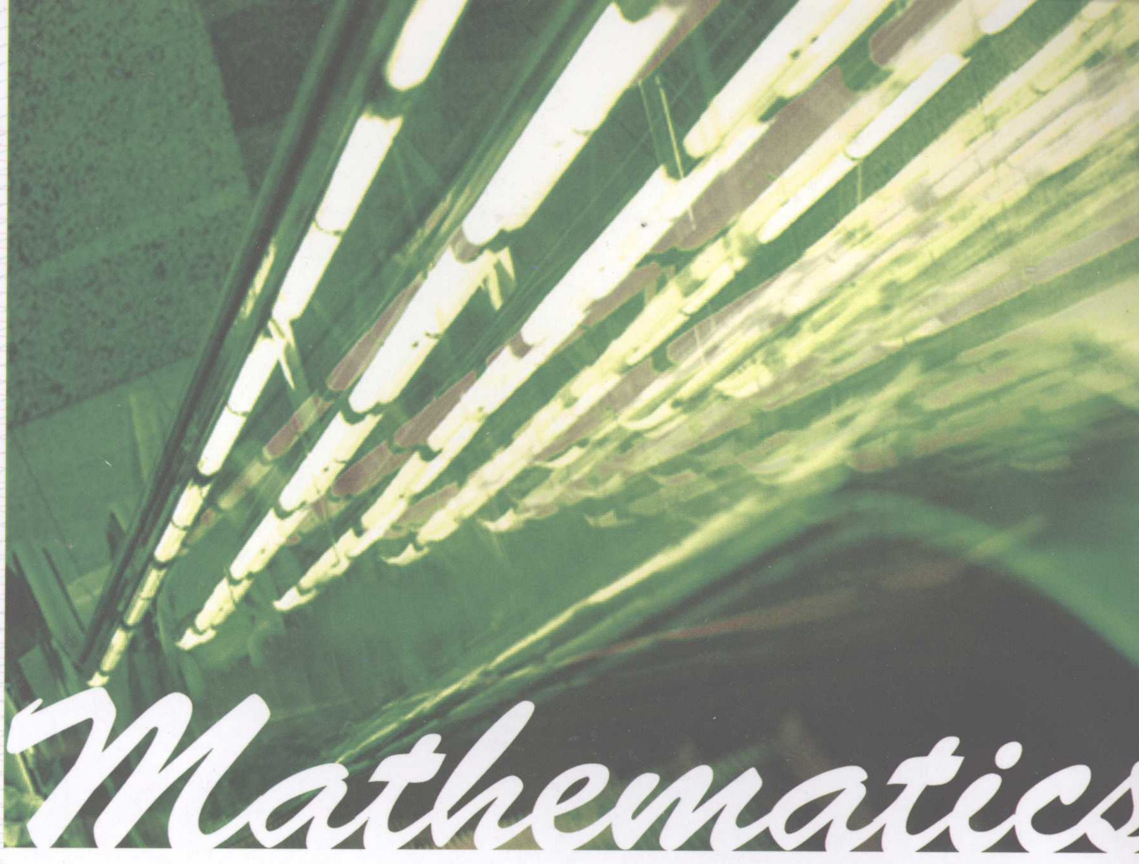


新世纪职成教育数学课程系列教材

高等数学

■ 主编 曾文斗

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

新世纪职成教育数学课程系列教材

高等数学

主　　编　曾文斗
编　　者　王子丁　林小龙　林伟洪
　　　　　周雅丽　杨培娟

高等教育出版社

内容提要

本书是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《全国各类成人高等学校专升本招生高等数学复习考试大纲》编写而成的数学教材。本书淡化了理论推导和证明，内容的编排更适合现在的生源状况。

本书的主要内容包括：函数的极限与连续性；导数与微分；导数与微分的应用；积分；多元函数微分法；常微分方程；无穷级数；概率论初步。

本书适合于普通高等职业院校（特别是民办高校）以及成人高校大专班（专升本）学生复习使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学／曾文斗主编. —北京：高等教育出版社，2007.6

ISBN 978-7-04-021768-1

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 曾…　Ⅲ. 高等数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 093445 号

责任编辑　徐　东　特约编辑　杨琳琳　封面设计　吴　昊　责任印制　蔡敏燕

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		021-56964871
邮政编码	100011	免费咨询	800-810-0598
总　　机	010-58581000	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	021-56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
排　　版	南京理工出版信息技术有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	上海师范大学印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2007 年 7 月第 1 版
印　　张	12.75	印　　次	2007 年 7 月第 1 次
字　　数	320 000	定　　价	17.00 元

物料号　21768-00

前 言

本书及其配套教材《高等数学学习辅导与训练》(以下简称为《辅导》)是为高等职业技术院校和成人高等学校编写的数学基础课教学用书.

国家教育部颁发的有关高职高专教育的文件强调,高等职业教育要以就业为导向,以培养技能型人才为目标;理论教学要以应用为目的,以"必需、够用为度".这些是安排高职教育和成人高等教育课程教学内容的指导原则.最新修订的《全国各类成人高等学校专升本招生高等数学复习考试大纲》(以下简称为《大纲》)是大专层次成人高等教育数学基础课教学的准绳,同时,《大纲》规定的教学内容与要求符合高职教育的实际需求,因此,以该《大纲》作为高职院校数学基础课的教学大纲的蓝本无疑是一种较好的选择.

基于上述思路,按照教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》及《大纲》的要求,本书的编写力求体现以下特点.

1. 精简理论,侧重应用,突出高职特色. 高等职业教育的一个重要特色在于其培养目标的技能(应用)性和培养途径的实践性.因此,其理论教学要"以应用为目的",以"必需、够用为度".按照这些原则,本书注意精简高等数学理论教学内容,许多定理、结论大都以"法则"、"公式"等形式出现,减少理论推导,侧重于"法则"和"公式"的应用,通过例题、练习题和《辅导》一书中的"同步训练"等多次训练,提高学生熟练运用"法则"、"公式"的能力,同时,注意联系工程技术和经济管理等方面的实际应用,以突出高职教育的特色.

2. 以人为本,夯实基础,注重学生实际. 本套教材注意紧扣《大纲》要求,同时,注重高职与成人高校学生的实际,以人为本,从学生的实际出发,加强高等数学基础知识和基本运算能力的培养.例题、练习题以基本训练题为主.通过增加"双基"的教学内容,加大"双基"训练的力度,以达到夯实基础的目的.考虑到这两类学生的实际需要,本书在书末的附录一中选编了一些初等数学常用公式与有关知识,还在《辅导》一书中提供本书的《习题选解》及《参考答案》,供读者查用.

3. 精练实用,适用面宽,便于读者自学. 本套教材根据《大纲》对"向量与空间解析几何"的最新要求,对这部分内容在保留《大纲》要求的情况下,将它作为"多元函数微积分"一章的准备知识,把导数和微分两个概念在同一节引入,使两者的计算融为一体,将不定积分与定积分的计算相互贯通.这些尝试力求使本书在内容的处理上更加精练、实用,减少教学时数,更适合高职教育和成人教育.因此,本套书既适合普通高职院校使用,也是各类成人高校较适用的教科书.同时,《辅导》一书的"例题析解"和"同步训练"两部分的题目,大部分选自近十多年来全国成人高考专升本招生考试高等数学(一)、(二)的试题,其题型较新颖,是成人高考专升本招生复习辅导很实用的教材.本书中除有各专业都必须掌握的高等数学(经济数学)的基本内容外,还根据《大纲》及实际需要,选入部分工程技术和经济管理等方面的数学基础知识和应用的内容(这些内容大都加"*"号),供不同专业选用.在编写过程中,我们还注意由浅入深、通俗易懂,许多概念、结论大多用直观解释,便于读者自学.

本书的课堂教学学时数分配表如下(供参考):

章次	内 容	公共必修学时数	各类专业需选学学时数	
			(一)类	(二)类
1	函数的极限与连续性	10—12		
2	导数与微分	10—12	1	
3	导数与微分的应用	8—10	2	2
4	积 分	14	2	2
5	多元函数微积分	8	10	
6	常微分方程		8	
7	无穷级数		8	
8	概率论初步			8
合 计		50—56	31	12

注:“各类专业需选学学时数”中的“(一)类”是指理工类专业(除生物、环境、地理及心理学等类专业外);“(二)类”是指经济管理类专业.

本书的第 1、4 章及附录由曾文斗编写,第 2、6 章由王子丁编写,第 3 章由林小龙编写,第 5 章由林伟洪编写,第 7 章由杨培娟编写,第 8 章由周雅丽编写.全书的内容由曾文斗统一策划、统稿和定稿.

本书的编写得到浙江科技学院成人教育学院及其隶属的福建泉州函授站和其它各函授站、华侨大学成人教育学院、黎明职业大学、泉州师范学院及其高职学院、泉州理工职业学院的领导和教师的大力支持,在此,谨表示衷心的感谢.

由于编者的水平限制,同时编写时间紧迫,缺点和错误在所难免,欢迎广大读者批评指正.

编 者

2007 年 3 月

目　录

第 1 章　函数的极限与连续性

极限与连续是高等数学中两个重要的基本概念，是学习后面章节的基础. 本章将在复习函数的有关概念的基础上，着重讨论极限的有关概念和运算，并在此基础上介绍函数连续性的概念与性质.

1.1　函　　数

函数的有关知识在中学数学中已作较详细的讨论，这里仅就其中的一部分进行简要的复习，并作必要的补充.

一、函数的概念

（一）函数的定义

定义 1.1　设某一变化过程有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集，如果对任一 $x \in D$，按照一定对应法则 f，都有唯一的 y 与它相对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y = f(x)$，其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

如果自变量 x 取某一数值 x_0 时，函数 y 有确定的值和它对应，就说函数在点 x_0 **有定义**. 使函数有定义的数集 D 称为函数的**定义域**，可记作 $D(f)$ 或 $D(y)$. 自变量取定义域内某一值时，因变量所对应的值叫做**函数值**，函数值的集合叫做函数的**值域**，它是由定义域和对应法则决定的. 因此，定义域和对应法则是决定函数的两个重要因素. 两个函数只有它们的定义域和对应法则都相同时，才认为是相同的.

例 1　求函数 $f(x) = \log_3 x^2$ 与 $g(x) = 2\log_3 x$ 的定义域，并说明他们是否表示同一个函数.

解　$f(x)$ 的定义域 $D(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$，

$g(x)$ 的定义域 $D(g) = (0,\ +\infty)$.

由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不相同，所以它们不是同一个函数.

（二）分段函数

表示函数的方法通常有公式法（解析法）、列表法和图像法三种. 用公式法表示函数时，一般用一个式子表示一个函数，但有时候需要用几个式子分段表示一个函数，即对自变量不同的取值范围，函数采用不同的表达式，这种函数就是**分段函数**. 下面举例说明.

例 2　作图并讨论绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x & (x \geqslant 0), \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

的定义域.

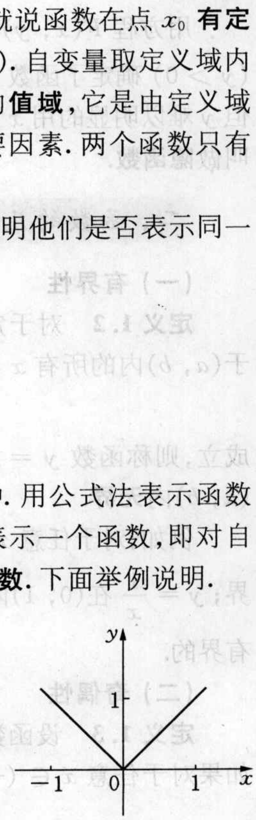


图 1-1

解　函数的图像如图 1-1 所示. 从图中可知，自变量 x 的取值范围为整个数轴 $\mathbf{R}$，即 $x \geqslant 0$ 与 $x < 0$ 的并集，因此，其定义域是

$D(y)=(-\infty, 0)\cup[0, +\infty)=(-\infty, +\infty)$.

从例 2 可知,**分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.**

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}1-x & (-2\leqslant x<0),\\ x^2-1 & (0\leqslant x<2),\end{cases}$

求:(1) $f(0)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)$;(2) $f(x)$的定义域;(3) 作 $f(x)$的图像;(4) $f(x+1)$.

解 (1) $f(0)=-1$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-1=\frac{5}{4}$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)=1-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$.

(2) $D(f)=[-2, 0)\cup[0, 2)=[-2, 2)$.

(3) 函数的图像如图 1-2 所示.

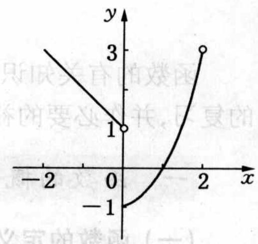


图 1-2

(4) $f(x+1)=\begin{cases}1-(x+1) & (-2\leqslant x+1<0),\\ (x+1)^2-1 & (0\leqslant x+1<2),\end{cases}$

$=\begin{cases}-x & (-3\leqslant x<-1),\\ x^2+2x & (-1\leqslant x<1).\end{cases}$

(三) 显函数与隐函数

我们学过的许多函数,例如 $y=\sqrt{2x+1}$, $y=x^2-1$ 等等,它们的因变量 y 都可以用自变量 x 的一个明显的表达式来表示,函数的这种表达形式称为**显函数**.

用方程 $F(x, y)=0$ 的形式也可以确定 y 与 x 的函数关系. 例如方程 $x^2+y^2=1$ $(y>0)$ 确定了函数 $y=\sqrt{1-x^2}$,方程 $\lg x+2^y-\sin xy=0$ 也确定了一个函数 $y=f(x)$,但 y 难以明显的用 x 的表达式表示出来. 这种由方程确定的、不能用 x 的表达式表示的函数叫做**隐函数**.

二、函数的几种特性

(一) 有界性

定义 1.2 对于定义在区间(a, b)内的函数 $y=f(x)$,如果存在一个正数 M,使得对于(a, b)内的所有 x 都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立,则称函数 $y=f(x)$ 在(a, b)内**有界**,如果这样的 M 不存在,则称 $y=f(x)$ 在(a, b)内**无界**.

例如,对于任意 $x\in(-\infty, +\infty)$ 都有 $|\sin x|\leqslant 1$,故 $y=\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内有界;$y=\frac{1}{x}$ 在$(0, 1)$内无界(这从本书第 11 页的图 1-8 可以看出),而 $y=\frac{1}{x}$ 在$(1, 2)$内是有界的.

(二) 奇偶性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 定义在以原点为中心的对称区间 $(-a, a)$ $(a>0)$ 内,如果对于任意 $x\in(-a, a)$ 都有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立,则称 $y=f(x)$ 在$(-a, a)$内是**奇函数**;如果对于任意 $x\in(-a, a)$, 都有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称 $y=f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内是**偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如，$f(x)=x^3\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是偶函数，这是因为 $f(-x)=(-x)^3\cdot\sin(-x)=-x^3(-\sin x)=x^3\sin x=f(x)$；又如，$\varphi(x)=2^x-2^{-x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是奇函数，因为 $\varphi(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-f(x)$，但 $\varphi(x)$ 在区间 $(-1, 2)$ 内既不是奇函数也不是偶函数，这是因为虽然有 $\varphi(-x)=-\varphi(x)$，但其定义区间 $(-1, 2)$ 不是关于原点的对称区间.

(三) 单调(增减)性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 定义在区间 (a, b) 内，如果对于 (a, b) 内的任意两点 $x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\ (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

成立，则称 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内是**单调增加(减少)**的. 如果可以将等号去掉，则称为**严格单调增加(减少)**，这时称 (a, b) 为**单调增加(减少)区间**.

例如，正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内是单调增加的(见本书第 7 页的表 1-2)，$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 是 $y=\tan x$ 的单调增加区间；指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调减少的(见本书第 6 页的表 1-2)，$(-\infty, +\infty)$ 是 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的单调减少区间.

(四) 周期性

定义 1.5 对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个常数 $T(T\neq 0)$，使得对于其定义域内的所有 x，都有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $y=f(x)$ 在其定义域内是**周期函数**，T 称为该函数的**周期**. 通常，把周期函数的最小正周期简称为(基本)周期.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，正切函数 $y=\tan x$ 和余切函数 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

三、反函数与基本初等函数

(一) 反函数

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域是 $\mathbf{R}$，如果对于任意一个 $y\in\mathbf{R}$，都有唯一的 $x\in D$，使得

$$f(x)=y$$

成立，这时 x 也是 y 的函数，称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，而称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

习惯上常用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此，经常把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$.

由定义 1.6 可知，反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是直接函数的值域，而反函数的值域是

直接函数的定义域.

如果将函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像画在同一个坐标平面上,可以知道,这两个图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 4 求下列函数的反函数,并写出反函数的定义域:

(1) $y=x^2+1\ (x<0)$; (2) $y=10^{x-1}$.

解 (1) 移项得 $x^2=y-1$,两边开平方,并考虑 $x<0$,得 $y=x^2+1\ (x<0)$ 的反函数是 $x=-\sqrt{y-1}$. 习惯上写成 $y=-\sqrt{x-1}\ (y<0)$,其定义域为 $D(y)=[1,+\infty)$.

(2) 等式两边取常用对数,得 $\lg y=(x-1)\lg 10$,所以 $x-1=\lg y$,即 $x=\lg y+1$,故 $y=10^{x-1}$ 的反函数为 $x=\lg y+1$,写成 $y=\lg x+1$,其定义域为 $D(y)=(0,+\infty)$.

(二) 反三角函数

由于三角函数是周期函数,对于其值域内的每个 y 值,都有无穷多个 x 值与它对应,因此,要建立它们的反函数——反三角函数,就必须限制在某一单调区间内,这个区间称为**主值区间**.

下面给出反三角函数的定义.

定义 1.7 正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数,称为**反正弦函数**. 记作 $y=\arcsin x$.

余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数,称为**反余弦函数**,记作 $y=\arccos x$.

正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数,称为**反正切函数**,记作 $y=\arctan x$.

余切函数 $y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 内的反函数,称为**反余切函数**,记作 $y=\operatorname{arccot} x$.

根据互为反函数的图像之间的对称关系,由四个三角函数的图像可得上述四个反三角函数的图像分别如图 1-3、图 1-4、图 1-5、图 1-6 所示.

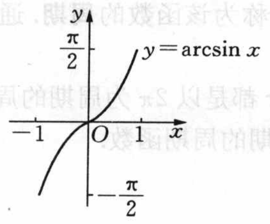


图 1-3

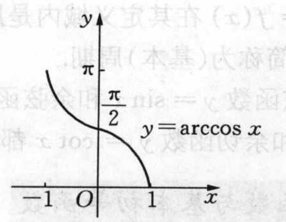


图 1-4

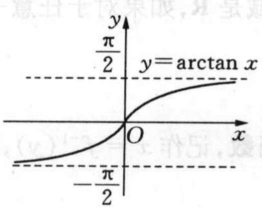


图 1-5

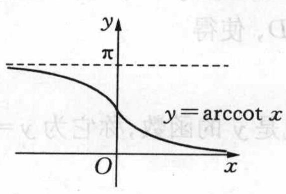


图 1-6

从上述图像可知,它们有以下性质:

表 1-1

	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\operatorname{arccot} x$
定义域	$x\in[-1, 1]$	$x\in[-1, 1]$	$x\in(-\infty, +\infty)$	$x\in(-\infty, +\infty)$
值域(主值区间)	$y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$y\in[0, \pi]$	$y\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$y\in(0, \pi)$
有界性	有界	有界	有界	有界
单调性	单调递增	单调递减	单调递增	单调递减
奇偶性	奇函数,有 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$	非奇非偶函数,有 $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$	奇函数,有 $\arctan(-x)=-\arctan x$	非奇非偶函数,有 $\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot} x$

例 5 求下列反三角函数的值:

(1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; (3) $\operatorname{arccot} 1$; (4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

解 (1) 因为 $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,且$\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

(2) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\pi}{6}$.

(3) $\operatorname{arccot} 1=\frac{\pi}{4}$.

(4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

例 6 设 $f(x)=3\arcsin\frac{x-1}{2}+\arctan(x+1)$,

求:(1) $f(0)$, $f(-1)$; (2) $f(x)$的定义域.

解 (1) $f(0)=3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arctan 1=3\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$.

$$f(-1)=3\arcsin(-1)+\arctan 0=3\left(-\frac{\pi}{2}\right)+0=-\frac{3\pi}{2}.$$

(2) 由$\begin{cases}-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 1,\\ -\infty<x+1<+\infty,\end{cases}$ 得$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 3,\\ -\infty<x<+\infty,\end{cases}$

故 $f(x)$的定义域是$[-1, 3]$.

(三) 基本初等函数

定义 1.8 下面六类函数统称为**基本初等函数**:

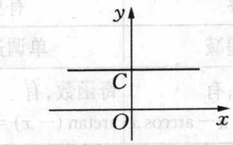
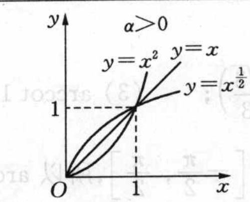
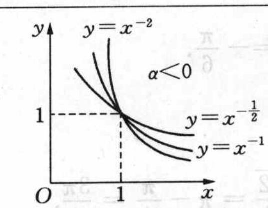
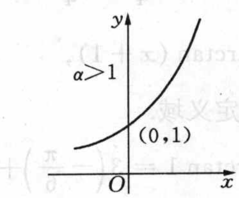
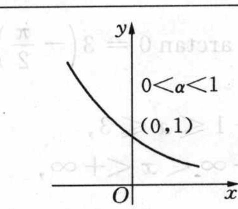
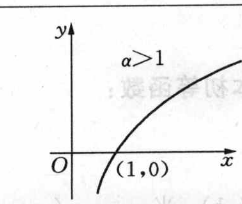
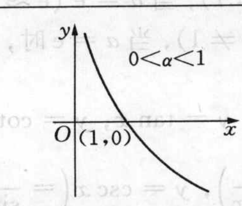
1. 常函数 $y=C$ (C是常数);
2. 幂函数 $y=x^{\alpha}$ ($\alpha\in\mathbf{R}$);
3. 指数函数 $y=a^{x}$ ($a>0$且$a\neq 1$),当 $a=\mathrm{e}$ ($\mathrm{e}\approx 2.718\cdots$) 时,$y=\mathrm{e}^{x}$;
4. 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$且$a\neq 1$),当 $a=\mathrm{e}$时,$y=\log_{\mathrm{e}} x$ 简记作 $y=\ln x$,称为**自然对数函数**;
5. 三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$,

$$y=\sec x\left(=\frac{1}{\cos x}\right),\ y=\csc x\left(=\frac{1}{\sin x}\right);$$

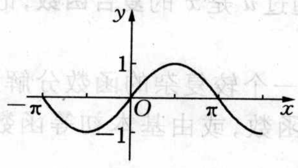
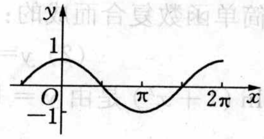
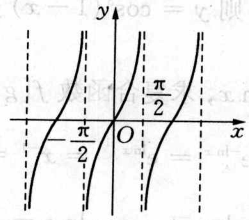
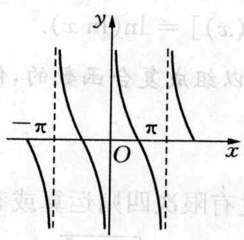
6. 反三角函数 $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \operatorname{arccot} x$.

前面五类函数，在中学数学中已作较详细的讨论，这里仅就它们的图像和性质列表作简要复习(见表 1-2).

表 1-2

名称	解析式	图　形	简单性质
常函数	$y = C$		垂直于 y 轴的直线
幂函数	$y = x^{\alpha}$　$(\alpha \in \mathbf{R})$		过(1, 1)点，单调增加函数
			过(1, 1)点，单调减少函数，以 x 轴、y 轴为渐近线
指数函数	$y = a^{x}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$		$-\infty < x < +\infty$，$0 < a^{x} < +\infty$，过(0, 1)点，单调增加函数.
			$-\infty < x < +\infty$，$0 < a^{x} < +\infty$，过(0, 1)点，单调减少函数.
对数函数	$y = \log_{a} x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$		$0 < x < +\infty$，过(1, 0)点，单调增加函数.
			$0 < x < +\infty$，过(1, 0)点，单调减少函数.

续 表

名称	解析式	图形	简单性质
三角函数	$y = \sin x$		$-\infty < x < +\infty$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, 奇函数, 有 $\sin(-x) = -\sin x$, 以 2π 为周期.
	$y = \cos x$		$-\infty < x < +\infty$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, 偶函数, 有 $\cos(-x) = -\cos x$, 以 2π 为周期.
	$y = \tan x$		$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ (k 为整数), $-\infty < \tan x < +\infty$, 奇函数, 有 $\tan(-x) = -\tan x$, 以 π 为周期.
	$y = \cot x$		$x \neq k\pi$ (k 为整数), $-\infty < \cot x < +\infty$, 奇函数, 有 $\cot(-x) = -\cot x$, 以 π 为周期.

四、复合函数与初等函数

(一) 复合函数

在工程技术和经济活动中，有些函数关系比较复杂. 例如自由落体运动的动能 E 是速度 v 的函数，即

$$E = \frac{1}{2}mv^2,$$

而速度 v 又是时间 t 的函数

$$v = gt,$$

因此，如果讨论动能 E 与时间 t 的关系，需要把 $v = gt$ 代入 $E = \frac{1}{2}mv^2$，这样就得到了由这两个函数复合而成的复合函数

$$E = \frac{1}{2}mg^2t^2.$$

再如，产品的利润 L 是产量 q 的函数：$L = L(q)$，而产量 q 又是价格 p 的函数：$q = q(p)$，因而利润 L 与价格 p 的关系又构成了复合函数 $L = L[q(p)]$.

一般地,有如下定义.

定义 1.9 如果 y 是 u 的函数:$y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数:$u=\varphi(x)$,且与 x 对应的 u 的值能使 y 有定义,则称 y 通过 u 是 x 的**复合函数**,记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中,u 称为**中间变量**.

利用复合函数的概念,可以将一个较复杂的函数分解成若干个简单函数,分解得到的简单函数一般都是基本初等函数,或由基本初等函数经过有限次四则运算而成的函数.

例 7 指出下列函数是由哪几个简单函数复合而成的:

(1) $y=\ln(1+x^2)$; (2) $y=\cos^3(1-x)$.

解 (1) 设 $u=1+x^2$,则 $y=\ln(1+x^2)$ 是由 $y=\ln u$ 和 $u=1+x^2$ 两个简单函数复合而成的.

(2) 设 $V=1-x$ 及 $u=\cos V$,则 $y=\cos^3(1-x)$ 是由 $y=u^3$、$u=\cos V$、$V=1-x$ 三个简单函数复合而成的.

例 8 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$,$g(x)=\ln x$,求复合函数 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$,$g[g(x)]$.

解
$$f[g(x)]=\mathrm{e}^{-\ln x}=\mathrm{e}^{\ln x^{-1}}=x^{-1}=\frac{1}{x},$$
$$g[f(x)]=\ln\mathrm{e}^{-x}=-x\ln\mathrm{e}=-x,$$
$$g[g(x)]=\ln(\ln x).$$

注意 并不是任意几个函数都可以组成复合函数的,例如,由 $y=\ln u$ 和 $u=-x^2$ 就不能复合成复合函数.

(二) 初等函数

定义 1.10 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所得到的、并能用一个式子表示的函数叫做**初等函数**,例如,$y=\sqrt{1-x^2}$,$y=\ln(1+x^2)$ 等等都是初等函数,而 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 及 $\varphi(x)=\begin{cases}1-x & (-1\leqslant x<1),\\ x^2-2 & (1\leqslant x<2)\end{cases}$ 就不是初等函数.

练习 1-1

1. 下列各题中的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否表示同一个函数?为什么?

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$,$g(x)=x+2$; (2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$,$g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$;

(3) $f(x)=3\lg x$,$g(x)=\lg x^3$; (4) $f(x)=(\sqrt{x})^2$,$g(x)=\sqrt{x^2}$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{5}{x^2+1}$; (2) $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{x^2-1}$;

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+\lg(x+1)$; (4) $y=\lg(\ln x+1)$.

3. 求下列分段函数的定义域: