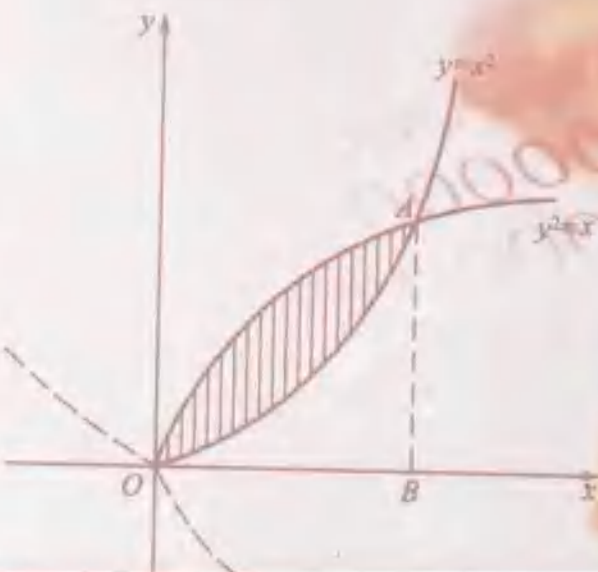
21世纪农业部高职高专规划教材

# 高等数学

GAODENG
SHUXUE

于桂萍　梅　霞　主编

中国农业出版社



21世纪农业部高职高专规划教材

# 高 等 数 学

于桂萍　梅　霞　主编

中国农业出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学/于桂萍，梅霞主编．—北京：中国农业出版社，2007.8
21世纪农业部高职高专规划教材
ISBN 978-7-109-11867-6

Ⅰ．高… Ⅱ．①于…②梅… Ⅲ．高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第116558号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路2号）
（邮政编码 100026）
责任编辑 薛 波

北京通州皇家印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
2007年8月第1版 2007年8月北京第1次印刷

开本：720 mm×960 mm 1/16 印张：18.75
字数：325千字
定价：24.70元

**主　编**　于桂萍　梅　霞

**副主编**　吕桂先

**参　编**　陆小华　洪　伟　马提宝

**审　稿**　卓春英　刘连福

# 前　言

本教材在广泛调查研究的基础上，结合高职高专教育教学改革的新形势及编者多年来的教学实践经验编写而成。

本教材的编写紧紧围绕高职高专教育的培养目标，充分体现基础课以应用为目的，以“必需、够用”为原则，对传统高等数学内容进行了相应的整合，全书章节布局更趋于合理、实用。

在内容上，我们力求概念清晰，定理公式、方法明了，总结概括适度，重视数学思想的渗透、重视数学方法及几何意义的应用，淡化推理和证明；重视知识的先进性、科学性，淡化系统性、完整性；例题和习题的选择贴近基本知识点、贴近应用实际，避开难题、偏题，习题安排注重层次性，有巩固每节知识、方法和能力的习题，有服务于检测每章综合知识、方法和能力的自测题（A）和（B），并在书后配有答案；本章小结对知识脉络、常见题型、解题思想方法与技巧等进行了梳理，便于学生学习和教师讲授。

本教材由于桂萍（黑龙江农业经济职业学院）、梅霞（江苏农林职业技术学院）任主编，吕桂先（甘肃农业职业技术学院）任副主编。具体编写人员和编写分工如下：洪伟（江苏畜牧兽医职业技术学院）编写第1章，梅霞编写第2章和第6章，吕桂先编写第3章，马提宝（黑龙江农业经济职业学院）编写第4章，于桂萍编写第5章和第7章，陆小华（北京农业职业学院）编写第8章。全书的结构设计及统稿由于桂萍完成。卓春英（黑龙江农业职业技术学院）、刘连福（大连水产学院职业技术学院）担任本教材的审稿，对全书内容进行了审阅并提出了宝贵意见。

对以上编审人员的辛勤劳动深表敬意！对各编审人员所在院校的大力支持深表谢意！

不妥之处恳请广大读者批评指正，我们将不胜感激。

编　者

2007年5月

# 目　　录

# 第1章　极限与连续

极限概念是研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的，它是微积分学的重要基本概念之一．微积分学中的其他几个重要概念，如连续、导数、定积分等，都是用极限来表述的，并且微积分学中的很多定理也是用极限方法推导出来的，所以极限是高等数学学习的重要工具．

本章在对函数知识进行复习和补充的基础上，重点介绍函数极限的概念、运算法则和方法，并学习函数的连续性定义及连续函数的性质．

通过学习，理解函数、基本初等函数、初等函数、函数极限的定义及性质，掌握极限运算的方法，会判断函数的连续与间断，能灵活应用所学知识求函数的极限、解决函数的连续性等有关问题．

## 1.1　函　　数

在研究许多自然现象的过程中，往往会遇到一些彼此有依赖关系的变量，例如圆的面积与半径的关系为 $s=\pi r^2$，当圆形均匀金属片受热膨胀时，半径 $r$ 发生变化，面积 $s$ 也随之变化；当半径 $r$ 在其变化范围内取某个确定值时，面积 $s$ 也随之确定．变量间的这种依赖关系就是函数关系．

### 1.1.1　函数的概念

**定义 1.1**　设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，$D$ 是一个非空实数集，如果对于数集 $D$ 中的每一个 $x$，按照一定的**对应法则** $f$，$y$ 都有唯一确定的实数值与之对应，则称 $y$ 是定义在数集 $D$ 上的 $x$ 的**函数**，记作

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中 $x$ 称为**自变量**，$y$ 称为**因变量**或函数，$D$ 称为函数 $f$ 的**定义域**，函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 $f$ 的**值域**．

从函数的定义可以看出，函数的定义域和对应法则是确定函数的两个要素．两个函数只有当定义域和对应法则都相同时，才是同一函数．

**例 1**　求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}-\arcsin\dfrac{x-6}{5}$ 的定义域．

**解** 要使函数有意义，必须

$$\begin{cases} 6-x>0 \\ \left|\dfrac{x-6}{5}\right|\leqslant 1 \end{cases}, \quad 即\ 1\leqslant x<6,$$

所以函数的定义域为$[1, 6)$.

在实际应用问题中，函数的定义域要根据问题的实际意义来确定.

**例 2** 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$，求 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$、$f[f(x)]$，并确定二者的定义域.

**解** $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{x^2}{x^2-1}$，$D=\{x \mid x\neq 0, \pm 1, x\in \mathbf{R}\}$；

$$f[f(x)]=f\left(\frac{1}{1-x^2}\right)=\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2}=\frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)},$$

$$D=\{x \mid x\neq 0,\ \pm 1,\ \pm\sqrt{2},\ x\in \mathbf{R}\}.$$

函数通常有三种表示方法：**公式法**（或**解析法**）、**列表法**和**图像法**.有些函数虽然可以用数学式子表示，但在其定义域内的不同区间上是用不同的解析式来表示的，这样的函数称为**分段函数**.例如

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ x+1, & x\geqslant 0 \end{cases}.$$

分段函数是用几个式子合起来表示一个函数，而不是几个式子表示几个函数，其定义域是各段自变量取值集合的并集；求分段函数值时，应把自变量代入相应取值范围的表达式中进行计算.

### 1.1.2 函数的特性

函数具有单调性、奇偶性和周期性，这些性质在高中都已学习过.下面详细介绍函数的有界性.

设 $I$ 为 $f(x)$ 的定义域区间的一个子区间，若存在正数 $M$，使得对一切 $x\in I$都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上**有界**，否则称 $f(x)$ 在 $I$ 上**无界**.有界函数的图像全部夹在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\arctan x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内有界，函数 $y=\dfrac{1}{x}$在 $(-\infty, 0)$ 内无界，但在 $[1, 4]$ 内是有界的.因此函数是否有界不仅与函数有关，而且与区间有关.

### 1.1.3　复合函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六种函数统称为基本初等函数，也称为简单函数．在复合函数的合成与分解中，多项式函数也看成是简单函数．

现实生活中，常常会遇到这样的问题，如成本 $C$ 可以看作是产量 $q$ 的函数，而产量 $q$ 又是时间 $t$ 的函数，那么成本 $C$ 通过产量 $q$ 成为时间 $t$ 的函数．

**定义 1.2**　设 $y=f(u)$、$u=\varphi(x)$，若 $\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$为 $x$ 的**复合函数**，$u$ 称为**中间变量**．

对于复合函数，要注意以下几点：

(1) 不是任何两个函数都能构成复合函数，例如 $y=\ln u$ 及 $u=-x^2-1$，因为 $u=-x^2-1$ 的值域 $(-\infty,\ -1]$ 与 $y=\ln u$ 的定义域 $(0,\ +\infty)$ 的交集是空集，因此不能复合．

(2) 复合函数可以有多个中间变量，例如 $y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=x^2+1$，则 $y=\ln\sin(x^2+1)$，这里 $u$、$v$ 都是中间变量，复合的方法就是代入．

复合函数的“分解”就是将一个复杂的函数分解成几个简单函数．

**例 3**　指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的．

(1) $y=\sqrt{\sec\dfrac{x}{5}}$；　　(2) $y=2^{\ln\sqrt{x^2-1}}$；　　(3) $y=\tan^2 2x$.

**解**　(1) $y=\sqrt{\sec\dfrac{x}{5}}$是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\sec v$，$v=\dfrac{x}{5}$复合而成的．

(2) $y=2^{\ln\sqrt{x^2-1}}$是由 $y=2^u$，$u=\ln v$，$v=\sqrt{t}$，$t=x^2-1$ 复合而成的．

(3) $y=\tan^2 2x$ 是由 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=2x$ 复合而成的．

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合步骤所构成，且可以用一个解析式表示的函数称为**初等函数**．分段函数不是初等函数．

例如 $y=\arctan x$，$y=\ln(x^2+1)$，$y=\dfrac{x^3-x^2+5}{\sqrt{\log_2(5x+3)}}$都是初等函数．而 $y=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$ 和 $y=\begin{cases}2x, & x\leqslant 0\\ 0, & x>0\end{cases}$都不是初等函数．

为了以后学习方便，下面给出高等数学中常用的邻域的概念．

给定实数 $a$，以点 $a$ 为中心的任何开区间称为点 $a$ 的邻域，记作 $U(a)$．

设 $\delta$ 是给定的正数，则开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域，记作 $U(a,\ \delta)$，即

$$U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 $a$ 称为邻域的中心，$\delta$ 称为邻域的半径．如图 1－1 所示．

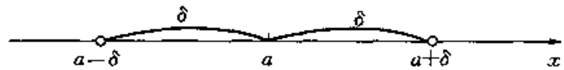



图 1－1

由于$\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\}$，所以

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

表示与点 $a$ 距离小于 $\delta$ 的一切点 $x$ 的全体．

有时会用到点 $a$ 的 $\delta$ 邻域中把中心 $a$ 去掉，此时称为点 $a$ 的去心 $\delta$ 邻域，记作 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

其中 $0<|x-a|$ 表示 $x \neq a$.

## 习　题　1.1

1. 下列说法是否正确？

(1) 若 $y=f(u)$ 为偶函数，$u=\varphi(x)$ 为奇函数，则 $y=f[\varphi(x)]$为偶函数；

(2) 设 $y=\arcsin u$，$u=x^2+3$，则这两个函数可以复合成一个函数；

(3) 函数 $y=\arctan 2x$ 是有界的；

(4) 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的定义域就是 $u=\varphi(x)$ 的定义域；

(5) 函数 $y=\sqrt{\cos(x+3)}$是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\cos(x+3)$ 复合而成的．

2. 设 $f(x)=2x^2+x-7$，求 $f(0)$，$f(2)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$，$f(t)$，$f(x-2)$．

3. 设 $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$，求 $f(-2)$，$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$．

4. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(2x-1)$；　　(2) $y=\arcsin\frac{x+1}{2}$.

5. 下列各对函数是否相同，为什么？

(1) $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$；　　(2) $y=\ln x^3$ 与 $y=3\ln x$；

(3) $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；　　(4) $y=\ln x^8$ 与 $y=8\ln x$；

(5) $y=\frac{1}{x+1}$与 $y=\frac{x-1}{x^2-1}$.

6. 将下列函数构成复合函数，并确定其定义域．

(1) $y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=2x-4$；　　(2) $y=\lg u$，$u=1+v^2$，$v=\sin x$.