中国石油大学（华东）远程与继续教育系列教材

经济应用数学

微积分

CALCULUS

费祥历 何苏阳 编

中国石油大学出版社

责任编辑：宋秀勇
封面设计：霍良勇

upol 石大在线
www.upol.cn

ISBN 978-7-5636-2165-1
9 787563 621651 >

定价：23.00元

中国石油大学(华东)远程与继续教育系列教材

经济应用数学

微积分

费祥历　何苏阳　编

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分:经济应用数学/费祥历,何苏阳编. —东营:中国石油大学出版社,2007.1

ISBN 978-7-5636-2165-1

Ⅰ.微… Ⅱ.①费…②何… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 000402 号

书　　名:微积分:经济应用数学

作　　者:费祥历　何苏阳

责任编辑:宋秀勇(电话　0546—8392139)

封面设计:霍良勇

出 版 者:中国石油大学出版社(山东　东营,邮编　257061)

网　　址:http://www.uppbook.com.cn

电子信箱:yibian@mail.hdpu.edu.cn

印 刷 者:沂南县汇丰印刷有限公司

发 行 者:中国石油大学出版社(电话　0546—8392139)

开　　本:170×230　印张:19　字数:348 千字

版　　次:2007 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

定　　价:23.00 元

中国石油大学(华东)
远程与继续教育系列教材编审委员会

主　任：仝兴华

副主任：齐高岱　刘衍聪

委　员：戴俊生　邱正松　刘雪暖　崔学政　李雷鸣
署恒木　刘润华　梁　鸿　吕巍然　李书光
孙秀丽　王建军　王天虎　马国刚

总 序

从 1955 年创办函授夜大学至今，中国石油大学成人教育已经走过了从初创、逐步成熟到跨越式发展的 50 载历程。50 多年来，我校成人教育紧密结合社会经济发展需求，积极开拓新的服务领域，为石油、石化企业培养、培训了 10 多万名本专科毕业生和管理与技术人才，他们中的大多数已经成为各自工作岗位的骨干和中坚力量。我校成人教育始终坚持“规范管理、质量第一”的办学宗旨，坚持“为石油石化企业和经济建设服务”的办学方向，赢得了良好的社会信誉。

自 2001 年 1 月教育部批准我校开展现代远程教育试点工作以来，我校以“创新教育观念”为先导，以“构建终身教育体系”为目标，整合函授夜大学教育、网络教育、继续教育资源，建立了新型的教学模式和管理模式，构建了基于卫星数字宽带和计算机宽带网络的现代远程教育教学体系和个性化的学习支持服务体系，有效地将学校优质教育资源辐射到全国各地，全力打造出中国石油大学现代远程教育的品牌。目前，办学领域已由创办初期的函授夜大学教育发展为今天的集函授夜大学教育、网络教育、继续教育、远程培训、国际合作教育于一体的，在国内具有领先水平、在国外有一定影响的现代远程开放教育系统，成为学校高等教育体系的重要组成部分和石油、石化行业最大的成人教育基地。

为适应现代远程教育发展的需要，学校于 2001 年 9 月正式启动了网络课程研制开发和推广应用项目，斥巨资实施“名师名课”教学资源精品战略工程，选拔优秀教师开发网络教学课件。随着由流媒体课件、WEB 课件到网络课程的不断充实与完善，建构了内容丰富、形式多样的网络教学资源超市，基于网络的教学环境初步形成，远程教育的能力有了显著提高，这些网上教学资源的建设与研发为我校远程教育的顺利发展起到了支撑和保障作用。相应地，作为教学资源建设的一个重要组成部分，与网络教学课件相配套的纸质教材建设就成为一

项愈来愈重要的任务。根据学校现代远程教育发展规划，在“十一五”期间，学校将推进精品课程、精品网络课件和教材建设工作，通过立项研究方式启动远程与继续教育系列教材建设工作，选聘石油石化行业和有关石油高校专家、学者参与系列教材的开发和编著工作，计划用5年的时间，以石油、化工等主干专业为重点，陆续推出成人学历教育、岗位培训、继续教育三大系列教材。系列教材将充分吸收科学技术发展和成人教育教学改革最新成果，体现现代教育思想和远程教育教学特点，具有先进性、科学性和远程教育教学的适用性，形成纸质教材、多媒体课件、网上教学资料互为补充的立体化课程学习包。

为了保证“远程与继续教育系列教材”编写出版进度和质量，学校成立了专门的远程与继续教育系列教材编审委员会，对系列教材进行严格的审核把关，中国石油大学出版社也对系列教材的编辑出版给予了大力支持和积极配合。目前，远程与继续教育系列教材的编写还处于探索阶段，随着我校现代远程教育的进一步发展，新课程的开发、新教材的编写将持续进行，本系列教材的体系也将不断完善。我们相信，有广大专家、学者们的共同努力，一定能够创造出适合现代远程教育教学和学习特点、体系新、水平高的远程与继续教育系列教材。

中国石油大学(华东)远程与继续教育学院

2006 年 10 月

前言

qian　yan

当代科学技术的一个显著特点是定量化和信息化，实际上就是数学化和计算机化，而计算机化的基础也是数学化. 因此，数学术语、数学思想、数学方法必然要渗透到各门学科中去，数学成为各门学科必备的知识基础和基本工具就成为必然的了，经济、管理类学科也不例外. 经济学诺贝尔奖从 1969 年首届授予计量经济学的奠基人 R. Fisher（挪威，1895—1979）和 J. Tinbergen（荷兰，1903—1994）以来，到 1997 年已有 17 位获奖者的工作直接与数学有关. 瑞典皇家科学院院长 E. Lundberg 在首届颁奖仪式上说道："过去 40 年中，经济科学日益朝着用数学表达经济内容和统计定量的方向发展."数学方法已经成为当代经济分析中常用的、普遍有效的方法. 要在经济学研究中做出成就，越来越需要具备深厚的数学功底. 如 1994 年诺贝尔经济学奖获得者之一 J. Nash（美国，1928—），好莱坞大片《美丽心灵》的原型，就是著名的数学家、普林斯顿大学的数学博士，除对博弈论做出了很大的成绩外，在抽象的纯数学的研究中也有重大贡献. 2005 年的诺贝尔经济学奖授予拥有以色列和美国双重国籍的罗伯特·奥曼（1930—）和美国经济学家托马斯·谢林（1921—），罗伯特·奥曼于 1955 年获美国麻省理工学院数学博士学位. 瑞典皇家科学院在颁奖文告中称，75 岁的罗伯特·奥曼和 84 岁的托马斯·谢林的研究成果有助于"解释价格战和贸易战这样的经济冲突以及为何一些社区在运营共同拥有的资源方面更具成效". 再如社会科学中的管理科学、质量控制、产品设计、运筹优化、金融投资分析、保险业、市场预测等都在大量地应用着数学. 随着数字化生存方式对我们生活的快速渗透，数学概念和词汇在文化创作和日常生活中的使用也愈加频繁. 数学理论与计算机的结合更是产生了五花八门的新技术，从医疗手段到动画制作，从指纹或签字的识别到自动排版技术，从现代通信技术到信息安全处理等，它们应用的不仅是过去传统的数学，也有非常现代的前沿

数学.美国埃克森石油开发部总裁、著名的数学家爱德华·大卫深刻地指出:很少有人认识到当今如此广泛称颂的高技术在本质上是一种数学技术.现在所谓的信息化时代,实质上就是一个数学时代.正是在这种背景下,1992 年联合国教科文组织在里约热内卢宣布“2000 年是世界数学年”.目的是加强数学与社会的联系,里约热内卢宣言指出:“纯粹数学和应用数学是理解世界及其发展的一把钥匙.”2001 年 1 月,美国 21 世纪国家安全委员会发表的为期 3 年的研究报告中称,美国数学和自然科学教育的不断恶化已经造成了国家安全危机.如不努力提高学生数学和自然科学上的成绩,将对国家构成威胁,威胁将超过任何一场常规战争.而令人刮目相看的印度计算机软件业之所以能迅速跃升为世界前列的秘诀之一,就是其对数学教育的重视.这也正是为什么我国越来越多的高等教育学科加设数学课程和越来越多学科的研究生入学考试时加试数学的原因.经济学类研究生入学考试对数学的要求是相当高的.现在你可能不难理解为什么有人说:“数学是人类知识的入口处之一.”从另一个角度来说,你可以设想一下,如果没有数学,你在现代社会中如何生存?

在高等教育本专科经济、管理、会计类专业中,经济数学基础课程是各专业本专科生的必修专业基础课.该课程体系包括微积分、线性代数、概率与数理统计三门独立设置的课程.微积分是其中一门内容丰富、课时量大,对后继课程的学习和今后的发展提高有重要影响的专业基础课,也是经济、管理、会计类专业的核心课之一.学习高等数学课程除了为我们提供学习后继课程所必需的数学知识外,同时会使得我们的思维能力和素质得到很大的提升.比如,归纳总结的能力,演绎推理的能力,提出问题、分析问题、解决问题的能力,抽象思维的能力,空间想象和联想的能力,独立获取新知识和创新的能力,科学计算和估算的能力,比较准确的口头和书面表达的能力等等.这些能力的高低直接关系到社会成员对事物的洞察、理解与判断能力,是具有长期效应的.学习高等数学,就可以在掌握数学知识的同时,使自己的心理和智能受到引导、启迪.

学习本课程的学员应该具备初等数学的基础知识,大体相当于高中数学课程以及各类中等专业学校设置的数学课程所要求掌握的内容.要较好地掌握微积分的基本思想、方法和基本知识,需要认真阅读

课本，勤于思考，独立钻研，多做练习. 学习数学只有多做练习才能掌握数学概念、思想和方法，提高解题能力.

微积分的基本研究对象是函数，研究函数用的基本方法是极限的方法. 微积分课程的内容体系是：

第一部分，认识对象、掌握方法. 主要内容有：函数的概念(特别是认识常用的经济学函数)、函数的初等性质、函数的初等运算、一些具体的函数的认识(基本初等函数、初等函数、由初等函数构成的分段函数)；数列极限和函数极限的概念、性质、计算方法.

第二部分，函数的微观机理研究. 主要内容有：函数的连续性和间断性概念、连续性的判断和连续函数的性质；函数的导数和微分的概念、性质和导数及微分的计算方法；微分学基本定理，导数在研究函数性质中的应用.

第三部分，函数的宏观机理研究. 主要内容有：导数的逆运算即不定积分的概念和计算；定积分的概念、性质和计算；不定积分和定积分的应用.

第四部分，无穷求和与函数的无穷和表达. 主要内容有：数项级数和幂级数的概念、性质、敛散性判别法；幂级数的收敛区间的求法；简单函数的幂级数展开.

第五部分，多元函数的微积分. 主要内容有：多元函数的概念、偏导数与全微分的概念与计算、隐函数的导数计算；二重积分的概念和简单区域上简单函数的二重积分的计算.

第六部分，简单微分方程与差分方程. 主要内容有：微分方程与差分方程的概念，简单一阶、二阶微分方程与差分方程的解法.

对远程教育和函授教育的学员，教材中打星号的内容，要求学员有所了解，但是不做考试要求，作业练习以A类题为主. 对于计划进一步深造的学员来说，打星号的内容和B类练习题是需要的.

编　者

2006年10月

目 录

第0章 预备知识

为了能够顺利地学习微积分，必须具备初等数学知识并掌握它的基本思想方法. 在这一预备章里，我们将对初等数学知识做一个概略的复习，罗列一些要用到的初等数学公式.

0.1 集合的概念及其运算

1. 集合的概念

集合是现代数学的一个基本概念，现代数学主要是研究各种集合和集合之间的关系. 集合也是一个日常用语，比如单位要开会、学校要出操、部队要训练等活动，就需要把某个确定的人群集合起来. 数学上的集合是一个特定的数学概念，它的含义与日常用语的集合含义有类似之处. 根据集合论的创始人，德国数学家康托尔的描述，一个集合是一些确定的对象构成的一个整体. 集合可以用大写的英文字母 $A,B,\cdots,X,Y$ 等来表示，构成集合的那些对象称为集合的元素，元素可以用小写的英文字母 $a,b,\cdots,x,y$ 等表示. 如果集合 A 含有元素 x，称 x **属于** A，记为 $x\in A$，否则，称 x 不属于 A，记为 $x\notin A$，或者，$x\,\overline{\in}\,A$. 一个集合如果所含的元素有无穷多个，就称其为无限集合，所含的元素是有限多个，就称其为有限集合.

通常可以用两种方式表示一个集合：列举法、描述法.

列举法：当集合 E 是有限集合，且元素不太多时，可列举出 E 的全部元素，并用花括弧把这些元素括起来，看成为一个整体. 比如，由 1,2,3 这三个数字构成一个含三个元素的集合，记为 A，则 $A=\{1,2,3\}$. 再比如，26 个英文小写字母形成一个集合，记为 C，则 $C=\{a,b,c,\cdots,x,y,z\}$.

描述法：当集合 E 是无限集合，或者可以用描述的方法确定其所含元素的性质时，可以用给出所含元素特性的方法表示集合，记为 $E=\{x\mid p(x)\}$，其中 $p(x)$ 表示元素 x 所具有的特定性质. 比如，$B=\{x\mid(x-1)(x-2)(x-3)=0$，$x$ 是实数$\}$，则实际上有

$$B=\{x\mid(x-1)(x-2)(x-3)=0,x\text{ 是实数}\}=\{1,2,3\},$$

即 $B=A$. 即是说，虽然一个集合的描述方法，或者表示方法可以不同，但是只要所含的元素完全一样，就可看成是相等的集合. 因此，一个集合由其所含的元素完全确定. 在微积分中，全体非负整数、全体整数、全体有理数、全体实数，分别构成自然数的集合、整数的集合、有理数的集合、实数的集合，分别记为 $\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$.

给出一个集合，相当于给出了确定该集合元素的方法. 有些描述语句不足以确定一个集合. 例如，“某个确定的人群中的高个子人”，“某个确定的人群中的帅小伙”，这些语句不能够精确描述该人群中人的属性，无法确定某个人是否符合语句所描述的条件，因此不能够确定集合. 另一方面，“某个确定的人群中身高 1.8 米以上的人”，“某个确定的人群中的女人”，这些语句都能够确定集合.

如果集合 A 的元素都在集合 B 里，即对每个 $a\in A$，可得 $a\in B$，则称 A 是 B 的子集合，或者 B 包含 A，记为 $A\subset B$，或者 $B\supset A$. 显然有，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

由于没有实数能够满足关系式 $x^2+1=0$，因此集合 $\{x\,|\,x^2+1=0,x$ 是实数$\}$ 实际上不含任何元素，称这样的不含任何元素的集合为空集合，记为 $\varnothing$. 约定，对任何集合 E，$\varnothing\subset E$.

定理 1 设 A,B 是集合，则 $A=B$ 的充分必要条件是 $A\subset B$ 且 $B\subset A$.

2. 集合的初等运算

集合的运算是用已知的集合构造新集合的一种常用的方法. 设 A,B 都是集合，则

A 与 B 的**并**是一个集合，记为 $A\cup B$，定义为 $A\cup B=\{x\,|\,x\in A$ 或者 $x\in B\}$；

A 与 B 的**交**是一个集合，记为 $A\cap B$，定义为 $A\cap B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\in B\}$；

A 与 B 的**差**是一个集合，记为 $A-B$，定义为 $A-B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\notin B\}$；

A 与 B 的**笛卡尔积**是一个集合，记为 $A\times B$，定义为 $A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A,y\in B\}$.

例如，设 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{1,3,8\}$，则根据运算的定义可得

$A\cup B=\{0,1,2,3,8\}$； $A\cap B=\{1\}$； $A-B=\{0,2\}$；

$A\times B=\{(0,1),(0,3),(0,8),(1,1),(1,3),(1,8),(2,1),(2,3),(2,8)\}$.

图 0-1 是两个集合的并、交、差、笛卡尔积运算的示意图.

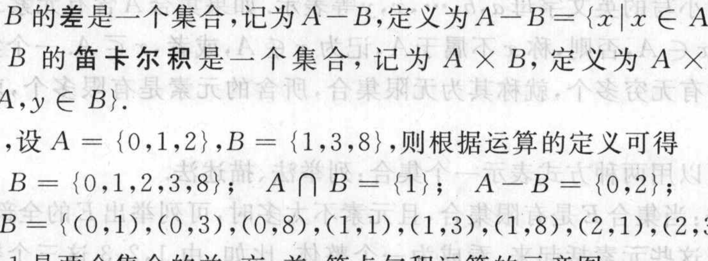

图 0-1

引入集合的笛卡尔积 $A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A,y\in B\}$ 的目的是对元素 x，

y 确定其顺序，称(x,y) 为一个有序元素组，其中，x,y 分别称为(x,y) 的第一个坐标和第二个坐标. 平面解析几何中的坐标平面可以看成实数集合 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}$ 的笛卡尔积，平面上点的坐标(x,y) 就是 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^2$ 中的元素. 也可以定义三个集合，甚至更一般的 n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的笛卡尔积，即

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}.$$

利用集合可以方便地表述对事物的分类. 例如，设 A,B,C 分别表示某个人群中懂中文、懂英文、懂法文的人的集合，则可以用 $A\cup B,B\cap C,A-C$ 分别表示懂中文或者懂英文，既懂英文又懂法文，懂中文但是不懂法文的人的集合.

根据集合运算的定义，集合的上述初等运算具有如下的简单性质：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3) 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4) 对偶律　$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$，
$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

0.2　实数及其简单性质

微积分基本是在实数范围内研究问题的，因此对实数集合及其性质应该有一个比较深入的了解. 在小学 $1\sim3$ 年级，学习了非负整数的概念和非负整数的加法、乘法以及能够除尽的除法. 在小学 $4\sim5$ 年级，或者 $4\sim6$ 年级学习了非负整数的加、减、乘、除四则运算及非负有理数（分数）的四则运算. 这些内容实际上是研究非负整数集合和非负有理数集合以及这些集合上的运算性质. 到了初中阶段，进一步引入了负数的概念，研究了包含负数的有理数集合及其一般有理数的四则运算性质，学习了指数运算，引入了无理数的概念，形成了实数集合. 用实数的十进制小数表示，任何有理数，都从某一位开始是循环小数，任何有理数都可以表示成两个整数的商，而无理数就是那些无限不循环小数表示的实数，无理数不可能表示成两个整数的商.

关于实数集合 $\mathbf{R}$，如下的性质应该是熟悉的：任意两个实数可以进行加、减、乘、除四则运算（但是作除法时，除数不能为零!），任意的正实数可以开任意的有理次方，负数不能在实数范围内开偶次方. 例如：

如下的运算$\frac{3}{4}$，$\sqrt[2]{5}$，$\sqrt[3]{-5}$，3^0，$(-4)^{\frac{4}{3}}$ 在实数范围内是有意义的.

第0章　预备知识

如下的运算$\frac{2}{0}$，$\sqrt[2]{-4}$，$(-3)^{\frac{3}{4}}$ 在实数范围内是没有意义的.

这些运算满足熟悉的运算规律，如加法、乘法都满足交换律，乘法关于加法满足分配律，等等. 实数还可以比较大小，从而实数集合在大小顺序下是一个有序的集合，并且四则运算性质和顺序之间是协调的. 例如：

对任意的 $a,b,c \in \mathbf{R}$，$a \leqslant b$，则 $a+c \leqslant b+c$；$c \geqslant 0$ 时，$ac \leqslant bc$.

有理数集合、无理数集合、实数集合还具有所谓的稠密性，稠密性也是这些集合的重要性质. 有理数的稠密性，即任何两个不同的有理数 a,b 之间，必定还至少有一个有理数 c，即，$a<c<b$. 实际上，取 $c=\frac{a+b}{2}$，就符合要求. 无理数集合、实数集合的稠密性可以类似地说明.

实数集合与有理数集合之间有一个本质的区别，即实数集合具有连续性，而有理数集合不具有连续性. 通俗地说，用实数点的全体可以填满数轴，用在高中所学过的一一对应概念，全体实数和数轴上点的集合可以建立一一对应关系，而有理数集合和数轴上点的集合之间不能够建立一一对应关系，从而单用有理点填充数轴时会有许多空隙. 这一区别使得微积分的理论必须建立在具有连续性的实数集合之上，在后续的学习中我们会逐渐理解这一点.

在中学学习过绝对值的概念. 实数 a 的绝对值，定义为数轴上表示 a 的点到原点的距离，记为 $|a|$. 根据定义，可得

$$|a|=\begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

绝对值具有如下一些简单性质：

(1) $|a|=|-a|=\sqrt{a^2} \geqslant 0$；

(2) $|x \pm y| \leqslant |x|+|y|$，$|x \pm y| \geqslant |x|-|y|$；

(3) $|xy|=|x||y|$，$\left|\frac{y}{x}\right|=\frac{|y|}{|x|}$.

在实数集合的子集合中，区间和邻域是以后要经常用到的两类特殊子集合. 设 a,b 是实数，$a<b$，则以 a,b 为端点的开区间 (a,b)，闭区间 $[a,b]$，半开区间 $(a,b]$，$[a,b)$ 分别是集合：

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}, \quad [a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$

$$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}, \quad [a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}.$$

上述四类区间的长度都是 $b-a$.

符号 $+\infty$ 的含义是：对任何实数 a，$a<+\infty$，$+\infty$ 读作正无穷大，有时可简写为 ∞.

符号 $-\infty$ 的含义是：对任何实数 a，$a>-\infty$，$-\infty$ 读作负无穷大.