

高等数学达标训练

第二版

陈孝萱 谢兴武 朱荣昌 主编

GAO DENG SHUXUE DABIAO XUNLIAN

武汉工业大学出版社

高等数学达标训练

(第二版)

主 编 陈孝萱 谢兴武 朱荣昌
副主编 李德宜 姚金城 谢 鹏 管典安

武汉工业大学出版社

(鄂)新登字 13 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学达标训练/陈孝萱等主编. —2 版. —武汉:武汉工业大学出版社,1995.7 重印
ISBN 7-5629-0994-6

I. 高… I. 陈… III. 高等数学-习题-高等学校-教学参考资料 IV.O13

武汉工业大学出版社出版发行
(武汉市珞狮路 14 号 邮政编码 430070)

湖北省国营华严彩印厂印刷

开本:787×1092 1/16 印张:19.125 字数:385 千字
1993 年 12 月第 1 版 1995 年 7 月第 2 版 1995 年 7 月第 2 次印刷
印数:8001—18000 册
定价:15.80 元

第一版前言

本书按照同济大学《高等数学》(第三版)的章节次序编写,基本上每节安排一份习题(个别情况下,也有将前后两节合成一节的,打*号的节则一律删去),在选题和编排上注意了以下几点:

1. 题量充足,但不过多,教师在使用时可酌情适量增删,但一般不需要作很大变动。
2. 编入了大量标准化题(是非判断、单项选择、填空),希望通过这些习题,使学生对基本概念和定理理解得更深刻、更细微些,另外也可使教师在批改作业方面节省不少时间和精力。
3. 在基本题下留出了做题的空白,使学生节省了抄题的时间,也方便了批阅。
4. 每一节都选了少量参考题,参考题一般不要求学生作为作业完成(因此未留空白),只供有余力的同学选作。
5. 每一章末安排一次复习自测题,供学生在学完一章后复习提高用。
6. 采取活页形式以便教师检查和批阅,答案部分集中排印,教师可根据本班情况,在适当的时候将答案发给学生。
7. 为了节省篇幅,答案部分只给出标准化题及计算题的答案,一般不给出图象,部分证明题给出提示或证明要点(写得比较简略,不能作为学生在证题时的书写规范)。

本书由武汉工业大学、中国地质大学、武汉钢铁学院部分教师联合编写,具体分工是:工大——第一、十一章(陈孝萱),第二、七章(朱荣昌),第六章(管典安),地大——第三、五、十二章(谢兴武),第四章(姚金城);钢院——第八、九章(李德宜),第十章(谢鹏)。

限于编者的水平和编写时间的仓促,错误和缺点恐怕在所难免,诚恳希望读者批评指正。

编者

1993. 7. 20

第二版前言

本版在版面安排上较第一版作了较大的改动,主要给教师批阅作业带来更大的方便。在第一版的基础上,本版将内容分成四大块,使得其结构更加合理。

其一,计算练习题部分供读者课后作业。习题配置大体与课时内容一致,题型选择面宽,重点突出且少而精,能充分反映出《高等数学》各章节的基本内容、基本概念与基本方法的训练,同时也是《高等数学》课后学习所必不可少的重要环节;其二,标准化题(含是非判断、单项选择题)部分供读者课后复习用。该部分以基本概念、常用解题方法为主,从正反两个方面指出学习过程中常犯与易犯的各类错误。对于读者正确理解基本概念、巩固基本方法的掌握会起到很大的作用;其三,参考题部分结合历届研究生入学考试的基本要求,按章节精选了一定的典型的难度稍大的题目。一方面为教师习题课的选题提供了一定的素材;另一方面,读者可用来提高自身的数学素质,并为考研作好进一步的准备;其四,题目的答案与提示部分供读者参考(参考题有较为详细的解答)。

此外,我们还编印了专供教师批阅作业用的计算练习题部分的详细解答。且解答部分的页码及版面形式与本书完全保持一致。同时,每次作业集中于一页纸,相信一定会让教师批阅作业时感到轻松自如。需要解答者请与武汉工业大学出版社发行科联系。

该项修订具体工作由谢兴武(第一、二、三章)、姚金城(第四章)、朱荣昌(第五、六章)、管典安(第七章)、李德宜(第八、九章)、谢鹏(第十、十一章)、陈孝萱(第十二章)等同志完成。并由谢兴武完成第一至第六章的编审,朱荣昌完成第七至第十二章的编审。

因修订工作量较大、时间仓促,仍难免存在一些错误,恳请读者批评指正。

编者

1995.7.10

目 录

第一部分 计算练习题

第一章 函数与极限	3	第三章 中值定理与导数应用	39
§ 1-1 函数	3	§ 3-1 中值定理	39
§ 1-2 初等函数	3	§ 3-2 罗必塔法则	41
§ 1-3 数列的极限	5	§ 3-3 泰勒公式	43
§ 1-4 函数的极限	7	§ 3-4 函数单调性的判定法	45
§ 1-5 无穷小与无穷大	9	§ 3-5 函数的极值及其求法	46
§ 1-6 极限运算法则	11	§ 3-6 最大值、最小值问题	47
§ 1-7 极限存在的准则 两个重要极 限	13	§ 3-7 曲线的凹凸与拐点	49
§ 1-8 无穷小的比较	15	§ 3-8 函数图形的描绘	50
§ 1-9 函数的连续性与间断点	17	§ 3-9 曲率	51
§ 1-10 连续函数的运算与初等函数的 连续性	19	§ 3-10 方程的近似解	52
§ 1-11 闭区间上连续函数的性质	21	自测题 3	53
自测题 1	23	第四章 不定积分	55
第二章 导数与微分	25	§ 4-1 不定积分的概念与性质	55
§ 2-1 导数概念	25	§ 4-2 换元积分法	57
§ 2-2 函数的和、差、积、商的求导法则	27	§ 4-3 分部积分法	60
§ 2-3 反函数的导数 复合函数的求 导法则	29	§ 4-4 几种特殊类型函数的积分	61
§ 2-4 初等函数的求导 双曲函数的 导数	31	自测题 4	64
§ 2-5 高阶导数	32	第五章 定积分	65
§ 2-6 隐函数的导数 由参数方程确 定的函数导数 相关变化率	33	§ 5-1 定积分概念	65
§ 2-7 函数的微分	35	§ 5-2 定积分的性质 中值定理	66
§ 2-8 微分在近似计算中的应用	35	§ 5-3 微积分基本公式	67
自测题 2	37	§ 5-4 定积分的换元法	69
		§ 5-5 定积分的分部积分法	71
		§ 5-6 定积分的近似计算	72
		§ 5-7 广义积分	73
		自测题 5	75
		第六章 定积分的应用	77
		§ 6-1 定积分的元素法	77
		§ 6-2 平面图形的面积	77
		§ 6-3 体积	79

§ 6-4 平面曲线的弧长	80	§ 10-2 对坐标的曲线积分	135
§ 6-5 功 水压力和引力	81	§ 10-3 格林公式及其应用	137
§ 6-6 平均值	82	§ 10-4 对面积的曲面积分	139
自测题 6	83	§ 10-5 对坐标的曲面积分	141
第七章 空间解析几何与向量代数	85	§ 10-6 高斯公式与斯托克斯公式	143
§ 7-1 空间直角坐标系	85	自测题 10	145
§ 7-2 向量及其加减法 数乘	85	第十一章 无穷级数	147
§ 7-3 向量的坐标	85	§ 11-1 常数项级数的概念和性质	147
§ 7-4 数量积 向量积 混合积	87	§ 11-2(1) 常数项级数的审敛法	149
§ 7-5 曲面及其方程	89	§ 11-2(2) 常数项级数的审敛法(续)	151
§ 7-6 空间曲线及其方程	91	§ 11-3 广义积分的审敛法 Γ -函数*	153
§ 7-7 平面及其方程	93	§ 11-4 幂级数	153
§ 7-8 空间直线及其方程	95	§ 11-5 函数展开成幂级数	155
§ 7-9 二次曲面	97	§ 11-6 函数的幂级数展开式的应用	157
自测题 7	99	§ 11-7 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质*	159
第八章 多元函数的微分法及应用	101	§ 11-8 傅立叶级数	159
§ 8-1 多元函数	101	§ 11-9 正弦级数和余弦级数	161
§ 8-2 偏导数	103	§ 11-10 周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数	162
§ 8-3 全微分	105	自测题 11	163
§ 8-4 多元函数的求导法则	107	第十二章 微分方程	165
§ 8-5 隐函数的求导	109	§ 12-1 微分方程的基本概念	165
§ 8-6 微分法在几何中的应用	111	§ 12-2 可分离变量的微分方程	167
§ 8-7 方向导数与梯度	113	§ 12-3 齐次方程	169
§ 8-8 极值	115	§ 12-4 一阶线性微分方程	171
自测题 8	117	§ 12-5 全微分方程	173
第九章 重积分	119	§ 12-7 可降阶的高阶微分方程	175
§ 9-1 二重积分的性质	119	§ 12-8 高阶线性微分方程	177
§ 9-2(1) 二重积分的计算	121	§ 12-9(1) 二阶常系数齐次线性微分方程	178
§ 9-2(2) 二重积分的极坐标计算	123	§ 12-9(2) 二阶常系数齐次线性微分方程(续)	179
§ 9-3 二重积分的应用	125		
§ 9-4 三重积分的计算	127		
§ 9-5 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	129		
自测题 9	131		
第十章 曲线积分与曲面积分	133		
§ 10-1 对弧长的曲线积分	133		

§ 12-10 二阶常系数非齐次线性微分 方程	181
----------------------------------	-----

自测题 12	183
--------------	-----

第二部分 标准化试题

第一章 函数与极限	187	第七章 空间解析几何与向量代数	211
第二章 导数与微分	192	第八章 多元函数的微分法及应用	216
第三章 中值定理与导数应用	195	第九章 重积分	218
第四章 不定积分	200	第十章 曲线积分与曲面积分	220
第五章 定积分	205	第十一章 无穷级数	223
第六章 定积分的应用	209	第十二章 微分方程	228

第三部分 参考题

第一章 函数与极限	237	第七章 空间解析几何与向量代数	243
第二章 导数与微分	238	第八章 多元函数的微分法及应用	244
第三章 中值定理与导数应用	239	第九章 重积分	245
第四章 不定积分	240	第十章 曲线积分与曲面积分	246
第五章 定积分	241	第十一章 无穷级数	247
第六章 定积分的应用	242	第十二章 微分方程	248

第四部分 答案与提示

一、计算练习题	251	三、参考题	279
二、标准化试题	276		

第一部分

计 算 练 习 题

THE
LIBRARY OF THE
CONGRESS

1891

1892

1893

1894

1895

第一章 函数与极限

§ 1-1 函 数

§ 1-2 初等函数

一、填空题

1. 若 $f(x) = x^3 + 1$, 则 $[f(x)]^2 - f(x^2) =$ _____.

2. 若 $f(\ln x) = x^2 - x, 0 < x < +\infty$, 则 $f(x) =$ _____.

3. $\varphi(x) = x^2, \psi(x) = 2^x$, 则 $\varphi[\varphi(x)] =$ _____, $\varphi[\psi(x)] =$ _____, $\psi[\varphi(x)] =$ _____, $\psi[\psi(x)] =$ _____.

4. $f(x) = \begin{cases} 1 & , |x| < 1, \\ 0 & , |x| = 1, \\ -1 & , |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = e^x$, 则 $f[g(x)] = \begin{cases} \end{cases}$

$g[f(x)] = \begin{cases} \end{cases}$

5. 函数 $y = \log_2[\log_3(\log_4 x)]$, 定义域是 _____.

6. $y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}$, 定义域是 _____.

二、设 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, $F(x) = f(x-m) + f(x+m), (m > 0)$, 求 $F(x)$ 的定义域.

三、设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

四、求下列函数的反函数

1. $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$

2. $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$

五、作函数图象

设 $y = f(x)$ 的图形如图 1-1 所示, 试作下列各函数的图形.

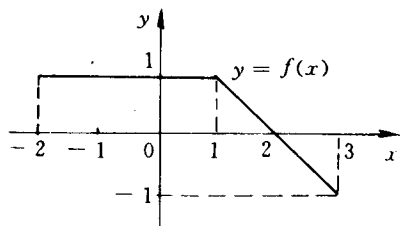


图 1-1

(1) $y = f(x) - 1$

(2) $y = f(x + 1)$

(3) $y = -f(-x)$

(4) $y = |f(x)|$

六、设 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$, a, b, c 为常数, 且 $|a| \neq |b|$, (1) 求 $f(x)$ 表达式, (2) 证明 $f(x)$ 为奇函数.

七、设正圆锥的高 H , 底半径为 R , 现作一个与顶点相距为 x , 且与底平行的平面, 将锥体截成两部分, 试将这两部分体积表为 x 的函数.

§ 1-3 数列的极限

一、填空题

1. 已知数列 $x_n = \frac{1+n}{1+n^2}$, 则 $x_1 =$ _____, $x_2 =$ _____, $x_3 =$ _____.

2. x_n 同上, $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$, 则 $s_1 =$ _____, $s_2 =$ _____, $s_3 =$ _____.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} =$ _____; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right) =$ _____; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{4n-3} =$ _____; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} =$ _____.

4. 如果对任给 ε _____, 总存在正数 N , 使得对于 _____ 时的一切 x_n , 不等式 _____ 都成立, 则说 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

二. 若 $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$, 前 n 项和 $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 写出 s_1, s_2, s_3 与 s_n , 问 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = ?$

三、根据数列极限定义证明

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1$

四、若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$, 并举例说明反过来未必成立.

五、若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 又数列 y_n 有界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

六、对于数列 x_n , 若 $x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, $x_{2k+1} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 证明 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

§ 1-4 函数的极限

一、填空题

1. $f(x) = \frac{|x|}{x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 如果对 $\underline{\hspace{2cm}} \varepsilon > 0$, 总 ~~有~~ 存在 正数 X , 使得对适合不等式 ~~$x < -X$~~ $x < -X$ 的一切 x , 总有 , 则常数 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时的极限, 记作 .

3. 根据极限的定义, 填写下表:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$	任给 $\varepsilon > 0$, 总存在		使得当		时, 就有 $ f(x) - A < \varepsilon$
$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$					
$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$					
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$					
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$					
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$					

二、根据函数极限的定义证明

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (6x + 3) = 15$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0$

三、用函数极限定义证明 $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$. (提示: 因为 $x \rightarrow 2$, 不妨设 $1 < x < 3$).

四、根据极限定义证明: 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在且相等.

五、求函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ ax + b, & x > 0, \end{cases} \quad g(x) = [x]$

在 $x = 0$ 的左、右极限, 并说明它们在 $x \rightarrow 0$ 时极限是否存在.

§ 1-5 无穷小与无穷大

一、填空题

1. 如果 α 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) = 3 + \alpha, g(x) = \alpha - 1$, 那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 且 $\underline{\hspace{2cm}}$, 那末 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

3. 根据无穷大的定义, 填写下表:

	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow x_0$			
$x \rightarrow x_0 + 0$			
$x \rightarrow x_0 - 0$			
$x \rightarrow \infty$		任给 $M > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $ x > X$ 时, 就有 $f(x) > M$	
$x \rightarrow +\infty$			
$x \rightarrow -\infty$			

4. 指出下列函数哪些是无穷大量, 哪些是无穷小量.

$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$, 当 $x \rightarrow -2$ 时, 是 无穷小量.

$g(x) = \ln x$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 是 无穷小量.

$h(x) = e^{\frac{1}{x}}$, 当 $x \rightarrow -0$ 时, 是 无穷大量; 而当 $x \rightarrow +0$ 时, 是 无穷小量.

$u(x) = \frac{\pi}{2} - \arctg x$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 是 无穷小量.