普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学模块化系列教材

总主编　俞瑞钊

集合初步

JIHE CHUBU

陈　亮　编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学模块化系列教材

J I H E   C H U B U

总主编　俞瑞钊

集合初步

JIHE CHUBU

◆陈　亮编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

集合初步／俞瑞钊，陈亮主编．—杭州：浙江大学出版社，2007.12
ISBN 978-7-308-05616-8

Ⅰ.集… Ⅱ.俞…②陈… Ⅲ.集论—高等学校—教材
Ⅳ.0144

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 164236 号

集合初步

陈　亮　编

责任编辑　严少洁
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn）
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　6
字　　数　107 千
版 印 次　2007 年 12 月第 1 版　2007 年 12 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05616-8
定　　价　10.00 元

内容简介

本书是“高等数学模块化系列教材”之一，是适合于计算机类、信息类各专业的公共课教材。本书只讲解集合和二元关系的相关知识，计划18课时，1学分。

本书共分为两章：第1章主要介绍集合的相关概念，集合的基本运算和集合在计数上的应用；第2章讲述二元关系的相关知识，前两节介绍二元关系的相关概念和基本运算，第三节介绍几种特殊的二元关系及它们的判断方法，第四节为关系的闭包，介绍如何构造特殊二元关系，最后一节为等价关系与划分。书中每节后面都有练习题，每章后面有复习题，帮助学生复习巩固所学知识。此外，本书最后有两个附录，附录一为各章节的习题参考答案，附录二为阅读材料(介绍康托)。

本书由俞瑞钊主编，陈亮编写完成。由于作者水平有限，书中难免有不足甚至错误之处，敬请读者不吝赐教。

高等数学模块化系列教材编委会

前　言

中国高等教育在“十一五”期间的一个主题是走向内涵发展的道路。对每个高等职业技术学院来讲，最重要的任务除了要建设一支具有相当水平的师资队伍，要构建一个对人才培养必须具备的高效的产学研结合体系之外，就是要有一个与高职定位相吻合的高等职业技术课程技术。这其中，基础课，特别是数学课是我们不可能回避、又是极为重要的课程。

在高等教育的精英阶段发展起来的高等专科学校，数学课遵循的是“必需、够用”的原则。当时，数学基本上就是“微积分”、“线性代数”、“概率论与数理统计”三门课，学时也都在150～200学时之间，内容基本上是本科生内容的简化。当高等教育进入大众化阶段后，高等职业技术学院的定位发生了很大变化，学生生源发生了很大变化。我们培养的人才是社会上各类岗位的技能型、应用型人才，而学生的数学基础明显薄弱，单凭主观想象和判断来对数学内容进行取舍就会遇到许多矛盾。因此，数学课的改革便成为高职教育的重要课题。

“必需、够用”在这种新形势下如何赋予新的内涵，并在此方针下进行数学课的改革是非常重要的。我们以为“必需、够用”不能以数学自身的学科系统来衡量，不能由数学教师的爱好来决定，也不能由学校统一规定课程的学时和内容。“必需、够用”要由每个专业的职业岗位需求来决定，要由每个专业的专业要求来决定，要由学生的实际基础来决定。为此，近几年来，我们进行了数学课的实用化、小型化、模块化的改革探索。这套系列教材便是这种改革的阶段性成果。

本系列教材将高等数学分为5个小型化模块，分别为：《微积分》、《矩阵方法》、《概率与统计方法》、《集合初步》和《图的方法》，除了《微积分》为36学时外，其他课程均为18学时，前三门课程提供给任一专业选择，后两门课

主要是为大量的信息类专业选择。为了满足有兴趣并需要提高的学生的要求,我们又组织编写了《应用数学基础》,内容包括多元微积分、微分方程、矩阵特征值与特征向量、矢量代数和空间解析几何、无穷级数等。

本系列教材具有以下鲜明特点:

1. 注重实用性

系列教材力求从实际问题出发,从学生容易理解的角度自然地、直观地引入数学概念和定义,淡化数学严密的理论体系,突出培养学生的知识应用能力;并借助于常用数学软件训练学生的实际动手操作能力,注重数学作为工具的实用性。

2. 小型化、模块化,兼顾包容性和可选择性

我们根据高职院校对数学知识的要求,对数学课内容进行重组,总共设立了 5 个模块。各专业可根据自己的专业特点和相应职业岗位的需求选择不同的模块进行教学,把“必需、够用”的尺度掌握在各专业自己手中,更好地发挥数学知识为专业服务的功能。同时,每本教材都精选了大量例题,涵盖几何学、经济学、力学、工程学和电学等方面内容,任课教师可根据专业需要和学生基础选讲其中的合适例题,真正做到因材施教。

3. 注重学生逻辑思维能力的培养

通过数学课如何培养学生的逻辑思维能力仍是一项重要任务。根据高职教育的特点,我们着重直观地讲解推理过程,尽量少用抽象的严密的逻辑,同时通过对学生学习过程中常见错误的纠正,培养学生正确的逻辑思维方法。

如何选择数学课的内容,如何让学生对数学产生兴趣,并让学生掌握今后工作和学习需要的数学知识和抽象思维能力,都需要我们通过实践不断改进和提高。由于改革和探索的时间较短,加上水平的限制,定有许多不足甚至错误之处,敬请老师和同学们不吝赐教。

编　者

2007 年 5 月

目　录

第1章 集　　合

自从19世纪末著名的德国数学家康托(1845—1918)为集合论做奠基工作以来，集合论在100多年的时间里，已经成为数学中不可缺少的基本的描述工具，集合已成了现代数学中最重要的基本概念之一. 本章主要介绍朴素集合论(也称康托集合论体系)的基本内容，包括集合以及有关子集、空集、全集、补集、幂集等基本概念；集合的基本运算和集合运算的有关公式.

1.1 集合的基本概念

1.1.1 集合的概念

众所周知，概念是数学理论的基础. 有些数学概念是可以由其他概念来定义的，例如在平面几何中，正方形可以定义为邻边相等的矩形. 其中用到了"矩形"这个概念. 也有些概念是无法用其他概念来定义的，例如平面几何中的点、直线等. 集合就如同平面几何中的点、直线等概念一样，是一个不能用其他概念来定义的概念，我们只能给出说明性的描述.

定义 1.1 直观地说，把一些事物汇集到一起组成的一个整体就叫做集合，而这些事物就是这个集合的元素或成员.

例 1 以下是一些集合的例子：

(1)大红鹰职业技术学院全体学生构成一个集合.

(2)26 个英文字母构成一个集合.

(3)机场里的飞机的集合.

(4)太阳系行星的集合.

(5)直线上的点的集合.

(6)方程 $x^3-1=0$ 的实数解构成一个集合.

集合通常用大写的英文字母来标记，而它的元素常用小写的英文字母来标记. 例如自然数集合、整数集合、有理数集合、实数集合以及复数集合，我们通常分别用大写字母 **N**、**Z**、**Q**、**R**、**C** 来表示它们.

集合的元素有如下几条性质：

(1)元素的确定性　给定了一个集合，就是确定了这个集合的构造，即这个集合是由哪些元素组成的，并且对任意一个元素都能判定它是否是这个集合的元素. 对于一个元素来说，是这个集合的元素，或者不是这个集合的元素，不应模棱两可，两者必居其一，不会有第三种可能.

例如，若 a 是集合 A 的元素，我们称 a 属于 A 或 a 在 A 中，记作 $a\in A$，符号"$\in$"读作"属于"；若 a 不是集合 A 的元素，就称 a 不属于 A 或 a 不在 A 中，记作 $a\notin A$. 符号"$\notin$"读作"不属于". 例如 $0\in \mathbf{N}$，$3\in \mathbf{Z}$，但 $1.2\notin \mathbf{N}$.

(2)元素的互异性　集合中的元素必须是彼此不相同的，即互异. 就是说如果一个元素在集合中多次出现应该认为是一个元素.

例如，集合 $A=\{1,1,2,2,3\}$ 和 $B=\{1,2,3\}$. 这两个集合都只有 3 个元素. 即 1、2、3，所以这两个集合是相同的集合.

(3)元素的无序性　集合中的元素不规定顺序，即无序. 元素相同但次序不同的集合应该视为同一个集合.

例如，集合 $\{1,2,3\}$，$\{1,3,2\}$，$\{3,2,1\}$ 是同一个集合.

(4)元素的任意性　由集合的概念知，集合的元素可以是任何类型的事物.

也就是说，我们不要认为集合的元素只能是实数，这种观点是片面的. 实际上，对于元素全是实数的集合我们通常叫做**实数集**，它只是集合类中的一个集合.

有的集合是一些实物构成的集合，如集合(4)；甚至允许集合包含任何类型的事物，如集合{0815，中秋节，月亮，嫦娥，广寒宫，兔子}.

一个集合也可以作为另一个集合的元素. 例如，集合 $A=\{a,\{b,c\},d,\{d\}\}$. 其中 $a\in A$，$\{b,c\}\in A$，$d\in A$，$\{d\}\in A$. 但 $b\notin A$，$c\notin A$. b 是 A 的元素 $\{b,c\}$ 的元素，不是 A 的元素. 我们可以用一种示意图把集合和它的元素之间的关系表示出来. 把集合作为结点，"引出"它的元素. 这样，集合 A 的示意图如图 1-1 所示.

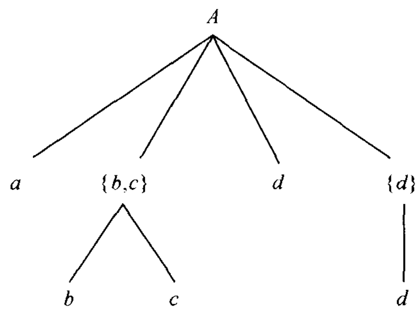

图 1-1

另外，对于集合 $B=\{\{a\},\{b,c\},\{1,2,3\}\}$，可以看到它的所有元素都是集合，像这种以集合作为元素构成的集合，常称为集合的集合，也叫作**集族**.

1.1.2　集合的表示方法

集合的表示方法有多种，这里介绍比较常用的两种表示方法.

(1)列举法　列举法是最直观的表示方法，它是指列举出集合中的所有元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号把所有元素括起来.

设 A 是由 1，2，5，6 构成的集合，则用列举法可将集合 A 表示成

$$A=\{1,2,5,6\}$$

设 $B=\{$火药，指南针，造纸术，印刷术$\}$，可知 $5\in A$，但自行车 $\notin B$.

(2)描述法　描述法是一种非常重要的表示方法. 它是指用某个英文字母来统一表示集合的元素，并指出元素的共同特征.

设集合 A 是由小于 5 大于 1 的所有实数构成的集合，用描述法将集合 A 表示成

$$A=\{x\mid x\text{ 是实数},1<x<5\}$$

在上面的表示中，"x"是指集合 A 的元素，"x 是实数，$1<x<5$"是元素 x 所具有的特征. 花括号内的符号"|"读作"系指"，逗号读作"并且".

有些集合可以同时用以上两种方法来表示，如集合 $A=\{-1,1\}$，它还可以用描述法表示成 $A=\{x\mid x\text{ 是实数},x^2-1=0\}$.

一般来讲，当集合的元素很多时，用列举法表示集合往往显得冗长而复杂；当集合的元素很多且具有某种特征时，用描述法表示就显得更加直观. 总之，表示一个集合的方法是很灵活多变的，我们要根据实际情况来选择适当的表示方法，当然，还要讲究准确性和简洁性.

1.1.3　子集与真子集

下面我们研究集合与集合之间的一种特殊关系. 如果小强的家庭成员有四个人，分别是爸爸、妈妈、姐姐和自己. 我们知道，小强家庭所有成员所构成的集合为 $A=\{$爸爸，妈妈，姐姐，小强$\}$，而家庭的子女构成的集合为 $B=\{$姐姐，小强$\}$，很明显子女集合 B 中的元素也都是家庭集合 A 中的元素. 我们称集合 B 为 A 的子集. 为此，有如下的数学定义：

定义 1.2　设 A,B 为两个集合，如果 B 中的每个元素都是 A 中的元素，则称 B 是 A 的**子集合**，简称**子集**. 这时也称 ***B* 被 *A* 包含**，或者 ***A* 包含 *B***. 记为 $B\subseteq A$ 或 $A\supseteq B$.

如果 B 中至少有一个元素不在 A 中，则 B 不是 A 的子集，也称 A 不包含 B 或 B 不被 A 包含，记作 $B\nsubseteq A$.

我们还可以借助于文氏图(Venn Diagram)来理解子集的概念，文氏图的构造方法就是画一些圆(或任何其他的适当的闭曲线)，用圆的内部

表示集合,不同的圆代表不同的集合. 子集的文氏图如图 1-2 所示.

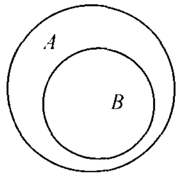

图 1-2

显然集合 B 被集合 A"包围"着,所以 B 是 A 的子集合.

包含的符号化表示为

$$B\subseteq A\Leftrightarrow \forall x\in B\Rightarrow x\in A$$

例如:$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$,但 $Z\nsubseteq N$.

显然对任何集合 S 都有 $S\subseteq S$.

例 2 设集合 $A=\{1,3,4,5\}$,$B=\{1,2,5\}$,$C=\{1,5\}$. 显然,C 既是 A 的子集,C 又是 B 的子集,但 B 不是 A 的子集,因为元素 $2\in B$ 但 $2\notin A$;同理 A 也不是 B 的子集,因为 $3\in A$ 但 $3\notin B$.

定义 1.3 设 A,B 为集合,如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$. 如果 A 与 B 不相等,则记作 $A\neq B$.

相等的符号化表示为

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A$$

例如:$A=\{2,4,6\}$,$B=\{2,4,6\}$,$C=\{2,4\}$

由于 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,故 $A=B$;虽然 $C\subseteq A$,但是 $A\subseteq C$ 不成立,所以 $A\neq C$.

定义 1.4 设 A、B 为两个集合,如果 $B\subseteq A$,且 $B\neq A$,则称 B 是 A 的真子集,记作 $B\subset A$. 如果 B 不是 A 的真子集,则记作 $B\not\subset A$.

真子集的符号化表示为 $B\subset A\Leftrightarrow B\subseteq A$ 但 $B\neq A$.

在例 2 中,因为 C 是 A 的子集,C 又是 B 的子集,并且 $C\neq A$,$C\neq B$,所以 C 也是 A 的真子集,C 又是 B 的真子集.

又如:$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$,但由于 $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}$,故 $\mathbf{Q}\not\subset\mathbf{Q}$.

若 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{b,c\}$，则 B 是 A 的真子集，但 A 不是 A 本身的真子集.

我们已经知道，属于关系"$\in$"是元素和集合之间的关系；包含关系"$\supseteq$"则是集合和集合之间的关系. 但由于一个集合可以作为另外一个集合的元素，所以存在着这样的情况，如集合 $A=\{a\}$，$B=\{a,b,\{a\}\}$，集合 A 的元素只有一个：a；集合 B 的元素有三个：$a,b,\{a\}$. 所以可以看到，集合 A 既是 B 的元素，又是 B 的子集，即有 $A\subseteq B$ 和 $A\in B$ 同时成立.

判断集合与集合之间的关系，关键要弄清楚集合的构造，即集合由哪几个元素构成. 在弄清构造的基础上再判断集合之间的关系.

1.1.4 特殊的集合

1.1.4.1 空集

我们知道，在 2004 年雅典奥运会上，中国"飞人"刘翔以 12 秒 91 平世界纪录的成绩夺得了 110 米栏的金牌.

下面我们来看看集合 $A=\{x|x$ 是在 2004 年前 110 米栏成绩好于 12 秒 91 的人$\}$，显然，由于 2004 年前还没有人的 110 米栏成绩好于 12 秒 91，所以集合 A 中应该没有元素. 我们把这种特殊的集合作如下定义.

定义 1.5 不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$.

例如：$A=\{x|x^2<0,x\in\mathbf{R}\}$，因为 $x^2\geqslant 0$，所以此集合为一个空集.

定理 1.1 空集是一切集合的子集，即设 A 为任意集合，则$\varnothing\subseteq A$.

由于空集是一切集合的子集，从这个意义上看，可以形象地说：$\varnothing$是"最小"的集合.

推论 1.1 空集是唯一的.

证明 假设存在空集$\varnothing_1$ 和$\varnothing_2$，则由定理 1.1 有$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$，且$\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$. 根据集合相等的定义可得$\varnothing_1=\varnothing_2$.

1.1.4.2 全集

由空集的含义，我们可以把空集形象理解为"最小"的集合，但有没有

"最大"的集合呢？回答是否定的，在实际情况中，我们所研究的对象总是限制在一定的范围内．比如，研究宁波市所有学校学生的学习情况时，研究对象可以是宁波大学的学生，也可以是大红鹰学院的学生．但不管怎样，研究的对象总是限制在宁波市学生这个大范围内．所以当讨论某具体问题时，可以定义一个具有相对"最大"的集合．也就是说，在研究问题时，如果所设计的集合都是某个集合的子集，我们称这个集合为**全集**，通常用 E 表示．

请注意，全集是有相对性的，全集的选取与所处的范围密切相关．不同的问题有不同的全集．例如，当我们研究人口问题时，全世界的人就构成全集；当我们研究中国人口问题时，全中国的人就构成了全集；当我们讨论 $[a,b]$ 区间上实数的性质时，可将 $[a,b]$ 取为全集，当讨论 $[0,+\infty)$ 上实数的性质时，也可将 $[-1,+\infty)$ 区间取成全集．这说明全集是根据具体情况而决定的，因而具有相对性．一般地说，全集取得小一些，问题的描述和处理会简单些．

给定若干集合后，都可以找到包含它们的全集，因而在今后的讨论中，所涉及的集合都可以看成某个全集 E 的子集．

1.1.4.3　幂集

当一个集合的元素个数有限时，我们称该集合为**有限集**；而当集合中的元素个数为无限时，称该集合为**无限集**．

有限集 A 的元素个数称为有限集 A 的基，记为 $|A|$．例如 $A=\{a,b,c\}$，则 $|A|=3$．

含有 n 个元素的集合简称 n 元集，它的含有 $m(m\leqslant n)$ 个元素的子集叫做它的 m 元子集．任给一个 n 元集，怎样求出它的全部子集呢？举例说明如下．

例 3　设 $A=\{0,1,2\}$，将 A 的子集归类：

0 元子集，也就是空集，只有一个：$\varnothing$．（1 个）

1 元子集：$\{0\},\{1\},\{2\}$．（3 个）

2 元子集：$\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}$．（3 个）

3 元子集：$\{0,1,2\}$．（1 个）