教育部师范教育司组织专家审定
高等院校小学教育专业教材

高等数学基础（下册）

□邱　森　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等数学基础（下册）

教育部师范教育司组织专家审定
高等院校小学教育专业教材

高等数学基础

下册

主　　编　邱　森
编写人员　邱　森　高尚华

高等教育出版社

内容提要

本书分上、下册出版，下册内容为空间解析几何、多元函数微积分、线性代数、概率与统计等。本书题材丰富有趣，表述浅近易懂，引言、评注正本清源，能揭示知识的本质，提高思维的层次，可供高等院校小学教育专业作为教材使用，也可供其他专业学生选用或参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础．下册/邱森主编．—北京：高等教育出版社，2007.12
ISBN 978-7-04-022413-9

Ⅰ．高… Ⅱ．邱… Ⅲ．高等数学-高等学校-教材
Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 163601 号

策划编辑 张忠月 **责任编辑** 张忠月 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 王艳红 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京明月印务有限责任公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2007年12月第1版
印　　张	24.75	**印　　次**	2007年12月第1次印刷
字　　数	480 000	**定　　价**	26.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 22413-00

高等院校小学教育专业教材总序

我国已进入全面建设小康社会、加速推进现代化建设的新的历史阶段。在这样一个历史阶段，教育越来越成为促进社会全面发展、推动科技迅猛进步，进而不断增强综合国力的重要力量，成为我国从人口大国逐步走向人力资源强国的关键因素。我国的教师教育正面临着前所未有的机遇和挑战。教师教育的改革发展直接关系到千百万教师的成长，关系到素质教育的全面推进，关系到一代新人思想道德、创新精神和实践能力的培养和提高，最终关系到十六大提出的全面建设小康社会奋斗目标的实现。

培养具有较高学历的小学教师是全面建设小康社会和适应基础教育改革与发展的迫切需要，也是我国教师教育改革发展的必然趋势。为了适应基础教育改革与发展的需要，我国对培养较高学历小学教师工作进行了长时间的积极探索，取得了较大成绩，并积累了许多宝贵经验。《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》指出：建设高质量的教师队伍是全面推进素质教育的基本保障。教育部在《关于"十五"期间教师教育改革与发展的意见》中明确指出："开创教师培养的新格局，提高新师资的学历层次。"教育部印发的《关于加强专科以上学历小学教师培养工作的几点意见》（以下简称《意见》）中指出："教育部将组织制订专科学历小学教师的培养目标、规格，完善和改革课程体系和教学内容，制定《师范高等专科三年制小学教育专业教学方案（试行）》，组织编写小学教育专业教材，加强小学教育专业建设。"

开展小学教师培养工作，课程教材建设是关键。当务之急是组织教育科研机构、高等师范大学的专家学者和广大师专、综合学院的教师联合编写出一套高水平、规范化的、专为培养较高学历小学教师使用的教材。

编写小学教育专业课程教材，应该遵循以下原则：

一、时代性与前瞻性。教材要面向现代化、面向世界、面向未来，反映当代社会经济、文化和科技发展的趋势，贴近国际教育改革和我国基础教育课程改革的前沿，体现新的教育理念。

二、基础性与专业性。教材要体现高等专科或本科教育的基础性，同时要紧密结合当今小学教育课程改革的趋势和实施素质教育的要求，针对小学教育专业的特征和小学教师的职业特点，力求构建科学的教材体系，提高小学教师的专业化水平。

三、综合性与学有专长。教材要根据现代科技发展和基础教育课程改革综合化的趋势，强化综合素质教育，加强文理渗透，注重科学素养，体现人文精神，加强学科间的相互融合以及信息技术与各学科的整合；同时，根据小学教育的需要，综合性教育与单科性教育相结合，使学生文理兼通，学有专长，一专多能。

四、理论与实践相结合。教材要根据小学教师职前教育的要求，既要科学地安排文化知识课和教育理论课，又要加强实践环节，注重教育实践和科学实验，重视教师职业技能和职业能力的培养。

五、充分体现教材的权威性、专业性、通用性和创新性。以教育部制定的小学教育专业课程方案为编写依据，以本、专科通用为目的，培养、培训沟通，在教材体系框架、内容、呈现方式等方面开拓创新，加大改革力度，充分体现以学生为本的教育理念，使教材从能用、好用上升到教师、学生喜欢用。

高等教育出版社和华东师范大学出版社根据以上原则分别组织编写了有关教材，经过专家审定，我们向各地推荐这套教材，请有关学校和单位酌情选用。

教育部师范教育司
2004 年 2 月

目 录

第七章 空间解析几何

第八章 多元函数微积分

第九章 线性代数

第十章 概率与统计

第七章

空间解析几何

本章学习提要

- 向量代数
- 空间的平面和直线
- 二次曲面

从 17 世纪到 19 世纪初是变量数学时期，这时期是以法国数学家笛卡儿(R. Descartes, 1596—1650)和费马(P. de Fermat, 1601—1665)创立解析几何学为起点的. 在很大程度上，笛卡儿从轨迹开始，找出它的方程. 费马则从方程出发，来研究轨迹，他们工作的出发点不同，但却殊途同归，基本思想都是在平面上引进所谓“坐标”的概念，并借助这种坐标在平面上的点和有序实数对(x, y)之间建立一一对应关系，将一个代数方程$f(x, y)=0$与平面上一条曲线对应起来，于是几何问题便可归结为代数问题，并反过来通过代数问题的研究发现新的几何结果. 关于空间解析几何，虽然笛卡儿曾提到过立体解析几何，但他没有详细阐述，把平面解析几何推广到空间，是从 17 世纪中叶开始的，它的发展则是 18 世纪的事. 1715 年，瑞士数学家约翰·伯努利(John Bernoulli, 1667—1748)在给莱布尼茨的信中引用了现在通用的三个坐标平面. 1731 年，法国数学家克莱洛(A. Clairaut, 1713—1765)在《关于双重曲率曲线的研究》中，给出了一些曲面的方程. 1748 年，瑞士数学家欧拉(L. Euler, 1707—1783)在《无限小分析引论》第二卷的附录中，引进了坐标变换和欧拉角，将一般的三元二次方程化成标准形，得到了六种曲面：锥面、柱面、椭球面、单叶和双叶双曲面、双曲抛物面(这是他发现的)以及抛物柱面. 法国数学家蒙日(G. Monge, 1746—1818)在他的论文《代数在几何中的应用》(1802 年)中，证明了二次曲面的每一个平面截口都是一条二次曲线. 克莱洛、欧拉、蒙日等人的工作使空间解析几何变成了几何学的一个分支，他们对微分几何的早期发展也做出了重要的贡献，空间解析几何的早期工作和微分几何的发展有着紧密的联系.

空间解析几何的主要任务是用代数的方法研究空间图形的性质. 这在工程技术上也有广泛的应用. 本章将介绍向量代数、空间的平面和直线、二次曲面等基础知识，利用它们，也能给多元函数提供直观的几何解释，给多元函数的积分学提供必要的准备知识.

一 向量代数

向量是解析几何中最重要的基本概念之一，它在数学和物理中都有广泛的应用. 本节将介绍向量代数的基本概念及其应用. 下一节还将利用向量作工具来讨论空间的平面方程和直线方程及其性质.

7.1 空间直角坐标系

在平面解析几何中，我们建立了平面直角坐标系，并通过平面直角坐标系，把平面上的点与有序实数对(即点的坐标)(x, y)对应起来. 为了确定平面上任意一点的位置必须要用两个坐标：横坐标 x 和纵坐标 y. 现在为了确定空间任意一点的位置，两个坐标已经不能确定其位置了. 为此，我们在平面直角坐标的基础上，再增

加一条数轴，引进竖坐标，建立空间直角坐标系，使得空间的点也均可用坐标表示.

过空间一个定点 O，作三条互相垂直且具有相同长度单位的数轴：Ox 轴，Oy 轴和 Oz 轴(图 7－1)，这三条轴分别叫做 x 轴，y 轴和 z 轴，统称坐标轴. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线，它们的正方向符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正向转向 y 轴正向时，大拇指指向 z 轴的正向，这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系，点 O 叫做坐标原点(简称原点).

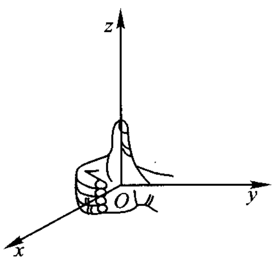

图 7－1

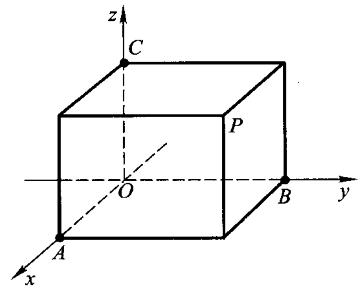

图 7－2

设 P 是空间一已知点，过点 P 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，设它们与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点依次为 A，B，C(图 7－2)，这三点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x，y，z. 我们把有序实数组(x, y, z)叫做点 P 的坐标，把 x，y，z 依次称为点 P 的横坐标，纵坐标和竖坐标. 坐标为(x, y, z)的点 P 通常记作 $P(x, y, z)$. 反过来，已知一有序实数组(x, y, z)，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 A，在 y 轴上取坐标为 y 的点 B，在 z 轴上取坐标为 z 的点 C，然后通过 A，B 和 C 分别作 x 轴、y 轴和 z 轴的垂直平面. 这三个垂直平面的交点 P 的坐标恰是(x, y, z). 这样，就建立了空间的点 P 和有序实数组(x, y, z)之间的一一对应关系.

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面. 由 x 轴及 y 轴所确定的平面叫做 xOy 平面，由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的平面分别叫做 yOz 平面和 zOx 平面，这样定出的三个平面统称为坐标面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个卦限(图 7－3). 含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限. 在第一卦限内的点的坐标均为正数.

坐标轴和坐标面上的点的坐标各有一定的特征. x 轴上的点的纵坐标和竖坐标均为零，因此，它的坐标的形式是$(x, 0, 0)$，类似地，在 y 轴和 z 轴上的点的坐标形式分别是$(0, y, 0)$和$(0, 0, z)$. 如果点 $P(x, y, z)$在 yOz 平面上，则 $x=0$；同样，在 zOx 平面上，则 $y=0$；在 xOy 平面上，则 $z=0$，如果点 $P(x, y, z)$为原点，则 $x=y=z=0$.

例 7.1 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 $|AB|=7$，$|AD|=6$，$|AA_1|=10$. 以长方体的顶点 A 为坐标原点，以边 AB，AD，AA_1 分别所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立直角坐标系(图 7－4). 求长方体的各顶点的坐标.

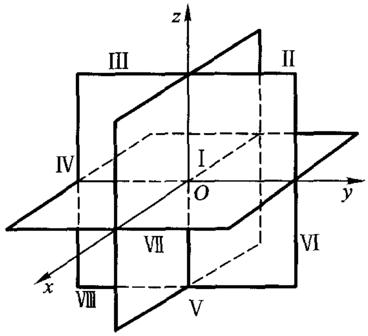

图 7－3

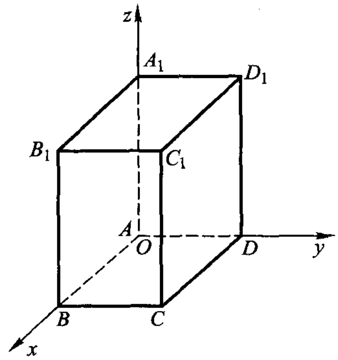

图 7－4

解 点 A 是坐标原点 O，其坐标为(0，0，0)．点 B 在 x 轴的正半轴上，且 $|AB|=7$，所以 B 点的坐标为(7，0，0)．同理 D 点在 y 轴的正半轴上，其坐标为(0，6，0)．C 点在 xOy 平面上，其竖坐标为0，横坐标和纵坐标分别为7和6，所以 C 点坐标为(7，6，0)．

类似地可得，A_1 点坐标为(0，0，10)，B_1 点坐标为(7，0，10)，D_1 点坐标为(0，6，10)．

最后，求 C_1 点的坐标．由于过点 C_1 的三个分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点依次为 B，D 和 A_1，这三点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为7，6和10，所以 C_1 点坐标为(7，6，10)．

建立了空间直角坐标系后，平面中的许多概念和结论都可以推广到空间中来．

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点(图 7－5)，则我们也可以利用勾股定理来求 P_1 和 P_2 之间的距离 $|P_1P_2|$．

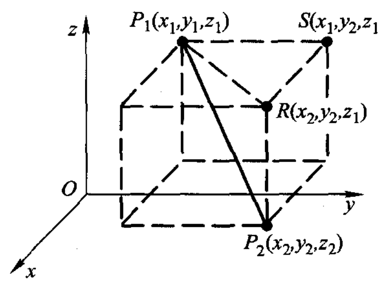

图 7－5

因为 $|P_1P_2|^2=|P_1R|^2+|RP_2|^2$ 和 $|P_1R|^2=|P_1S|^2+|SR|^2$，所以

$$|P_1P_2|^2=|P_1S|^2+|SR|^2+|RP_2|^2.$$

又因为 $|P_1S|^2=(y_2-y_1)^2$，$|SR|^2=(x_2-x_1)^2$ 和 $|RP_2|^2=(z_2-z_1)^2$，所以

$$|P_1P_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

因此，P_1 和 P_2 之间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

上式称为空间两点之间的距离公式．

特别，点 $P(x, y, z)$ 到原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 7.2 求点 $P_1(3, -1, 8)$ 和点 $P_2(0, 1, 2)$ 之间的距离.

解
$$|P_1P_2| = \sqrt{(0-3)^2+[1-(-1)]^2+(2-8)^2}$$
$$= \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7.$$

7.2 向量及其线性运算

1. 向量的概念

在研究力学、物理学以及工程技术的各种问题时，将会遇到各种量. 有一些量在有了测定单位后，只需用一个实数就可以表示. 例如，温度、时间、长度、面积、体积等，这些只需要用一个实数就可以表示的量叫做标量. 但是，也有一些量不能只用一个实数来表示. 例如，我们考察这样的一个问题：

一艘轮船从海港向大海行驶 10 km 后抛锚停驶，试问能否就此确定该船的实际位置？

我们发现，仅知道行驶的距离还不能确定它的实际位置，必须知道它的行驶方向. 在物理学中，把物体沿某一方向移动一个距离叫做物体的位移，位移是一个既有大小又有方向的量. 我们把既有大小又有方向的量叫做向量. 因此，在确定上述轮船的实际位置时，必须知道它的位移向量. 除了位移以外，速度、加速度、力等都是既有大小又有方向的量，因此，它们都是向量.

几何学中通常用有向线段来表示向量，用线段的长表示向量的大小，以箭头所指的方向（即从始点到终点的方向）来表示向量的方向. 一般地，以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量（如图7－6）记作 $\overrightarrow{AB}$，读作向量 AB，有时也可记作 $\boldsymbol{\alpha}$. 向量的长度叫做向量的模，向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模记作 $|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量. 模等于零的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$，零向量是始点和终点重合的向量，它的方向是任意的.

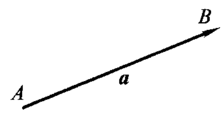

图 7－6

一个向量的重要特性是它的大小和方向. 如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 有相同的大小和方向，不管它们是否具有相同的始点，都称它们是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 实际上，相等的向量就是经过平行移动能完全重合的向量. 这是因为向量经过平移，它的大小和方向都不会改变，所以，平移后所得到的向量与原向量相等. 如图 7－7 中，$\overrightarrow{AB}$ 经平移后可得 $\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 是两个相等的向量. 并且可记作

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}.$$

例 7.3 已知平行四边形 $ABCD$，O 是对角线的交点，分别写出图 7－8 中与 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AO}$ 相等的向量.

解 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，

注意，向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相同是指它们在同一直线上或者在平行直线上，并且指

向是相同的. 图 7－8 中，向量$\overrightarrow{BO}$和$\overrightarrow{DO}$在同一直线上并且模相等，但是由于指向相反，因而它们的方向相反，且不相等.

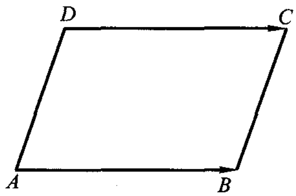

图 7－7

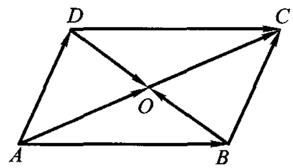

图 7－8

我们把与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，$\boldsymbol{a}$ 的负向量记作 $-\boldsymbol{a}$. 例如，图 7－8 中，向量$\overrightarrow{DO}$是$\overrightarrow{BO}$的负向量，即

$$\overrightarrow{DO}=-\overrightarrow{BO}.$$

又如，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

2. 向量的加法与减法

在力学中，两个不在一条直线上的共点力$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$的合力是以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线$\overrightarrow{OC}$所表示的力(图 7－9)，这就是求两力的合力的平行四边形法则.

在数学中，我们也同样用平行四边形法则来定义向量的加法运算. 我们把以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线$\overrightarrow{OC}$，叫做向量$\overrightarrow{OA}$和向量$\overrightarrow{OB}$的和，记作$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$(图 7－10). 于是，

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

这种用平行四边形法则规定的两个向量的和的运算叫做向量的加法.

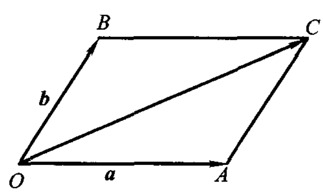

图 7－9

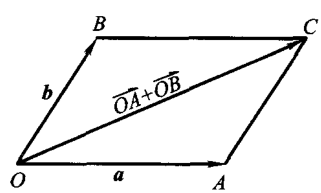

图 7－10

由于平行四边形的对边平行且相等，所以，在图 7－10 中，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，因此，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$. 于是，从图 7－10 还可以看出，我们可以这样来作两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和：作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，以$\overrightarrow{OA}$的终点 A 为始点作$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，连接 OC，就得$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}$，这一法则叫做向量加法的三角形法则. 例如，一个人从 O 走到 A，位移为$\overrightarrow{OA}$，再从 A 走到 C，位移为$\overrightarrow{AC}$，那么这两个位移的合成就是$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$. 利用$\overrightarrow{OC}$就可以表示该人经过两次位移后的实际位置.

对位于一直线上的两个同向或反向向量的加法，也可按三角形法则进行，如图 7－11 所示.

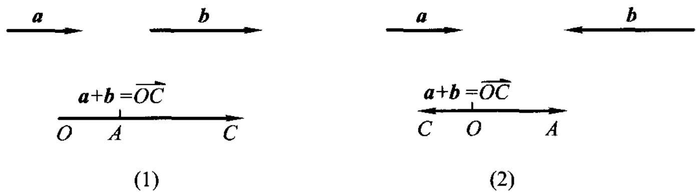

图 7－11

向量的加法符合下列运算律：

（1）交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

这是因为按向量加法的平行四边形法则，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$（参见图 7－10），所以交换律成立. 又如图 7－12 所示，先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再加上 $\boldsymbol{c}$，得和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 加 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 所得之和 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 相同，因而结合律也成立.

例 7.4　已知平面内有三个力 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3$，它们的大小相等，并且两两之间的夹角都是 120°. 求这三个力的合力.

解　如图 7－13，以 $\overrightarrow{OB}(=\boldsymbol{f}_2)$，$\overrightarrow{OC}(=\boldsymbol{f}_3)$ 为邻边作平行四边形 $OBDC$.

因为 $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$，所以 $|BD|=|OC|=|OB|$，又因为 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 夹角为 120°，$\angle DBO=60°$，所以 $\triangle BDO$ 是等边三角形. 因此，$|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OB}|=|\boldsymbol{f}_2|=|\boldsymbol{f}_1|=|\overrightarrow{OA}|$.

注意到 $\angle BOD=60°$，所以，$\angle AOB+\angle BOD=180°$，因此，$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$. 于是，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\\&=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OA})\\&=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3$ 三个力的合力为零.

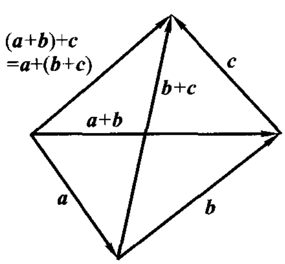

图 7－12

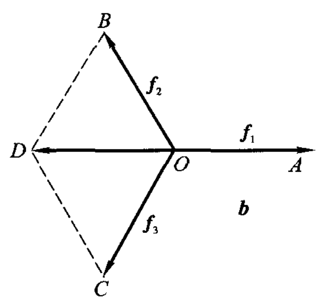

图 7－13

类似于有理数的减法运算，如果已知两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，那么我们把 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.