高等代数学习指南

北京大学数学科学学院

蓝以中 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等代数学习指南

北京大学数学科学学院
蓝以中　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等代数学习指南/蓝以中编著. —北京:北京大学出版社. 2008.7
ISBN 978-7-301-12905-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. 蓝… Ⅲ. 高等代数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 166741 号

书　　名:高等代数学习指南
著作责任者:蓝以中　编著
责 任 编 辑:刘　勇
封 面 设 计:常燕生
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-12905-0/O·0740
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址:http://www.pup.cn　电子邮箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
出版部 62754962
印 刷 者:北京大学印刷厂
经 销 者:新华书店
890×1240　A5　14.75 印张　410 千字
2008 年 7 月第 1 版　2008 年 7 月第 1 次印刷
印　　数:0001—4000 册
定　　价:25.00 元

内容简介

本书是高等院校高等代数课程的学习用书，内容包括两大部分：一是线性代数，包括向量空间和矩阵，行列式，抽象线性空间和线性变换，双线性函数和二次型，带度量的线性空间，若尔当标准形理论；二是一元和多元多项式。书中对课程学习和教学中的难点作了详细的剖析和讲解，同时精选了许多典型例题以增进读者对所学知识的理解，提高分析、处理问题的能力。本书讲述的内容涵盖了国内通常使用的一般高等代数教材，特别是作者编写的《高等代数简明教程(上、下册)》(北京大学出版社，2002)的教学要求，因而也适合作为这些教材的学习指导书。

本书可作为大学本科学生学习高等代数的辅导书及教师教学参考书，对青年教师及准备报考研究生或已进入硕士研究生阶段学习的学生复习、提高代数课程知识也是基本参考用书。

序　言

代数学作为大学教育的一门基础课程已有数百年的历史。在现代，它不但是理工科学生的必修基础课，经济类专业和一些文科专业也逐步把它列为学生的必修课或选修课。这一事实表明，对青年一代进行代数学思想和方法的训练，对提高他们的综合素质和处理问题的能力有重要意义，这已成为中、外教育界的共识。数学的发展史是人类文明史的重要组成部分。人类研究数的运算，按有据可考的年代算起，至今也有五千多年的历史了。这样漫长的时间内沉积下来的科学知识，无疑是全人类智慧的结晶。大学教育的目的是让青年一代继承先辈留下的精神财富，以便他们站在更高的起点上去开辟未来。代数学课程的教学，当然应当在这个总的指导思想的统率下去展开。而编写一本高等代数课程的学习辅导及教学参考用书，也应当以此作为根本的出发点。

现代大学代数学的教学内容和中学代数已有根本性的变化。这给学生的学习和教师的教学都增加了难度。编写这一本《高等代数学习指南》，就是希望以此帮助学生克服由于不适应代数学中全新的研究对象和处理问题的方法而产生的困惑，同时也为讲授此课程的教师提供一些便利的条件。目前，为了应对高考，实行题海战术的应试教育所造成的恶果已是人所共知。在大学中不应重蹈覆辙。因此本书主要采取如下两方面的做法：

1. 不是罗列大量问题的题解让学生阅读。实际上，在教材及课堂讲授中已包含许多命题、定理及其证明，除此之外再去阅读大量题解未必有多大效用。本书针对学生学习中经常困惑不解或容易出现偏差、错误的地方给予详尽的讲解，帮助学生从中学代数的初等知识逐步过渡到现代代数学的新思想和新方法上来。

2. 在学生理解各部分基础知识之后，再精选若干具有典型

意义的例题予以讲解，使学生的学习深入一步，认识如何用学到的知识去探索、分析、处理遇到的新问题。这些例题有三种类型，第一种是带有典型意义的基本题，它们概括了处理某一类课题的规范性方法，是学生必须牢牢掌握的；第二种是中等难度的题，它们使用的方法、体现的思想在代数学中具有典型性，学生应从中体验代数学的基本思想和方法；第三种是较难的题，其中许多是北京大学数学科学学院本科高等代数课程历来的考试题或本书中首次给出的题。它们具有较大的启发性，同时又能检验学习是否扎实，是否达到较高的水平。每节后附有练习题，都属基本题，目的是帮助读者进一步复习巩固。

建议读者按下面办法使用本书。1. 首先认真阅读各部分的内容提要和它们后面所作的评议。这是检验是否理解该部分基本知识的关键，如发现理解不够或有偏差，必须认真复习课文，以求真正领悟。不可只注意做作业或例题，忽视对基本知识的学习。作题只是为了帮助理解基本知识，不可本末倒置。2. 在真正弄通该部分知识之后，再来看各个例题。但不要立即阅读解法，先自己动手解该例题，经过一番思考、推理后，再回来看书上的解法，跟自己的想法对照，看自己的思考有何优、缺点。如果自己没有解出该题，想想自己的思路在何处出现偏差，遇到什么困难，从中得出应有的经验、教训。3. 最后再想想该题有无其他解法，能否找到更好的解法。只有这样认真对待，才能真正收到较好的效果。

本书按高等代数课程教学的基本要求编写，不管课程使用何种教材，都可使用本书作为学习辅导材料。但本书编写的基本思想则与作者编著的教材《高等代数简明教程》(上、下册)相一致。该《教程》(第二版)中所有稍难的习题在本书中都给出了详细的解法。

最后，作者对本书责任编辑刘勇同志的细心审校表示衷心的感谢。同时诚恳地希望读者对书中不足之处给予指正。

作　者

2007 年 8 月于北京大学

目　录

引　言

代数学是研究“运算”的科学. 下面我们来对这句话作一个粗略的解释.

在中学代数中学习实数和它们的加、减、乘、除四则运算. 减法是加法的逆运算, 除法是乘法的逆运算. 所以, 实数实质上只有加法、乘法两种运算. 人们熟知, 在从事任何工作时, 都必须遵循一定的规则. 实数的加法、乘法自然也要遵循相应的法则. 这些法则归纳起来, 最根本的是如下九条.

一、加法的法则:

1. 加法有结合律, 即 $a+(b+c)=(a+b)+c$;

2. 加法有交换律, 即 $a+b=b+a$;

3. 存在数 0, 使对一切实数 a, 有 $0+a=a$;

4. 对任意实数 a, 存在实数 b, 使 $b+a=0$.

二、乘法的法则:

1. 乘法有结合律, 即 $a(bc)=(ab)c$;

2. 乘法有交换律, 即 $ab=ba$;

3. 存在数 1, 使对一切实数 a, 有 $1\cdot a=a$;

4. 对任意非零实数 a, 存在实数 b, 使 $ba=1$.

三、加法、乘法有分配律, 即对任意实数 a, b, c, 有

$$a(b+c)=ab+ac.$$

因此, 用严格的科学语言来说, 全体实数组成一个集合, 这个集合内有加法、乘法两种运算, 这两种运算遵循上述九条运算法则. 中学代数学就是以它为基础展开的. 认识这一点, 对于学习代数学中较深入的知识是至关重要的.

初等代数学的这些粗浅知识对数学和自然科学是远远不够的, 人们的认识在不断发展. 首先, 人们早就发现单有实数是不够的, 在

实数范围内，最简单的二次方程 $x^2+1=0$ 都无解. 于是实数系被扩充为复数系. 但是上面指出的基本的思想没有变：全体复数也组成一个集合，这个集合内有加法、乘法两种运算，这两种运算同样遵循上面指出的九条运算法则(把其中的实数换成复数即可). 于是，代数学的研究领域往前迈进了一步，由实数运算变成复数运算.

当我们的研讨再深入一步时就会发现，我们处理某个具体的问题时，实际上并不需要考虑全体复数，而只需要处理一部分复数. 因为我们同时要考虑其中复数的加、减、乘、除运算，因而自然要求这部分复数对上述四则运算是封闭的. 于是人们引入了数域的概念. 设 K 是一部分复数所成的集合，假定其中至少包含一个非零复数(因为只有复数 0 的集合无研究价值)，而且对任意 $a,b\in K$，$a\pm b\in K$，$ab\in K$，且当 $b\neq 0$ 时，$\frac{a}{b}\in K$. 则称 K 是一个**数域**. 遵循上面指出的基本思想，我们说：数域是一个集合，其中有加法、乘法两种运算，这两种运算满足上面指出的九条运算法则. 这样，当我们研究某个具体问题时，可以把研究局限在某个具体的数域内.

全体复数显然组成一个数域，称为复数域，记做 $\mathbb{C}$. 全体实数也组成一个数域，称为实数域，记做 $\mathbb{R}$. 全体分数(分数又称为有理数)也组成一个数域，称为有理数域，记做 $\mathbb{Q}$. 对任一数域 K，取其中非零数 a，则 $0=a-a\in K$，$1=\frac{a}{a}\in K$，$-1=0-1\in K$，由此推出任意正整数 $n=1+1+\cdots+1\in K$，$-n=(-1)+(-1)+\cdots+(-1)\in K$. 于是，对任一分数 $\frac{m}{n}$，由 $m,n\in K$，$n\neq 0$ 推出 $\frac{m}{n}\in K$. 所以任何分数 $\frac{m}{n}\in K$. 这样一来，任何一个数域 K 都包含有理数域 $\mathbb{Q}$. 上面这个简单推理实际上运用了一个原理，即全体整数所成的集合(今后都用空体字母 $\mathbb{Z}$ 来表示)实际上以 $0,\pm 1$ 为基础按加法来构成. 这个认识很有用，许多问题都借助它得以迎刃而解. 这从后面一些例题就可以看到.

例 1　设

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}\,|\,a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

证明它是一个数域.

解 它显然对复数加法、减法、乘法都是封闭的. 如果 $c+d\sqrt{2}\neq 0(c,d\in\mathbb{Q})$，则 $c^2-2d^2\neq 0$. 因若 $c^2-2d^2=0$，此时 $d\neq 0$（否则必有 $c=0$，与 $c+d\sqrt{2}\neq 0$ 矛盾），那么，由 $c^2-2d^2=(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})=0$ 推出 $c-d\sqrt{2}=0$，即 $\sqrt{2}=\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$，与 $\sqrt{2}$ 是无理数矛盾. 现在

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

即 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 对复数除法也封闭，因而，它是一个数域. ▌

例 2 设 K 是一个数域，$\sqrt{5}\notin K$，令

$$K(\sqrt{5})=\{a+b\sqrt{5}\,|\,a,b\in K\}.$$

证明它是一个数域.

解 它显然对复数加法、减法、乘法都是封闭的. 现设 $c+d\sqrt{5}\neq 0(c,d\in K)$，则 $c^2-5d^2\neq 0$，因若 $c^2-5d^2=(c+d\sqrt{5})(c-d\sqrt{5})=0$，则 $c-d\sqrt{5}=0$，易知此时 $d\neq 0$，于是 $\sqrt{5}=\frac{c}{d}\in K$ 与假设矛盾. 现在

$$\frac{a+b\sqrt{5}}{c+d\sqrt{5}}=\frac{ac-5bd}{c^2-5d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-5d^2}\sqrt{5}\in K(\sqrt{5}).$$

因此，$K(\sqrt{5})$ 是一个数域. ▌

现在考查

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{10}\,|\,a,b,c,d\in\mathbb{Q}\}.$$

因为

$$\begin{aligned}&a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{10}\\&\quad=(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})\sqrt{5},\end{aligned}$$

按例 2 的写法，有 $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})=\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{5})$. 例 1 已证 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 是一个数域，现在来证 $\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. 若

$$\sqrt{5}=a+b\sqrt{2}\quad(a,b\in\mathbb{Q}),$$

则显然 $b\neq 0$（因 $\sqrt{5}$ 是无理数）. 如果 $a=0$，设 $b=\frac{m}{n}$ 是 b 的既约分数表示，即 m,n 为整数且 $(m,n)=1$. 于是我们有 $5n^2=2m^2$. $5n^2$ 为偶

数，则 n 必为偶数，设 $n=2k$，则 $20k^2=2m^2$，即 $m^2=10k^2$ 为偶数，于是 m 也是偶数，这与 $(m,n)=1$ 矛盾，故 $a\neq 0$. 这时

$$5=a^2+2b^2+2ab\sqrt{2},$$

即

$$\sqrt{2}=\frac{5-a^2-2b^2}{2ab}\in\mathbb{Q},$$

矛盾. 因此，$\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2})=K$. 按例 2 即知 $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$ 是一个数域.

从上面的分析可见存在许许多多不同的数域(读者试证明存在无穷多个互不相同的数域). 现在我们对一元高次代数方程作一点简单的讨论，从中可以看出引入数域概念的重要性.

首先观察简单的二次方程 $x^2-2=0$. 这个方程的系数都属有理数域 $\mathbb{Q}$，我们称它是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的二次方程. 但是它的根 $x=\pm\sqrt{2}$ 却不属于 $\mathbb{Q}$. 所以，为了求解这个二次方程，它的系数所在的数域 $\mathbb{Q}$ 是不够的，必须对它进行扩充. 但是也不必扩充到整个复数域 $\mathbb{C}$，实际上只要扩充到例 1 的数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 就足够了. 就是说，为了讨论 $x^2-2=0$ 的解，只需限制在数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 内就可以了. 把这个例子的思想推到一般情况. 设给定 n 次代数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0\quad(a_0\neq 0).$$

如果它的系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都属于某个数域 K，则它称为 K 上的一个 n 次代数方程. 显然，这个代数方程的根一般来说不全属于数域 K. 讨论它的根关键在于把 K 扩充为一个更大的数域 L，使 L 是包含此方程的所有根的“最小”数域(就像 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 是包含 $x^2-2=0$ 的所有根 $\pm\sqrt{2}$ 的最小数域一样). 法国数学家 Galois 首先认识到，为了深入探讨上面 n 次代数方程根的理论问题，一个基本课题是要研究从数域 L 到复数域 $\mathbb{C}$ 的映射 f，它满足如下条件：对所有 $a,b\in L$，有

$$f(a+b)=f(a)+f(b),\quad f(ab)=f(a)f(b),$$

也就是说，f 是保持数域两种运算：加法与乘法的对应关系的映射.

更一般的，设 K,L 是任意两个数域，如果 f 是 K 到 L 的一个映

射，而且对任意 $a,b\in K$，有

$$f(a+b)=f(a)+f(b),\quad f(ab)=f(a)f(b),$$

则称 f 是数域 K 到数域 L 的**同态映射**. 显然，如果对任意 $a\in K$，我们定义 $f(a)=0\in L$，则 f 自然是 K 到 L 的一个同态映射，它称为零同态映射. 零同态映射没有什么用处，问题是要找出非零同态映射. 当 f 是非零同态时，$f(1)\neq 0$，因为若 $f(1)=0$，则对任意 $a\in K$，$f(a)=f(1\cdot a)=f(1)f(a)=0$. 下面是几个简单的例子.

例 3　试求数域 $\mathbb{Q}$ 到数域 K 的全部非零同态.

解　设 f 是 $\mathbb{Q}$ 到 K 的非零同态，我们证明：对任意 $a\in\mathbb{Q}$ 都有 $f(a)=a$，即 f 是 $\mathbb{Q}$ 到自身的恒等映射：$f=\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.

首先，由 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$ 推知 $f(0)=0$. 设 $f(1)=a$，则 $a\neq 0$. 又由 $a=f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)f(1)=a^2$ 推知 $a=1$，即 $f(1)=1$. 于是，对任意正整数 n，有 $f(n)=f(1+1+\cdots+1)=f(1)+f(1)+\cdots+f(1)=1+1+\cdots+1=n$；而 $0=f(0)=f(1+(-1))=f(1)+f(-1)=1+f(-1)$，故 $f(-1)=-1$，$f(-n)=f((-1)\cdot n)=f(-1)f(n)=-n$. 对任意整数 n，$n\neq 0$，我们有 $1=f(1)=f\left(n\cdot\dfrac{1}{n}\right)=f(n)f\left(\dfrac{1}{n}\right)=nf\left(\dfrac{1}{n}\right)$，即 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}$. 由此，对任意有理数 $\dfrac{m}{n}$. 我们有 $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=f(m)f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{m}{n}$，即 $f=\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$. ▌

评议　前面已指出，$\mathbb{Q}$ 是最小的数域，任意数域 K 都包含 $\mathbb{Q}$，所以 K 到数域 L 的任意非零同态 f 限制在 $\mathbb{Q}$ 内就是 $\mathbb{Q}$ 到 L 的非零同态，因此 K 到任意数域 L 的非零同态都保持 $\mathbb{Q}$ 的元素不动. 上面证明中，首先利用同态映射 f 保持加法、乘法的对应关系决定出 $f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，然后推及全体整数与分数，这是一个有代表性的方法.

例 4　试求数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 到复数域的全体非零同态.

解　根据例 3，对任意 $a\in\mathbb{Q}$，有 $f(a)=a$. 于是对任意 $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$，有

$$f(a+b\sqrt{2})=f(a)+f(b\sqrt{2})=f(a)+f(b)f(\sqrt{2})$$
$$=a+bf(\sqrt{2}).$$

因为 $2=f(2)=f(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})=f(\sqrt{2})\cdot f(\sqrt{2})$，即 $f(\sqrt{2})=\pm\sqrt{2}$.

若 $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$，则 $f(a+b\sqrt{2})=a+b\sqrt{2}$.

若 $f(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$，则 $f(a+b\sqrt{2})=a-b\sqrt{2}$.

显然，对上述两种情况，f 都是 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 到 $\mathbb{C}$（实际上是 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 到自身）的非零同态，所以都是符合要求的答案. ▌

评议　这个例子中我们看到，非零同态 f 必定把 $x^2-2=0$ 的根（$\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$）仍然变为它的根，即 $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$. 从这个例子可以感觉到讨论数域间非零同态对研究一元 n 次代数方程根的重要意义.

例 5　试求实数域 $\mathbb{R}$ 到自身的全部非零同态.

解　设 f 是 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的非零同态. 由例 3 知，对一切 $a\in\mathbb{Q}$，有 $f(a)=a$. 对任意非零实数 b，必定 $f(b)\neq 0$. 因若有 $b_0\neq 0$，使 $f(b_0)=0$，则 $1=f(1)=f\left(b_0\cdot\dfrac{1}{b_0}\right)=f(b_0)f\left(\dfrac{1}{b_0}\right)=0$，矛盾. 设 a 是正实数，则 $f(a)=f(\sqrt{a}\cdot\sqrt{a})=f(\sqrt{a})f(\sqrt{a})>0$，即 f 把正实数变为正实数. 现设 $a>b$，则 $a-b>0$，我们有

$$0<f(a-b)=f(a+(-b))=f(a)+f((-1)b)$$
$$=f(a)+f(-1)f(b)=f(a)-f(b),$$

从而 $f(a)>f(b)$. 对任意无理数 b，因它是无限不循环小数，所以存在两个有理数序列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，使

$$x_1<x_2<x_3<\cdots<b,$$
$$y_1>y_2>y_3>\cdots>b,$$

且 $\lim x_n=\lim y_n=b$，于是

$$f(x_1)<f(x_2)<f(x_3)<\cdots<f(b),$$
$$f(y_1)>f(y_2)>f(y_3)>\cdots>f(b).$$

但 $x_i\in\mathbb{Q}$，$y_j\in\mathbb{Q}$，故 $f(x_i)=x_i$，$f(y_j)=y_j$，于是

$$x_1<x_2<x_3<\cdots<f(b),$$
$$y_1>y_2>y_3<\cdots>f(b).$$

由此知 $b=\lim x_n\leqslant f(b)$，$b=\lim y_n\geqslant f(b)$. 因此，$f(b)=b$. 这表明 f

为$\mathbb{R}$到自身的恒等映射：$f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. ▌

评议　这个例子利用了无理数是有理数递升序列$\{x_n\}$和递减序列$\{y_n\}$的公共极限这个知识，充分运用了数学分析中序列极限的性质，这体现了代数和数学分析密切结合、相互渗透的状况. 它说明在处理问题时要全面运用各个领域的知识，而不能把不同领域互相隔离. 否则可能找不到解决问题的途径.

中学代数研究的另一个重要课题是二、三元一次联立方程组. 二元一次联立方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

在中学里还没有数域的概念，所以笼统地把上面方程组中的系数a_1,a_2,b_1,b_2和常数项c_1,c_2都看做实数. 在解析几何中，一个实系数二元一次方程代表平面上的一条直线. 由于这个原因，后来人们就把多元的一次方程称为线性方程. 现在我们应当把认识提高一步. 例如下面方程组

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2})x+3y=\sqrt{2}-1, \\ 7\sqrt{2}x+(3-\sqrt{2})y=5-\sqrt{2}, \end{cases}$$

它的系数不应笼统地看做实数，而应看做数域$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$中的数，因此，用严格的科学语言说，上面的方程组应当称为数域$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$上的二元一次联立方程组. 当我们求解这个方程组时，是把某个方程加上另一方程的适当倍数以消去一个未知量(x或y)，变成一个一元一次方程. 从中解出一个未知量，再代入原方程解出另外一个未知数. 在这个过程中只进行加、减、乘、除运算. 因为数域对上述四则运算是封闭的，所以解方程组的全部过程都在$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$内进行，无需顾及其他实数(复数).

当我们研究有n个未知数$x_1,x_2,\cdots,x_n$的一次(线性)方程组时，它的一般形式可以表示成

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$