以讲义的形式编写，每讲的主要栏目有：

数学名言欣赏：以名人名言开宗名义，开始每讲的奥数学习之旅。

知识方法扫描：补充竞赛方面的相关知识、方法与技巧，突出重点、难点和赛点。

典型例题解析：在保留部分经典好题、经典解法的同时，尽可能选用一些国际国内竞赛的新题(不一定是难题)，如近 3—5 年高考、高中数学联赛、女子竞赛、西部竞赛、美国数学邀请赛、美国数学奥林匹克试题等，每道赛题注明竞赛年份，给出一些新颖的解答方法，减少跟其他同类书籍的雷同率，增强读者的阅读欲望。例题总个数控制在 8 道，由基础题(2 道高考难度的试题)、提高题(4 道一试难度的试题)、综合题(2 道二试难度的试题)组成；

原版赛题传真：含英文试题与英文解答，针对试题与解答中的生词给出"英汉小词典"。

同步训练：含 3 道选择题、4 道填空题、3 道解答题(不便于采用客观题形式的专题，安排 6 道解答题作为同步训练题)，均给出详细解答过程。

在"同步测试篇"中，与"专题讲座篇"中的专题对应设置测试卷。在"全真测试篇"中，精选了国内外最新高中数学奥林匹克试卷若干套。全书后附有"同步训练题、同步测试题、全真测试题"题目的详解。

问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，必须进行一定量的训练。本丛书精选了具有代表性的经典例题，配备了足够的训练题和测试题。在这些题目中既有传统的名题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有作者根据自己的教学实践编撰的新题。设置这些题目时，作者专门针对学生学习的实际，突出知识的重点、难点，以期达到提高的目的。

本丛书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想的渗透，凸现科学精神和人文精神的融合，加强对学生的学习兴趣、创新精神、实践能力、应用意识和分析、解决问题能力的培养。

数学大师陈省身教授为 2002 年 8 月在北京举行的第 24 届国际数学家大会题词："数学好玩"。我们深信本丛书让你品味到数学的无穷乐趣。著名数学家陈景润说得好："数学的世界是变换无穷的世界，其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到！"

广州大学　朱华伟

2007.5.10

目录 contents

专题讲座篇

同步测试篇

全真测试篇

专题讲座篇

第1讲　多项式的运算

简言之，代数是函数的运算，而算术却是数值的演算.

——科姆特

知识方法扫描

1. 形如 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq 0$，$n$ 为非负整数) 的代数式叫做一元 n 次多项式. n 叫做此多项式的次数，记为次$(f(x))=n$. 常数0叫做零多项式，不定义次数. 当次$(f(x))=0$，即 $f(x)$ 为零次多项式时，$f(x)$ 为一个非零常数.

2. 多项式的加(减)法是把同次项对应系数相加(减). 多项式的乘法是把一个多项式的各项乘另一个多项式的每一项，然后再合并同类项.

3. 多项式的加法和乘法满足交换律、结合律和乘法对加法的分配律. 另外还满足

(1) 消去律　设 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$，且 $f(x)\neq 0$，则 $g(x)=h(x)$.

(2) 次数律

(ⅰ) 次$(f(x)\cdot g(x))=$次$(f(x))+$次$(g(x))$

(ⅱ) 次$(f(x)+g(x))\leqslant \max$ (次 f，次 g)

其中当 $f(x)$，$g(x)$ 的次数相等且首项系数之和为零时取小于号，否则取等号(记号 $\max\{a, b\}$ 表示 m、n 中较大的一个数).

次数是控制多项式的一个重要性数，从分析多项式的次数入手，正确地估计多项式的次数常能开辟解题途径.

4. 多项式的相等

两个多项式相等，是指它们的次数相同并且同次项的系数对应相等. 因此，要证明关于多项式的恒等式，可以将等式两边整理后比较同次项系数. 反之，如果已知这个恒等式成立，则可以得到关于同次项系数的等式. 这是多项式理论中许多重要定理证明的重要依据(如韦达定理的证明)，也是处理多项式问题的基本出发点之一.

需要指出的是，多项式相等与方程式是有区别的，例如，$ax^2+bx+c=0$，若把此式看作多项式相等，则必有 $a=b=c=0$；若把此式看作方程，就不要求 $a=b=c=0$.

5. 多项式的带余除法

对于多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$，其中 $g(x)\neq 0$，必存在多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$，使得次$(r(x))<$次$(g(x))$ 或 $r(x)=0$，且 $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$　①

其中 $f(x)$，$g(x)$，$q(x)$ 和 $r(x)$ 分别称为被除式、除式、商和余式. 特别地，当余式 $r(x)=0$ 时，有 $f(x)=g(x)\cdot q(x)$，此时称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记为 $g(x)\mid f(x)$，并称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式，而称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式. 当 $g(x)$ 不整除 $f(x)$ 时，记为 $g(x)\nmid f(x)$.

在上述意义下，可以证明商式与余式是惟一的．因此，求 $f(x)$ 除以 $g(x)\neq 0$ 的余式，只要写成上述式子，且次$(r(x))<$次$(g(x))$，则 $r(x)$ 即为所求的余式．

注意 ① 式是一个重要的恒等式，也是我们研究问题的基本出发点，由此式容易得到下面的余数定理．

6．余数定理　多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$，所得的余数等于 $f(a)$．

余数定理把一元 n 次多项式的值 $f(a)$ 与 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的余数，这两个似乎无关的数紧密地联系了起来．由余数定理很自然地推出因式定理．

推论 1　（因式定理）多项式 $f(x)$ 有一个因式 $x-a$ 的充要条件是 $f(a)=0$．

这样以来，一元 n 次多项式 $f(x)$ 有因式 $x-a$ 与 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除以及多项式的值 $f(a)=0$，这几条事实从不同的角度回答了同一个实质性问题，它们之间互为充要条件．

推论 2　若 $f(x)$ 为整系数多项式，a 为整数，则 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的商也为整系数多项式，余数为整数．

经典例题解析

例1　设 $f(x)$，$g(x)$ 都是复系数多项式，且 $f^2(x)=xg^2(x)$．　①

则　$f(x)=g(x)=0$．

证明　反设 $f(x)\neq 0$，则 $f^2(x)\neq 0$，且次$(f^2(x))$为偶数．由 ① 式知，多项式 $xg^2(x)$ 也是偶次的，而次$(xg^2(x))$为奇数，矛盾．因此 $f(x)=0$，且 $g(x)=0$．

评注　(1) 此题也可以从反设 $g(x)\neq 0$ 入手去证，方法类似，请读者练习．

(2) 在本题的证明中，利用非零多项式乘积的次数等于多项式的次数的和这一性质，使问题得到解决．由此启发我们把本题作如下推广：设 $f(x)$，$g(x)$ 都是复系数多项式，且 $f^{2k}(x)=x^{2l+1}g^{2t}(x)$，其中 k，l，t 都是自然数，则 $f(x)=g(x)=0$．读者可仿照例 1 给出证明．

本题也可以从另一角度出发作适当推广，请看例 2．

例2　设 $f(x)$，$g(x)$ 和 $h(x)$ 都是实系数多项式，且 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$　①

则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$．当 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 是复系数多项式时，结论如何？

证明　若 $g(x)=h(x)=0$，则结论成立．若 $g(x)$，$h(x)$ 至少有一个不等于零，则由于是实系数多项式，那么 $xg^2(x)+xh^2(x)$ 必为非零多项式，且为奇次，而 $f^2(x)$ 为偶次或零多项式，这与 ① 式矛盾．故得证．

当 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 是复系数多项式时，结论不一定成立．举反例如下：$f(x)=0$，$g(x)=1$，$h(x)=\mathrm{i}$，① 式仍成立．但 $g(x)\neq 0$，$h(x)\neq 0$．

评注　仿照例 1 本题同样可以推广为：

设 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 为三个实系数多项式，且 $f^{2k}(x)=x^{2l+1}g^{2m}(x)+x^{2n+1}h^{2s}(x)$，其中 k，l，m，n，s 都是自然数，则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$．进一步地可以推广为：设 $f(x)$，$g_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 都是实系数多项式，且 $f^2(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}xg_i^2(x)$，则 $f(x)=g_1(x)=\cdots=g_n(x)=0$．读者可以仿照例 2 给出证明．

例3　已知 $a\neq b$，多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 和 $x-b$ 所得的余数分别为 c 和 d，求 $f(x)$ 除

以 $(x-a)(x-b)$ 所得的余式.

解 由余数定理知：$f(a)=c$，$f(b)=d$. 设 $f(x)=(x-a)(x-b)g(x)+mx+n$，则 $ma+n=c$，$mb+n=d$. 解之得：$m=\frac{c-d}{a-b}$，$n=\frac{ad-bc}{a-b}$，故所求余式为 $\frac{c-d}{a-b}x+\frac{ad-bc}{a-b}$.

评注 例 3 的结论说明多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 所得的余式是 $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$，$a\neq b$，由该余式知：当 $f(x)$ 既能被 $x-a$ 整除也能被 $x-b$ 整除时，$f(x)$ 一定能被 $(x-a)(x-b)$ 整除.

将本题稍加延伸、变化即得到 1990 年意大利数学竞赛第 3 题.

例4 设 a，b，c 是 3 个不同的实数，实系数多项式 $p(x)$ 除以 $x-a$，$x-b$ 和 $x-c$ 所得的余数分别为 a，b 和 c，求多项式 $p(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 所得的余式.

分析 利用待定系数法，仿照例 3 的解法，不难给出此题的解答，请读者练习，这里我们给出另外一种解法.

解 因 $p(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余数为 a，故可设 $p(x)=(x-a)Q_1(x)+a$ ①

于是 $p(b)=(b-a)Q_1(b)+a=b$，所以 $Q_1(b)=1$. 故可设 $Q_1(x)=(x-b)Q_2(x)+1$，代入 ① 得

$$p(x)=(x-a)(x-b)Q_2(x)+x \quad ②$$

由 $p(c)=(c-a)(c-b)Q_2(c)+c=c$，得 $Q_2(c)=0$. 故可设 $Q_2(x)=(x-c)Q_3(x)$，代入 ② 得

$$p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)Q_3(x)+x$$

因此 $p(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 所得的余式为 x.

例5 设 $p(x)$ 为整系数多项式，且有六个不同整数 a_1，a_2，…，a_6 使 $p(a_1)=p(a_2)=\cdots=p(a_6)=-12$. 证明不存在整数 k 使 $p(k)=0$.

证明 令 $F(x)=p(x)+12$，则 $F(a_1)=F(a_2)=\cdots=F(a_6)=0$，由因式定理知：$x-a_1$，$x-a_2$，…，$x-a_6$ 是 $F(x)$ 的因式. 故可设 $F(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_6)Q_1(x)$，其中 $Q_1(x)$ 为整系数多项式.

反设存在整数 k，使 $p(k)=0$ 即 $F(k)=12$，亦即 $(k-a_1)(k-a_2)\cdots(k-a_6)Q_1(k)=12$. 因 $Q_1(k)$ 为整数，且 $k-a_1$，$k-a_2$，…，$k-a_6$ 互不相等，其中同一绝对值者至多两个，而 $12=|k-a_1|\cdot|k-a_2|\cdots|k-a_6|\geqslant 1^2\cdot 2^2\cdot 3^2=36$，矛盾.

例6 试找出所有的非常值的多项式 $p(x)$ 使得 $p(2x^2-1)=\frac{1}{2}p^2(x)-1$.

分析 由某些已知条件确定一多项式是一类命题方式，而确定多项式就是要确定其各项系数，这类命题常用比较系数法解之.

解 不存在这样的非常值多项式，若不然，令 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n(a_0\neq 0)$，则 $p(2x^2-1)=a_0(2x^2-1)^n+a_1(2x^2-1)^{n-1}+\cdots+a_n$，

$$\frac{1}{2}p^2(x)-1=\frac{1}{2}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)^2-1.$$

因为

$$p(2x^2-1)=\frac{1}{2}p^2(x)-1,$$

比较两边 x^{2n} 的系数可知 $a_0=2^{n+1}$.

若 a_0，a_1，…，$a_k\in Q$，则比较 x^{2n-k} 的系数可知 $a_{k+1}\in Q$，故 a_0，a_1，…，$a_n\in Q$，所以 $p(1)=a_0+a_1+\cdots+a_n\in Q$.

高三年级·下

但 $p(2\times 1^2-1)=\frac{1}{2}p^2(1)-1$，即 $p^2(1)-2p(1)-2=0$.

解之，$p(1)=1+\sqrt{3}$ 或 $1-\sqrt{3}$，这与 $p(1)\in Q$ 矛盾.

例7 设 $p_k(x)=\underbrace{(\cdots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\cdots-2)^2}_{k\text{个括号}}$，$k$ 是任意给定的自然数，试求 $p_k(x)$ 中 x^2 项的系数.

分析 直接展开显然会陷入困境，不可取，观察 $p_k(x)$ 表达式的特征，启发我们建立递推关系求解.

解 由题意得 $p_k(x)=(p_{k-1}(x)-2)^2$，$p_k(0)=4$. 令 $p_k(x)=\cdots+A_kx^2+B_kx+4$，则

$$p_{k-1}(x)=\cdots+A_{k-1}x^2+B_{k-1}x+4,$$

$$p_k(x)=\cdots+(B_{k-1}^2+4A_{k-1})x^2+4B_{k-1}x+4.$$

所以 $$B_k=4B_{k-1},\ A_k=B_{k-1}^2+4A_{k-1},\ B_1=-4,\ A_1=1.$$

由上式递推关系解得 $B_k=-4^k$，$A_k=\dfrac{4^{2k-1}-4^{k-1}}{3}$.

对某些特殊的数值结构，采用使特殊数值一般化的方法，过渡到多项式进行研究，可以收到以简驭繁的效果.

例8 试求

$$p=(1-1993)(1-1993^2)\cdots(1-1993^{1993})+1993(1-1993^2)(1-1993^3)\cdots(1-1993^{1993})+1993^2(1-1993^3)\cdots(1-1993^{1993})+1993^3(1-1993^4)\cdots(1-1993^{1993})+\cdots+1993^{1992}(1-1993^{1993})+1993^{1993}.$$

分析与解 一般化，p 中第 $k+1$ 项具有如下形式：

$$p_{k,n}(x)=x^k(1-x^{k+1})(1-x^{k+2})\cdots(1-x^n).$$

记 $\phi_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}p_{k,n}(x)$，那么 $p=\phi_{1993}(1993)$.

若能求得 $\phi_n(x)$，问题可望解决. 不难看出：

(1) $k<n$ 时，$p_{k,n}(x)=(1-x^n)p_{k,n-1}(x)$；

(2) $k=n$ 时，$p_{n,n}(x)=x^n$.

可见存在递归关系：$\phi_n(x)=(1-x^n)\phi_{n-1}(x)+x^n$，

两边同时减去 1，得 $\phi_n(x)-1=(1-x^n)(\phi_{n-1}(x)-1)$，

迭代 $n-1$ 次，即得 $\phi_n(x)-1=(1-x^n)(1-x^{n-1})\cdots(1-x^2)[\phi_1(x)-1]$.

因为 $$\phi_1(x)=p_{0,1}(x)+p_{1,1}(x)=(1-x)+x=1,$$

所以 $\phi_n(x)=1$，从而求得 $p=\phi_{1993}(1993)=1$.

原版赛题传真

Problem [AIME 1986]

The polynomial $$1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}-x^{17}$$

may be written in the form $$a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17},$$

where $y = x+1$ and a_is are constants. Find a_2.

Solution 1

Let $f(x)$ denote the given expression. Then $\quad xf(x) = x - x^2 + x^3 - \cdots - x^{18}$

and $$(1+x)f(x) = 1 - x^{18}.$$

Hence $$f(x) = f(y-1) = \frac{1-(y-1)^{18}}{1+(y-1)} = \frac{1-(y-1)^{18}}{y}.$$

Therefore a_2 is equal to the coefficient of y^3 in the expansion of $1-(y-1)^{18}$,

i. e., $a_2 = \binom{18}{3} = 816$.

Solution 2

Let $f(x)$ denote the given expression. Then

$$\begin{aligned} f(x) = f(y-1) &= 1-(y-1)+(y-1)^2 - \cdots - (y-1)^{17} \\ &= 1+(1-y)+(1-y)^2+\cdots+(1-y)^{17}. \end{aligned}$$

Thus $\quad a_2 = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{17}{2} = \binom{18}{3}$.

Here we used the formula $\quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

and the fact that $\quad \binom{2}{2} = \binom{3}{3} = 1$.

同步训练

1. (1) 用因式定理证明 $a-b$, $b-c$, $c-a$ 都是 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 的因式.
   (2) 利用(1)的结论将 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 分解因式.
   (3) 分解因式：$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

2. 设 $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，式中各系数 $a_i(i=0, 1, \cdots, k)$ 都是整数，今设有四个不同的整数 x_1, x_2, x_3, x_4 使 $P(x_i)(i=1, 2, 3, 4)$ 都等于2，试证明：对于任何整数 x，$P(x)$ 决不等于 1, 3, 5, 7, 9 中的任何一个.

3. 设 $P(x)$ 是整系数多项式，$P(2)$，$P(3)$ 都是 6 的倍数，求证：$P(5)$ 也是 6 的倍数.

4. 设 k 是正整数，求一切多项式 $P(x) = a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0 x^n$，其中 a_i 是实数，满足等式 $P(P(x)) = (P(x))^k$.

5. 求所有满足 $P(x^2) \equiv (P(x))^2$，$x \in \mathbf{R}$ 的非零多项式 $P(x)$.

6. 求所有满足 $P(x^2-2x) \equiv (P(x-2))^2$，$x \in \mathbf{R}$ 的非零多项式 $P(x)$.

第2讲　多项式的整除

考虑算术的最好方法，就是研究代数.

——卡约里

知识方法扫描

1. 整除的定义

在带余除式 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$ 中，当余式 $r(x)=0$ 时，有 $f(x)=g(x)\cdot q(x)$，此时称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记为 $g(x)\mid f(x)$，并称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式，而称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式. 当 $g(x)$ 不整除 $f(x)$ 时，记为 $g(x)\nmid f(x)$.

2. 整除的基本性质

多项式与整数有紧密联系，它们的整除性也有许多相似之处. 由多项式整除的定义，容易证明如下关于多项式整除的性质：

(1) $g(x)\mid f(x)$ 且 $f(x)\mid g(x)\Leftrightarrow f(x)=cg(x)$，其中 c 是非零常数.

(2) $g(x)\mid f(x)$ 且 $f(x)\mid h(x)\Rightarrow g(x)\mid h(x)$.

(3) $g(x)\mid f(x)$，$g(x)\mid h(x)\Rightarrow g(x)\mid [u(x)f(x)+v(x)h(x)]$，其中 $u(x)$，$v(x)$ 为两个任意多项式.

特殊地，有 $g(x)\mid f(x)$，$g(x)\mid h(x)\Rightarrow g(x)\mid [f(x)\pm h(x)]$.

3. 整除性问题的处理方法

(1) 利用整除的定义.

(2) 利用整除的性质.

(3) 利用带余除法.

(4) 利用数学归纳法.

(5) 利用因式定理.

经典例题解析

例1　试证：$x\mid f^k(x)$ 的必要和充分条件是 $x\mid f(x)$，其中 $k\in\mathbf{N}$.

证明　先证充分性. 由 $x\mid f(x)$ 及整除定义可知，存在多项式 $q(x)$ 使得 $f(x)=x\cdot q(x)$，所以 $f^k(x)=x^kq^k(x)$，再由整除定义得 $x\mid f^k(x)$.

再证必要性. 用反证法，若 $x\nmid f(x)$，则由带余除法可令 $f(x)=x\cdot q(x)+r$ 且 r 是非零常数. 于是　$f^k(x)=x[x^{k-1}q^k(x)+\cdots+C_k^{k-1}q(x)r^{k-1}]+r^k$.

因为 $r^k\neq 0$，所以 $x\nmid f^k(x)$，这与已知 $x\mid f^k(x)$ 矛盾.

评注　本例综合运用整除定义、带余除法、反证法和二项式定理，读者只要熟知这些内容，证明是容易得到的. 如果把 x 换为 $ax+b$，且 $a\neq 0$，那么，结论仍成立，读者不难仿照本例

给出证明.

例2 试证：$x^2+x+1 \mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$，其中 m, n, p 是任意非负整数.

证明 首先由乘法公式易知：$x^3-1 \mid x^{3m}-1$，$x^3-1 \mid x^{3n}-1$，$x^3-1 \mid x^{3p}-1$. 又因 $x^{3n}-1 \mid x^{3n+1}-x$，$x^{3p}-1 \mid x^{3p+2}-x^2$，且 $x^2+x+1 \mid x^3-1$. 由性质 2 得

$$x^2+x+1 \mid x^{3m}-1,\ x^2+x+1 \mid x^{3n+1}-x,\ x^2+x+1 \mid x^{3p+2}-x^2.$$

而 $$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}=(x^{3m}-1)+(x^{3n+1}-x)+(x^{3p+2}-x^2)+(x^2+x+1).$$

由性质 3 知 $$x^2+x+1 \mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}.$$

评注 这里为了应用整除的性质，把 $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ 作适当的变形(添加适当的项)—— 分成若干组，使每组都能被 x^2+x+1 整除. 这是一个常用的技巧.

例3 设 a 为整数使 x^2-x+a 能整除 $x^{13}+x+90$. 试求 a 的值.

分析 本题可用 x^2-x+a 去除 $x^{13}+x+90$，令所得的余式(最多为一次式)之系数为 0 去求 a. 也可用 $x^2-x+a=0$ 之根 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$ 代入 $x^{13}+x+90=0$ 去求 a. 但这两种方法都较麻烦.

由题设知，必有整系数多项式 $q(x)$，使 $x^{13}+x+90=(x^2-x+a)q(x)$.

这是一个恒等式，对 x 的一切值都应成为等式，因此取 $x=0, \pm 1$ 进行分析即得如下解法.

解 由题设知，必有整系数多项式 $q(x)$，使 $x^{13}+x+90=(x^2-x+a)q(x)$ ①

注意方程 $x^{13}+x+90=0$ 显然无正根，因此 $x^2-x+a=0$ 也一定无正根. $x^2-x+a=0$ 之根可表示为 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$. 由此知 $1-4a<0$，所以 $a>0$.

令 $x=0$，由 ① 式知 $a \mid 90$.

令 $x=1$，由 ① 式知 $a \mid 92$. 因此 $a \mid (92-90)$，即 $a \mid 2$，由 $a>0$ 知 $a=1$ 或 $a=2$.

再令 $x=-1$，由 ① 式知$(a+2) \mid 88$. 因此 $a=1$ 不可能.

综上知 $a=2$.

例4 (a) 对怎样的 $n\in\mathbf{N}$，有 $x^2+x+1 \mid x^{2n}+x^n+1$?

(b) 对怎样的 $n\in\mathbf{N}$，有 $37 \mid 1\underbrace{0\cdots0}_{n}1\underbrace{0\cdots0}_{n}1$?

解法 1 (a) 直接利用下述关系进行变换：

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),\ x^3-1 \mid x^{3m}-1.$$

(ⅰ) $n=3k \Leftrightarrow x^{6k}+x^{3k}+1=(x^{6k}-1)+(x^{3k}-1)+3=(x^2+x+1)Q(x)+3.$

(ⅱ) $n=3k+1 \Leftrightarrow x^{6k+2}+x^{3k+1}+1=x^2(x^{6k}-1)+x(x^{3k}-1)+x^2+x+1$
$=(x^2+x+1)R(x).$

(ⅲ) $n=3k+2 \Leftrightarrow x^{6k+4}+x^{3k+2}+1=x^4(x^{6k}-1)+x^2(x^{3k}-1)+x^4+x^2+1=x^4(x^{6k}-1)+x^2(x^{3k}-1)+x(x^3-1)+x^2+x+1=(x^2+x+1)S(x).$

答案为 $$x^2+x+1 \mid x^{2n}+x^n+1 \Leftrightarrow 3\nmid n.$$

(b) 当 $x=10$ 时，$x^2+x+1=111$，$x^{2(n+1)}+x^{n+1}+1=1\underbrace{0\cdots0}_{n}1\underbrace{0\cdots0}_{n}1$，$111=3\cdot 37$.

由于所给被除数的数码和为 3，故它是 3 的倍数. 从而 $37 \mid 1\underbrace{0\cdots0}_{n}1\underbrace{0\cdots0}_{n}1$，当且仅当 $n\equiv 0$ (mod

3) 或 $n\equiv 1 \pmod 3$.

解法 2 设 $x^2+x+1=0$ 的根为 w, w^2. 利用关系式 $w^3=1$ 及 $w^2+w+1=0$,得到

$$n=3k\Rightarrow w^{6k}+w^{3k}+1=1+1+1=3,$$

$$n=3k+1\Rightarrow w^{6k+2}+w^{3k+1}+1=w^2+w+1=0,$$

$$n=3k+2\Rightarrow w^{6k+4}+w^{3k+2}+1=w^4+w^2+1=w+w^2+1=0.$$

例5 设 $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ 及 $S(x)$ 都是多项式,且满足

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x) \qquad ①$$

试证: $x-1\mid P(x)$.

证明 方程 $x^5-1=0$ 的根为 1, w, w^2, w^3, w^4,这里 w 是任一五次单位根,对于 w^k,我们有 $(w^k)^5=(w^5)^k=1$(k 为整数),又有 $1+w+w^2+w^3+w^4=0$.

依次将 $x=w$, w^2, w^3 代入方程 ① 可得

$$P(1)+wQ(1)+w^2R(1)=0 \qquad ②$$

$$P(1)+w^2Q(1)+w^4R(1)=0 \qquad ③$$

$$P(1)+w^3Q(1)+w^6R(1)=0 \qquad ④$$

这说明一元二次多项式 $F(x)=P(1)+Q(1)x+R(1)x^2$ 有三个不同的根: 1, w, w^2. 由多项式相等定理知: $P(1)=Q(1)=R(1)=0$,故 $x-1\mid P(x)$.

评注 这里我们由等式 ②、③、④ 和多项式根的定义,顺理成章地构造出以 1, w, w^2 为根的一元二次多项式 $F(x)=P(1)+Q(1)x+R(1)x^2$,使得解题过程大为简化,比通常采用的消元法简捷得多. 而且同时推出了 $x-1\mid Q(x)$, $x-1\mid R(x)$. 若在 ① 中令 $x=1$ 则可推得 $S(1)=0$,从而 $x-1\mid S(x)$.

例6 若多项式 $x^{2k}+1+(x+1)^{2k}$ 不被 x^2+x+1 整除,求 k.

解 设 w 为 1 的三次虚根,则 $w^3=1$, $w^2+w+1=0$,于是 w 是 $x^2+x+1=0$ 的根.

当 $k=3l$(l 是非负整数)时, $w^{2k}+1+(w+1)^{2k}=1+1+(-w^2)^{2k}=3$;

当 $k=3l+1$ 时, $w^{2k}+1+(w+1)^{2k}=w^2+1+w=0$;

当 $k=3l+2$ 时, $w^{2k}+1+(w+1)^{2k}=w+1+w^2=0$.

即当且仅当 $3\mid k$ 时, w 不是 $x^{2k}+1+(x+1)^{2k}=0$ 的根,故本题答案就是 $3\mid k$.

评注 1981 年奥地利数学竞赛有这样一道题: 问正整数 n 为何值时, $(x^2+x+1)\mid[x^{2n}+1+(x+1)^{2n}]$.

由例 6 的解答知,当且仅当正整数 n 不能被 3 整除时, $(x^2+x+1)\mid[x^{2n}+1+(x+1)^{2n}]$.

例7 证明: 对任意多项式 $P(x)\not\equiv x$ 和任意 $n\in\mathbf{N}$,多项式 $Q_n(x)=\underbrace{P(P(\cdots P(x)\cdots))}_{n个P}-x$ 被多项式 $Q_1(x)=P(x)-x$ 整除.

证明 对 $n\in\mathbf{N}$ 用归纳法. 因为多项式 $Q_1(x)$ 被自身整除,所以当 $n=1$ 时结论成立. 假设恒等式 $Q_n(x)\equiv R_n(x)Q_1(x)$ 对某个 n 成立,其中 $R_n(x)$ 是多项式,则有

$$\begin{aligned}Q_{n+1}(x)&\equiv P(Q_n(x)+x)-x\equiv P(R_n(x)Q_1(x)+x)-x\\&\equiv(P(R_n(x)Q_1(x)+x)-P(x))+(P(x)-x).\end{aligned}$$

设 $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}a_kx^k$,则

$$Q_{n+1}(x)\equiv\sum_{k=0}^{m}a_k((R_n(x)Q_1(x)+x)^k-x^k)+Q_1(x)$$
$$\equiv\sum_{k=0}^{m}a_kR_n(x)Q_1(x)S_k(x)+Q_1(x)$$
$$\equiv Q_1(x)\Big(1+\sum_{k=0}^{m}a_kR_n(x)S_k(x)\Big).$$

其中 $S_k(x)=\sum_{j=0}^{k-1}(R_n(x)Q_1(x)+x)^jx^{k-j-1}$.

这里应用了等式 $a^k-b^k=(a-b)\sum_{j=0}^{k-1}a^jb^{k-j-1}$，并取 $a=R_n(x)Q_1(x)+x$，$b=x$.

这就证明，结论对 $n+1$ 成立.

例8 试证：对任何整系数多项式 $p(x)$，不存在不同的整数 x_1，x_2，…，$x_n(n\geqslant3)$使得 $p(x_1)=x_2$，$p(x_2)=x_3$，…，$p(x_{n-1})=x_n$，$p(x_n)=x_1$.

证明 反设结论不成立.易证当 $a\neq b$ 时，必有 $(a-b)\mid[p(a)-p(b)]$，所以 $|a-b|\leqslant|p(a)-p(b)|$.

依次取 a，b 为 x_i，x_{i+1}，$i=1$，2，…，n(记 $x_{n+1}=x_1$)，则得

$$|x_1-x_2|\leqslant|x_2-x_3|\leqslant\cdots\leqslant|x_{n-1}-x_n|\leqslant|x_n-x_1|\leqslant|x_1-x_2|.$$

所以只有 $|x_1-x_2|=|x_2-x_3|=\cdots=|x_n-x_1|$.

当 $n\geqslant3$ 时，若 i 使得 $x_{i-1}-x_i$ 与 x_i-x_{i+1} 异号，则由上式即知 $x_{i-1}-x_i=-(x_i-x_{i+1})$.

从而 $x_{i-1}=x_{i+1}$，这与题设矛盾.因而对于任何 i，均有 $x_{i-1}-x_i=x_i-x_{i+1}$，此时，若 $x_1\geqslant x_2$，则 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_1$，因此 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 矛盾.若 $x_1<x_2$，则 $x_1<x_2<\cdots<x_n<x_1$ 也矛盾.得证.

评注 (1) 在解题中我们由整除关系导出不等关系，又由不等关系导出相等，值得认真回味.(2) 在此题中取 $n=3$，即为第 3 届美国数学奥林匹克第 1 题.

原版赛题传真

Problem

Determine all real polynomials $P(x)$ of degree not exceeding 5, such that $P(x)+1$ is divisible by $(x-1)^3$ and $P(x)-1$ is divisible by $(x+1)^3$.

Solution

Let $P(x)$ be as required; then $P(x)+1=(x-1)^3Q(x)$, $P(x)-1=(x+1)^3R(x)$, with $Q(x)$ and $R(x)$ real polynomials of degree 2 (at most). In each of them the leading coefficient is the same as in $P(x)$ (zero not excluded), and thus $Q(x)=ax^2+bx+c$, $R(x)=ax^2+px+q$. The postulated identities result in $P(x)+1=(x^3-3x^2+3x-1)(ax^2+bx+c)$, i. e., $P(x)+1=ax^5+(b-3a)x^4+(c-3b+3a)x^3+(-3c+3b-a)x^2+(3c-b)x-c$ and, analogously, $P(x)-1=ax^5+(p+3a)x^4+(q+3p+3a)x^3+(3q+3p+a)x^2+(3q+p)x+q$.

Hence, comparing the coefficients,