

非参数和半参数计量 经济模型理论

●叶阿忠 著



科学出版社

www.sciencep.com

(O-2979.0101)

ISBN 978-7-03-020855-2



9 787030 208552 >

定价：38.00 元

非参数和半参数计量经济模型理论

叶阿忠 著

本专著是国家自然科学基金项目

“半参数计量经济联立模型单方程估计方法的理论研究”(70371025)

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书分为四部分. 第一部分为密度函数和条件密度函数, 包括密度函数的非参数估计、一元条件密度函数的非参数估计和多元条件密度函数的投影追踪估计; 第二部分为非参数计量经济模型, 包括非参数计量经济模型的核估计和变窗宽核估计、局部线性估计和变窗宽局部线性估计、非参数计量经济模型的异方差问题和多重共线性问题; 第三部分为非参数计量经济联立方程模型, 包括非参数计量经济联立模型的局部线性工具变量估计和变窗宽局部线性工具变量估计、局部线性两阶段最小二乘估计和变窗宽局部线性两阶段最小二乘估计、局部线性广义矩估计和变窗宽局部线性广义矩估计; 第四部分为半参数计量经济模型和联立方程模型, 包括半参数计量经济模型的最小二乘估计、半参数计量经济联立模型的工具变量估计和其他工具变量估计. 本书的附录包括准备知识和 R 软件介绍.

本书适合高等院校经济、管理学科的研究生和研究人员使用.

图书在版编目(CIP)数据

非参数和半参数计量经济模型理论/叶阿忠著. —北京: 科学出版社, 2008

ISBN 978-03-020855-2

I. 非… II. 叶… III. 计量经济学-经济模型 IV. F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第003746号

责任编辑: 陈玉琢 房 阳 / 责任校对: 陈玉凤

责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年1月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2008年1月第一次印刷 印张: 13 1/2

印数: 1—2 500 字数: 239 000

定价: 38.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新欣〉)

作者简介



叶阿忠，男，1963年5月出生于福建省沙县。1983年7月获南开大学数学专业学士学位。1988年7月获南开大学数理统计专业硕士学位。2002年1月获清华大学经济管理学院数量经济专业博士学位。现为福州大学管理学院责任教授、博士生导师，福州大学数量经济研究所所长，兼任中国数量经济学会理事。出版《非参数计量经济学》和《高等计量经济学》(第二作者)，在国内核心期刊如《系统工程理论与实践》、《清华大学学报》、《应用概率统计》、《统计研究》、《管理科学学报》、《中国管理科学》等刊物发表论文30多篇。主要从事计量经济学、微观经济学、宏观经济学和数理经济学等领域的科研与教学活动。

序 言

非参数计量经济学作为现代计量经济学的一个分支,近 20 年来得到了迅速的发展.从国际权威的计量经济学学术刊物的论文中,我们不难发现,关于非参数计量经济学理论方法的研究,一直是理论计量一个重要的和前沿的研究领域.在应用研究方面,将非参数、半参数模型方法与微观计量、宏观计量以及金融计量结合,也成为这些计量经济学分支领域的研究热点.在国外著名大学的经济学研究生课程表中,非参数计量经济学已经成为计量经济学高级课程重要的一部分.在国内,近年来,一批年青学者将该领域作为主要研究方向,在跟踪研究的同时,取得了一些创新成果;不少大学已经将非参数计量经济学纳入研究生高级计量经济学的教学内容,甚至为博士研究生开设了专门的课程.

但是,国内目前关于非参数计量经济学的出版物相当少.2003 年 7 月,南开大学出版社出版了叶阿忠教授的《非参数计量经济学》一书,在它的序言中,我写下了如下一段话:“在国内,尚缺少全面系统的、既具有学术水平又具有应用指导价值的著作奉献给广大读者.在这个意义上,这本《非参数计量经济学》填补了这个空白.”时隔几年,这种状况没有改变.从这个意义上说,叶阿忠教授即将出版的《非参数和半参数计量经济模型理论》专著对于推动国内的计量经济学研究与教学都具有十分重要的价值.

叶阿忠教授近 10 年来以非参数计量经济学模型理论为自己的主要研究方向,取得了显著的成绩,完成了国家自然科学基金项目“半参数计量经济联立模型单方程估计方法的理论研究”、教育部人文社会科学基金项目“非参数计量经济模型的理论研究”和教育部人文社会科学重点研究基地重大项目“非经典计量经济学理论方法研究”等,发表了 20 余篇非参数计量经济模型理论研究和应用研究的学术论文.

《非参数和半参数计量经济模型理论》专著就是叶阿忠教授 10 年研究成果的结晶.我有幸在该专著正式出版之前浏览了书稿,以下几点给我留下了深刻的印象:

一是创新性.作为“专著”,为了保持内容体系的完整,将已有的别人的研究成果少量地纳入其中,应该是允许的;但是,如果大量引入别人的成果或者教科书中的内容,那就不是“专著”了.书中的内容几乎都是作者的研究成果.作者在导论中归纳了 6 个方面的学术贡献,即学术创新,都属于非参数、半参数计量经济模型理论的基础研究和应用基础研究领域,是对非参数和半参数计量经济模型

理论研究的重要贡献。

二是学术性。我曾经做过一项调查，将我国的经济学权威刊物《经济研究》与美国同类刊物 *American Economic Review*（《美国经济评论》）的发文进行比较，发现在二者发表的论文中，采用计量经济学模型方法的论文比例分别从 1984 年的 0 和 23.5% 增至 2004 年完全相同的 40.4%，说明我国的计量经济学应用研究尽管在水平上仍然存在很大差距，但是已经相当普遍和广泛。同样对比了国际上的计量经济学学术刊物和我国的同类学术刊物，发现属于理论计量领域的基础研究论文比例在 2004 年分别为 21% 和 1%，说明我国从事计量经济学理论方法研究的学者还很少。而理论方法研究不仅体现了学科水平，也影响着应用研究的水平。叶阿忠教授的《非参数和半参数计量经济模型理论》是一部纯理论方法研究的著作，有其突出的学术价值。

三是内容体系的完整性。该书虽为专著，但其内容是相当完整的。全书分为四部分，包括密度函数和条件密度函数、非参数计量经济模型、非参数计量经济联立方程模型、半参数计量经济模型和联立方程模型的估计理论，在理论上已经涉及所有类型的非参数和半参数计量模型。当然，由于作者主要从事局部逼近估计方法的研究，关于整体逼近估计，该书没有涉及。同时，该书的章节编排合理，逻辑结构严谨，也是内容体系完整性的重要体现。

我虽然对非参数计量经济学缺少专门的研究，但是作为中国数量经济学会副理事长和计量经济学专门委员会主任，很高兴在此向读者推荐叶阿忠教授的该力作；作为叶阿忠教授曾经的博士论文指导教师，对他取得的成绩表示祝贺；作为一名长期从事计量经济学教学的教师，对该书作者所作出的贡献表示衷心的感谢。同时，对于科学出版社出版该书以及出版此类著作的热情表示由衷的钦佩。

李子奈

2007 年 8 月于清华大学

前 言

计量经济学作为经济学的的一个分支学科,于20世纪20年代末、30年代初由R. Frish创立,后经L. R. Klein(1969年诺贝尔经济学奖获得者)的发展使其经典理论方法在经济学科中居于很重要的位置.20世纪70年代以来,除了J. J. Heckman和D. L. Mcfaden(2000年诺贝尔经济学奖获得者)对微观计量经济模型的发展,C. W. J. Granger对单整理论的建立和S. Johansen对协整理论的创立之外,非参数和半参数计量经济模型的研究显然是当前计量经济学研究中的一个重要方向.

本书的内容分为四部分.第一部分为密度函数和条件密度函数,包括密度函数的非参数估计、一元条件密度函数的非参数估计和多元条件密度函数的投影追踪估计;第二部分为非参数计量经济模型,包括非参数计量经济模型的核估计和变窗宽核估计、局部线性估计和变窗宽局部线性估计、非参数计量经济模型的异方差问题和多重共线性问题;第三部分为非参数计量经济联立方程模型,包括非参数计量经济联立模型的局部线性工具变量估计和变窗宽局部线性工具变量估计、局部线性两阶段最小二乘估计和变窗宽局部线性两阶段最小二乘估计、局部线性广义矩估计和变窗宽局部线性广义矩估计;第四部分为半参数计量经济模型和联立方程模型,包括半参数计量经济模型的最小二乘估计、半参数计量经济联立模型的工具变量估计和其他工具变量估计.

R. J. Hyndman, D. M. Bashtannyk, G. K. Grunwald(1996)和D. M. Bashtannyk and R. J. Hyndman(2001)研究了一元条件密度函数 $f_{1|x}(y|x)$ 的非参数核估计方法.为了克服高维空间数据稀松性带来的估计上的困难,我们借鉴Huber(1985)与Friedman, Stuetzle和Schroeder(1984)建立多元密度函数的投影追踪降维估计方法,提出多元条件密度函数的投影追踪估计方法,通过最小化Kullback-Leibler距离,得到了最优初始条件密度函数和每一步的增量函数和方向向量,还给出了估计步骤及其终止法则.

非参数计量经济模型假定经济变量的关系未知,要对整个回归函数进行估计,因而较线性和非线性计量经济模型更符合现实的情况.回归函数的导数在不同时期的变化可反映经济结构的调整过程,还可用于乘数分析、弹性分析等比较静力学分析.叶阿忠(2003a)研究多元非参数回归模型局部线性变窗宽估计的性质,得到了变窗宽局部线性估计的条件渐近偏和方差,在内点处证明了它的一致性和渐近正态性,它在内点处的收敛速度达到了非参数函数估计的最优收敛速度.变窗宽局部线性估计理论的发展,为解决非参数回归模型中的异方差问

题提供了强有力的工具. 我们首先提出了非参数计量经济模型异方差性的图示检验方法和回归检验方法; 其次, 对于异方差模型, 利用了与变量分布信息和模型异方差性信息有关的变窗宽提出了一种变窗宽局部线性估计方法, 其估计效果优于没有利用变量和模型信息的不变窗宽估计, 也优于只利用变量信息没利用模型信息的变窗宽估计. 对于非参数计量经济模型多重共线性问题, 我们发现多重共线性造成局部线性估计精度下降的原因, 并提出了一个补救措施. 当变量之间高度相关时采用主成分回归可以有效提高估计精度, 并通过模拟的方式验证了此方法的有效性.

半参数计量经济模型假定经济变量的部分关系已知, 其他关系未知, 综合了参数模型和非参数模型, 因而较参数模型和非参数模型更符合现实的经济现象. 半参数计量经济模型参数分量估计的收敛速度与传统参数回归模型估计的收敛速度一样, 非参数分量估计的收敛速度在内点处可达到非参数函数的最优收敛速度, 这样半参数计量经济模型估计的收敛速度快于非参数模型估计的收敛速度.

计量经济联立模型在经济政策制定、经济结构分析和经济预测方面起重要作用. 传统的线性或非线性计量经济联立模型容易造成单方程的设定误差, 致使联立方程的累积误差很大, 不能很好地反映现实中的经济现象. 在非参数计量经济联立模型的估计方面, 我们提出了局部线性工具变量估计和变窗宽局部线性工具变量估计、局部线性两阶段最小二乘估计和变窗宽局部线性两阶段最小二乘估计、局部线性广义矩估计和变窗宽局部线性广义矩估计六种估计方法, 并利用概率论中大数定理和中心极限定理等在内点处研究了它的大样本性质, 证明了它们的一致性和渐近正态性, 它们在内点处的收敛速度达到了非参数函数估计的最优收敛速度.

将非参数模型推广到半参数模型使得联立模型更具有普遍性且使得模型估计的收敛速度加快, 从而使得联立模型的估计理论更具有实用价值. 在半参数计量经济联立模型的估计方面, 我们提出参数部分的工具变量估计、两阶段最小二乘估计和广义矩估计以及非参数部分的局部线性工具变量估计和变窗宽局部线性工具变量估计、局部线性两阶段最小二乘估计和变窗宽局部线性两阶段最小二乘估计、局部线性广义矩估计和变窗宽局部线性广义矩估计, 利用极限理论证明参数分量估计具有一致性和渐近正态性且收敛速度为 $n^{-1/2}$, 非参数分量估计在内点处具有一致性和渐近正态性, 其收敛速度达到了非参数函数估计的最优收敛速度.

本书是国家自然科学基金项目“半参数计量经济联立模型单方程估计方法的理论研究”(70371025)、教育部人文社会科学基金项目“非参数计量经济模型的理论研究”(02JA790014)和教育部人文社会科学重点研究基地重大项目“非经典

计量经济学理论方法研究” (01JAZJD790004)的研究成果. 部分成果是与清华大学的李子奈教授、澳大利亚 MONASH 大学的 R. J. Hyndman 教授、福州大学的吴相波博士和黄志刚教授等合作完成的. 本书还获得了福州大学西方经济学省级重点学科和福州大学应用经济学学科基金资助.

在本专著出版之际, 我要特别感谢几位给予我极大帮助的人. 首先感谢的是我的博士生导师李子奈教授, 是他不断地鼓励、支持和治学的严谨才使我得以在非参数和半参数计量经济学领域持续研究了几年. 其次感谢 Portland State University 的林光平教授, 是他将非参数回归模型局部线性估计的思想介绍给我. 接着感谢澳大利亚 MONASH 大学的 R. J. Hyndman 教授, 他让我更多地了解了非参数和半参数计量经济学领域的理论研究和实际应用成果. 还要感谢福州大学管理学院陈国宏教授在担任院长期间给予的许多支持和帮助.

由于作者学术水平有限, 加之时间仓促, 书中错漏和疏忽在所难免, 恳请读者批评指正.

叶阿忠

2007年9月于福州大学怡园西村

目 录

序言

前言

第 1 章 导论	1
1.1 线性回归模型的最小二乘估计理论	1
1.2 联立方程计量经济模型的工具变量估计理论	3
1.3 非线性回归模型的回顾	5
1.4 本书的内容体系和主要学术贡献	6

第一部分 密度函数和条件密度函数

第 2 章 密度函数的非参数估计	11
2.1 多元密度函数的核估计	11
2.2 多元密度函数核估计在内点处的性质	11
2.3 多元密度函数核估计在边界点处的性质	15
2.4 多元密度函数的矩阵窗宽核估计	17
2.5 一元密度函数核估计的窗宽选择	20
2.5.1 交错鉴定选择方法	20
2.5.2 直接插入选择方法	21
第 3 章 一元条件密度函数的非参数估计	24
3.1 核估计	24
3.2 核估计的性质	24
3.3 核估计窗宽的理论选择	30
3.4 核估计窗宽的实践选择	31
3.4.1 均匀边缘分布	32
3.4.2 正态边缘分布	32
第 4 章 多元条件密度函数的投影追踪估计	35
4.1 投影追踪估计	35
4.2 Kullback-Leibler 距离	36
4.3 定理及其证明	36
4.4 终止法则	38
4.5 估计步骤	39

第二部分 非参数计量经济模型

第 5 章 非参数计量经济模型的核估计	43
5.1 非参数计量经济模型	43
5.2 核估计	43
5.3 核估计在内点处的性质	44
5.4 核估计在边界点处的性质	54
5.5 窗宽的选择	56
5.5.1 理论窗宽的最佳选择	57
5.5.2 样本窗宽的交错鉴定选择方法	58
5.5.3 窗宽的经验选择方法	58
5.6 核函数的选择	58
第 6 章 非参数计量经济模型的变窗宽核估计	60
6.1 变窗宽核估计	60
6.2 变窗宽核估计在内点处的性质	60
6.3 变窗宽核估计在边界点处的性质	69
第 7 章 非参数计量经济模型的局部线性估计	73
7.1 局部线性估计	73
7.2 局部线性估计在内点处的性质	74
7.3 局部线性估计在边界点处的性质	77
7.4 非参数计量经济模型的矩阵窗宽局部线性估计	79
7.5 一元非参数计量经济模型估计的窗宽选择	80
7.6 一元非参数计量经济模型回归函数导数的估计	82
第 8 章 非参数计量经济模型的变窗宽局部线性估计	83
8.1 变窗宽局部线性估计	83
8.2 变窗宽局部线性估计在内点处的性质	83
8.3 变窗宽局部线性估计在边界点处的性质	86
第 9 章 非参数计量经济模型的异方差问题	88
9.1 非参数计量经济模型异方差性的检验	88
9.2 存在异方差性时非参数计量经济模型的估计	89
9.3 模拟研究	90
第 10 章 非参数计量经济模型的多重共线性问题	95
10.1 线性回归中的多重共线性	95
10.2 非参数回归模型的多重共线性问题	96
10.3 一个补救措施	96

10.4	模拟研究	97
10.5	一个例子	98
第三部分 非参数计量经济联立方程模型		
第 11 章	非参数计量经济联立模型的局部线性工具变量估计	103
11.1	非参数联立模型的局部线性工具变量估计	103
11.2	局部线性工具变量估计在内点处的性质	105
11.3	窗宽和核函数的最佳选择	113
11.4	局部线性工具变量估计在边界点处的性质	114
第 12 章	非参数计量经济联立模型的变窗宽局部线性工具变量估计	118
12.1	变窗宽局部线性工具变量估计	118
12.2	变窗宽局部线性工具变量估计在内点处的性质	119
12.3	变窗宽局部线性工具变量估计在边界点处的性质	127
第 13 章	非参数计量经济联立模型的局部线性两阶段最小二乘估计	132
13.1	局部线性两阶段最小二乘估计及其在内点处的性质	132
13.2	局部线性两阶段最小二乘估计在边界点处的性质	134
第 14 章	非参数计量经济联立模型的变窗宽局部线性两阶段最小二乘估计	137
14.1	变窗宽局部线性两阶段最小二乘估计及其在内点处的性质	137
14.2	变窗宽局部线性两阶段最小二乘估计在边界点处的性质	140
第 15 章	非参数计量经济联立模型的局部线性广义矩估计	142
15.1	局部线性广义矩估计及其在内点处的性质	142
15.2	局部线性广义矩估计在边界点处的性质	145
第 16 章	非参数计量经济联立模型的变窗宽局部线性广义矩估计	148
16.1	变窗宽局部线性广义矩估计及其在内点处的性质	148
16.2	变窗宽局部线性广义矩估计在边界点处的性质	150
第四部分 半参数计量经济模型和联立方程模型		
第 17 章	半参数计量经济模型的最小二乘估计	155
17.1	半参数计量经济模型	155
17.2	最小二乘估计	155
17.3	最小二乘估计的性质	156
第 18 章	半参数计量经济联立模型的工具变量估计	160
18.1	工具变量估计	160
18.2	两阶段最小二乘估计	161

18.3 广义矩估计	162
第 19 章 半参数计量经济联立模型的工具变量估计(续)	163
19.1 引言	163
19.2 参数分量的估计	163
19.2.1 X_i 与 u_i 和 ε_i 都不相关	163
19.2.2 X_i 与 u_i 或 ε_i 相关	164
19.3 非参数分量的估计	165
19.3.1 局部线性工具变量估计	165
19.3.2 变窗宽局部线性工具变量估计	166
19.3.3 局部线性两阶段最小二乘估计	167
19.3.4 变窗宽局部线性两阶段最小二乘估计	168
19.3.5 局部线性广义矩估计	169
19.3.6 变窗宽局部线性广义矩估计	170
参考文献	172
附录 A 准备知识	175
A.1 概率论的若干基本概念	175
A.2 离散型随机变量	177
A.3 连续型随机变量	180
A.4 正态分布	184
A.5 极限理论	185
A.6 若干数学期望不等式	188
A.7 若干概率不等式	189
A.8 分块矩阵求逆	190
附录 B R 软件介绍	191
B.1 如何安装 R	191
B.2 金融计量经济学	192
B.3 计算计量经济学	193

第 1 章 导 论

非参数和半参数回归模型的研究是当前计量经济学研究中的一个重要方向。现实中, 经济变量之间的关系未必是线性关系或可线性化的非线性关系, 而变量之间的参数非线性关系又很难确定或者是可以部分确定, 传统线性或非线性计量经济模型在实际应用中往往存在模型的设定误差, 不能满足经济和管理应用研究的需要。非参数和半参数单方程计量经济模型的理论研究在近 30 年间得到了迅速的发展, 非参数和半参数联立方程计量经济模型的理论研究也取得了较大的进展。本书的宗旨是介绍非参数和半参数计量经济模型的理论研究成果。本章首先回顾线性回归模型的最小二乘估计理论, 其次回顾联立方程计量经济模型的工具变量估计理论, 再次回顾非线性回归模型的非线性最小二乘估计理论等, 最后介绍本书的内容体系和主要学术贡献。

1.1 线性回归模型的最小二乘估计理论

设 Y 为被解释变量, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ 为解释变量向量, 它是影响变量 Y 的 k 个因素。例如, 要建立投资函数, 这时研究的经济变量为投资额。影响投资额 Y 的因素有许多, 如国内生产总值、利率、对外开放程度等。从影响因素中选择最主要的且可观察的因素, 如国内生产总值 X_1 , 利率 X_2 等作为解释变量。

给定 n 组观测值 $Y_i, \mathbf{X}_i = (X_{1i}, \dots, X_{ki}) (i=1, 2, \dots, n)$, 可建立多元线性回归模型:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

其中 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 为模型的未知参数, u_i 为随机误差项, 它反映了除解释变量外其他影响被解释变量的可观察或不可观察的因素对被解释变量的影响以及模型的设定误差等。当解释变量为确定性变量时, 假定随机误差项的数学期望为零, 即 $E u_i = 0$ 。此时, 被解释变量的数学期望 $E Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki}$ 。当解释变量为随机变量时, 假定解释变量与随机误差项独立, 假定随机误差项的条件数学期望为零, 即 $E(u_i | \mathbf{X}_i) = 0$ 。此时, 被解释变量的条件数学期望 $E(Y_i | \mathbf{X}_i) = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki}$ 。

定义 1.1 模型参数 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 的最小二乘估计 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ 为最小化

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki})]^2 \quad (1.2)$$

例 1.1 二元线性回归模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

参数 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ 的最小二乘估计 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ 为下列方程组的解:

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i})] = 0$$

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i})] X_{1i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i})] X_{2i} = 0$$

下面分几种情形讨论模型参数的最小二乘估计的性质.

情形 1 (1) 解释变量为确定性变量; (2) 随机误差项 $\{u_i\}$ 相互独立;

(3) $\text{Var}(u_i) = \sigma_u^2$.

当随机误差项同方差时, 参数 σ_u^2 的估计为

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^n [Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k X_{ki})]^2 \quad (1.3)$$

定理 1.1 在情形 1 下

(1) $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ 和 $\hat{\sigma}_u^2$ 是无偏估计和一致估计;

(2) $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ 是最佳的线性无偏估计, 即在线性无偏估计类中方差最小;

(3) $\hat{B} \xrightarrow{L} N(B, \sigma_u^2 (X^T X)^{-1})$,

其中 $B = (\beta_0, \dots, \beta_k)^T$, $\hat{B} = (\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_k)^T$, $X = ((1, X_1)^T, \dots, (1, X_n)^T)^T$.

证明 见文献(李子奈, 1992).

在情形 1 下, 模型(1.1)参数的最小二乘估计具有非常好的性质, 它们的数学期望等于实际参数值, 而且随着观察点数据的增加, 它们会依概率收敛于实际值, 并且 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ 还是线性无偏估计类中方差最小的估计. 此外, $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ 的分布是渐近正态的, 也就是当观察点个数比较多时, 它们的分布可以用正态分布来近似.

经济变量基本上不是确定性变量, 因而情形 1 中假定解释变量为确定性变量不符合实际中的大多数情况, 下面考虑解释变量为随机变量的情况.

情形 2 (1) 解释变量为随机变量且 $\{X_i\}$ 独立同分布; (2) 随机误差项 $\{u_i\}$ 相互独立且 $\text{Var}(u_i | X_i) = \sigma_u^2$; (3) 解释变量与随机误差项独立.

定理 1.2 在情形 2 下, 假定 $n^{-1}X^T X \xrightarrow{p} Q$, 则

- (1) $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ 和 $\hat{\sigma}_u^2$ 是渐近无偏估计和一致估计;
- (2) $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ 具有渐近有效性, 即在线性无偏估计类中渐近方差最小;
- (3) $n^{1/2}\hat{B} \xrightarrow{L} N(B, \sigma_u^2 Q^{-1})$.

证明 见文献(Hamilton, 1994, 8.2 节).

在情形 2 下, 模型(1.1)参数的最小二乘估计具有非常好的性质, 它们的数学期望会趋于实际参数值, 而且随着观察点数据的增加, 它们会依概率收敛于实际值, 并且 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ 还是线性无偏估计类中渐近方差最小的估计. 此外, $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ 的分布是渐近正态的, 也就是当观察点个数比较多时, 它们的分布可以用正态分布来近似.

所谓估计量 $\hat{\beta}_i$ 趋于 β_i 的收敛速度也就是估计量 $\hat{\beta}_i$ 的平方根均方误差

$$\begin{aligned} [E(\hat{\beta}_i - \beta_i)^2]^{1/2} &= [E(\hat{\beta}_i - E\hat{\beta}_i + E\hat{\beta}_i - \beta_i)^2]^{1/2} \\ &= [E(\hat{\beta}_i - E\hat{\beta}_i)^2 + (E\hat{\beta}_i - \beta_i)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

趋于零的收敛速度. 由定理 1.2 可知, $\hat{\beta}_i$ 收敛于 β_i 的收敛速度都是 $n^{-1/2}$ ($i=0, 1, \dots, k$).

1.2 联立方程计量经济模型的工具变量估计理论

设联立方程计量经济模型的某结构式方程为式(1.1), 设解释变量为随机变量且 $\{X_i\}$ 独立同分布, 随机误差项 $\{u_i\}$ 相互独立且 $\text{Var}(u_i | X_i) = \sigma_u^2$. 由于解释变量中存在内生变量, 导致部分解释变量与随机误差项相关, 即 $E(u_i X_i) \neq 0$, 所以, $E(u_i | X_i) \neq 0$, 因而式(1.1)中参数的最小二乘估计不再是无偏估计, 无论是条件数学期望还是无条件的数学期望都不会等于实际参数. 而此时, 工具变量类估计是模型参数的条件无偏估计, 所以, 工具变量类估计是联立方程计量经济模型的常用估计方法之一.

设 $Z_i = (Z_{i1}, \dots, Z_{il})$ ($l > k$) 满足 $E(u_i Z_i) = 0$, 称 Z_i 为工具变量向量.

定义 1.2 当 $l = k$ 时, 参数的工具变量估计满足

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - (\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 X_{i1} + \dots + \tilde{\beta}_k X_{ik})] = 0$$