

DIALOGUE

对话 考研名师 解读 大学数学

微积分过关与提高

适合经管类学生使用

编著 黄先开 曹显兵

最新版
与教材
配合使用



原子能出版社

大学数学学习与考研备考

013/462

:2

2008

文都教育

DIALOGUE

对话

考研名师

解读

大学数学

微积分过关与提高

适合经管类学生使用

编著 **黄先开 曹显兵**

编委会成员：黄先开 曹显兵
翁莉娟 周艳杰



原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分过关与提高/黄先开,曹显兵编著.

北京:原子能出版社,2007.8

(对话考研名师·解读大学数学)

ISBN 978-7-5022-3993-0

I. 微… II. ①黄…②曹… III. 微积分—高等学校—教学参考资料 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 132023 号

微积分过关与提高

出版发行	原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100037)
责任编辑	张关铭
特约编辑	师 潭
封面设计	刘志彦
印 刷	北京长阳汇文印刷厂
经 销	全国新华书店
开 本	850×1168 毫米 1/32
印 张	12.375
版 次	2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5022-3993-0
定 价	19.00 元

版权所有 侵权必究

网址:<http://www.aep.com.cn>

前言



《微积分》是高等学校经济学、管理学各专业的一门主要基础理论课程,不仅是各高等学校本科生培养阶段的核心必修课程,而且是硕士研究生、MBA 等入学考试的主考课程之一,微积分所研究的理论和处理问题的思想、方法被广泛应用到自然科学和社会科学的各个领域,因此学好这门课程是十分重要的。

本书是在多年教学实践的基础上,为正在学习和复习微积分的读者编写的。在学习这门基础课时,不少同学存在的一个共同问题是:定义、定理似乎都能看懂,也能熟记一些公式和结论,但是,真正解题时会有困惑、疑虑之感,遇到灵活性较大、综合性较强的题,更是感到无从下手。究其原因,主要是同学们在运用教材知识,综合分析和解决问题的能力方面没有得到足够的训练和培养。编写本书的目的,是帮助同学们加深对微积分中基本概念的理解,引导同学们掌握微积分的解题方法和技巧,启发、培养学习微积分的兴趣。

本书根据现行的通用教学大纲和《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》进行编写,采用独特新颖的体例和版式设计,对这门课程中所有可能的题型进行了系统的分析归类,精心选编和解析了大量的经典例题,并最新设计了许多新颖的综合例题,希望以此启发读者的解题思路并融会贯通所学的知识。配合大学课程考试和硕士研究生入学考试的需要进行编写是本书最突出的特色。

本书的编写体系和特点如下:

1. 学习要求:微积分教学目标与考研大纲考试要求的有机结合

以几所高校教材为蓝本,同时严格遵循《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求编写,考研大纲与微积分教学目标有机结合。

2. 知识点结构图——内容概述

将各章的知识点用图表的形式表现出来,使学生站在更高的层次把握内容,并较为翔实的归纳出各部分知识。内容提要简述学习过程中所要求掌握的基本概念、性质和定理,对于若干重要的核心内容进行剖析,使读者具备扎实的基础知识。

3. 难点、疑点解析及重要公式与结论

针对每一章的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释,并归纳总结本章的重要公式与结论,特别对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳,从而帮助读者站在一个更高的层次上去认识问题、分析问题和解决问题,达到认识和理解的新境界,而这些要求对于期望在课程结业考试和硕士研究生入学数学考试中取得优秀成绩的读者来讲,是一项重要的基本功。

4. 典型例题:基础过关题—历年真题精选精解—拓展提高题

例题编排由浅入深,按照“基础过关题—考研历年真题精选—拓展提高题”的顺序安排典型例题,使读者在复习的过程中有参照、有对比,通过精读典型例题达到信心百倍。借助众多经典例题的解析和评注,使读者更好地把握典型问题的分析处理方法和可能的各种延伸,从而达到举一反三、触类旁通的功效。

5. 精选习题——精选习题答案

对于掌握一门数学课程内容并通过相关考试来说,做一定数量的习题是必不可少的。本书编写的习题紧扣大学课程及硕士研究生入学考试大纲要求,习题具有一定的层次,使读者在自我检测中达到知识、方法、技巧的升华。

本书可作为微积分教学同步指导书,供大一、大二的在校学生使用;也可供参加硕士研究生入学考试的考生从开始阶段打基础到冲刺阶段全面提高的全程辅导使用。本书也可作为教师教学参考用书。

在成书过程中,编者参考了众多著作和教材、教学参考资料,在此谨向有关作者表示衷心感谢!由于编者水平有限,错误和不妥之处敬请同行与读者赐教指正。

6. 特别提示

建议刚开始学习本门课程的同学主要阅读每章的“内容概述”及“基础过关题”部分,其他内容可至拥有相关知识后再读。

编者

目 录

第一章 函数、极限与连续	1
知识点结构图	1
学习要求	2
1.1 内容概述	2
1.2 难点、疑点解析及重要公式与结论	22
1.3 典型例题	24
基础过关题	24
题型 I 函数的概念	24
题型 II 函数、反函数及其性质	28
题型 III 求函数极限	31
题型 IV 求“ 1^∞ 、 0^0 、 ∞^0 ”型的极限	36
题型 V 求数列极限	37
题型 VI 已知极限,求待定参数、函数、函数值	42
题型 VII 无穷小比较	44
题型 VIII 判断函数的连续性与间断点的类型	45
历年真题精选精解	49
拓展提高题	63
精选习题一	83
精选习题一答案	85
第二章 导数与微分	87
知识点结构图	87
学习要求	87

2.1	内容概述	88
2.2	难点、疑点解析及重要公式与结论	99
2.3	典型例题	100
	基础过关题	100
	题型 I 利用导数定义解题	100
	题型 II 导数在几何上的应用	106
	题型 III 导数在经济中的应用	109
	题型 IV 利用导数公式与运算法则求导	110
	题型 V 可导、连续与极限的关系	118
	历年真题精选精解	120
	拓展提高题	130
	精选习题二	138
	精选习题二答案	141
第三章 微分中值定理与导数的应用		142
	知识点结构图	142
	学习要求	142
3.1	内容概述	143
3.2	典型例题	148
	基础过关题	148
	题型 I 验证微分中值定理	148
	题型 II 利用中值定理证明函数等式	150
	题型 III 利用中值定理证明函数不等式	151
	题型 IV 利用中值定理讨论方程的根	153
	题型 V 利用洛必达法则求极限	154
	题型 VI 利用泰勒公式求极限	156
	题型 VII 利用导数确定单调区间与极值	156
	题型 VIII 求函数曲线的凹凸区间与拐点	161
	题型 IX 求函数曲线的渐近线	164
	题型 X 函数图形的描绘	165

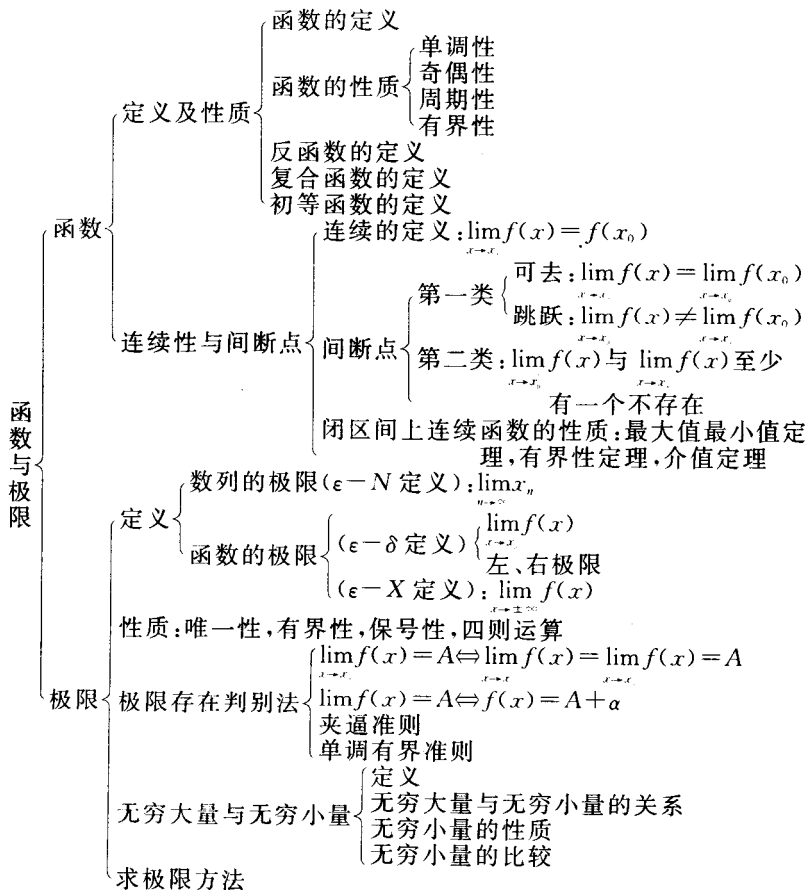
题型 XI 确定函数方程的根	168
题型 XII 利用单调性证明函数不等式	169
历年真题精选精解	171
拓展提高题	180
精选习题三	184
精选习题三答案	187
第四章 一元函数积分学	189
知识点结构图	189
学习要求	190
4.1 内容概述	190
4.2 难点、疑点解析及重要公式与结论	196
4.3 典型例题	197
基础过关题	197
题型 I 不定积分的概念和性质	197
题型 II 各类被积函数不定积分的计算	200
题型 III 求分段函数的原函数	208
题型 IV 各类被积函数定积分的计算	209
题型 V 有关变限积分的问题	215
题型 VI 广义积分的计算	216
题型 VII 定积分等式的证明	217
题型 VIII 定积分不等式的证明	218
题型 IX 一元函数积分学的应用	220
历年真题精选精解	222
拓展提高题	231
精选习题四	239
精选习题四答案	246
第五章 微分方程与差分方程	251
知识点结构图	251

学习要求	251
5.1 内容概述	252
5.2 典型例题	257
基础过关题	257
题型 I 一阶线性微分方程	257
题型 II 二阶线性微分方程	261
题型 III 微分方程的简单应用	264
题型 IV 差分方程	266
历年真题精选精解	267
拓展提高题	275
精选习题五	278
精选习题五答案	281
第六章 多元函数微积分学	283
知识点结构图	283
学习要求	283
6.1 内容概述	284
6.2 难点、疑点解析及重要公式与结论	287
6.3 典型例题	291
基础过关题	291
题型 I 基本概念题	291
题型 II 求多元函数的偏导数和全微分	294
题型 III 变量替换下表达式的变形	299
题型 IV 反问题	300
题型 V 多元函数的极值与最值	301
题型 VI 积分次序与坐标系的选择	303
题型 VII 交换积分次序	306
题型 VIII 对称区域上的积分	307
题型 IX 分段函数的积分	309

题型 X 涉及二重积分(或累次积分)	
的证明题	312
历年真题精选精解	314
拓展提高题	330
精选习题六	336
精选习题六答案	339
第七章 无穷级数	341
知识点结构图	341
学习要求	341
7.1 内容概述	342
7.2 典型例题	349
基础过关题	349
题型 I 判定正项级数的敛散性	349
题型 II 判定交错级数的敛散性	352
题型 III 求幂级数的收敛半径、	
收敛区间和收敛域	355
题型 IV 求幂级数的和函数	358
题型 V 求数项级数的和	360
题型 VI 求函数的幂级数展开式	361
历年真题精选精解	363
拓展提高题	374
精选习题七	375
精选习题七答案	378

第一章 函数、极限与连续

【知识点结构图】



【学习要求】

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法.了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

1.1 内容概述

一、集合

集合是指具有某种特定性质的事物的全体,常用大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 表示. 组成这个集合的事物称为该集合的元素,一般用小写英文字母 $a, b, c, \dots$ 表示.

若 a 是集合 A 中的元素,则记作 $a \in A$; 若 a 不是 A 中的元素,则记作 $a \notin A$ (或 $a \bar{\in} A$).

不含任何元素的集合称为空集,常记作 Φ .

1. 集合的表示法

(1) 列举法: 按任意顺序列举出集合的所有元素,并用花括号括

起来的方法称为列举法. 一般适用于有限个元素组成的集合, 如 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

(2) 描述法: 若 A 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合, 记作

$$A = \{x \mid x \text{ 所具有的特征}\},$$

则 A 是由描述法表示的集合. 如 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x, y \in R\}$ 表示 xOy 平面上以原点 O 为圆心, 半径为 1 的圆周上点的全体组成的集合; $B = \{x \mid x \in R, x^2 = -2\}$ 表示空集.

2. 常用数集

全体自然数的集合记作 N . 全体整数的集合记作 Z . 全体有理数的集合记作 Q . 全体实数的集合记作 R .

3. 集合的关系及运算

(1) 子集: 设 A 与 B 是两个集合. 若 $x \in A$, 必有 $x \in B$, 那么称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 也称集合 B 包含集合 A , 或集合 A 包含于集合 B . 图 1-1 (称为文氏图) 表示集合 A 是 B 的子集.

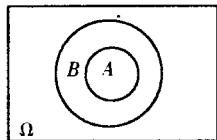


图 1-1

(2) 相等: 若 $A \subset B$ 且 $B \supset A$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

(3) 并(或和): 由 A, B 中所有元素构成的集合称为 A 与 B 的并(或和), 记作 $A \cup B$.

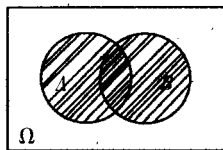


图 1-2

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

图 1-2 表示了 A 与 B 的并(阴影部分).

类似有: n 个集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的并 $\bigcup_{i=1}^n A_i$, 可列个集合 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的并 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

(4) 交(或积): 由 A, B 的共同元素构成的集合称为 A 与 B 的交(或积), 记作 $A \cap B$ (或 AB).

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

图 1-3 表示了 A 与 B 的交(阴影部分).

类似有: n 个集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的交 $\bigcap_{i=1}^n A_i$,

可列个集合 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的交 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

(5) 差: 由属于 A 而不属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的差, 记作 $A - B$ (或 A/B).

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

图 1-4 表示了 A 与 B 的差(阴影部分).

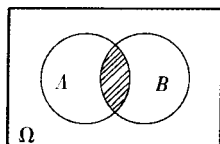


图 1-3

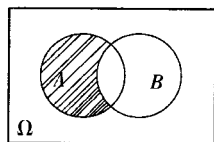


图 1-4

4. 集合的运算性质

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A,$

$$AB = BA.$$

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C,$

$$(AB)C = A(BC) = ABC.$$

(3) 分配律 $A(B \cup C) = AB \cup AC,$

$$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C),$$

$$A(B - C) = AB - AC, \quad A\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \bigcap_{i=1}^n AA_i.$$

(4) 对偶律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B},$
 $\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}. \quad (i \geq 1)$

(5) 吸收律 $A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A.$

(6) 双重否定律 $\overline{\overline{A}} = A.$

(7) 排中律 $A \cup \overline{A} = \Omega, \quad A \overline{A} = \Phi.$

(8) 差积转换律 $A - B = A \overline{B}.$

5. 绝对值

设 x 是一个实数, 则 x 的绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

(1) $|x|$ 在几何中表示数轴上的点 x 到原点 O 的距离.

(2) $|x - y|$ 表示点 x 与点 y 之间的距离.

(3) 绝对值的基本性质: 设 x, y 为任意实数, 则

$$\begin{aligned} |x| &\geq 0, & |x| &= \sqrt{x^2}, \\ |-x| &= |x|, & -|x| &\leq x \leq |x|, \\ |x+y| &\leq |x| + |y|, & |x-y| &\geq |x| - |y|, \\ |xy| &= |x| \cdot |y|, & \left| \frac{x}{y} \right| &= \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0). \end{aligned}$$

6. 区间

设 a 和 b 都是实数且 $a < b$.

(1) 满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的集合, 称为以 a, b 为端点的开区间, 记为 (a, b) , 即 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$.

(2) 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数 x 的集合, 称为以 a, b 为端点的闭区间, 记为 $[a, b]$, 即 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$.

(3) 满足不等式 $a \leq x < b$ (或 $a < x \leq b$) 的所有实数 x 的集合, 称为以 a, b 为端点的半开区间, 记为 $[a, b)$ (或 $(a, b]$), 即

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

以上数集为有限区间.

(4) 无限区间:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}, \quad [a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\};$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}, \quad (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}.$$

7. 邻域

设 x_0 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 则数集 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域, 点 x_0 是邻域的中心, δ 称为邻域的半径. 数集 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 称为点 x_0 的去心 δ 邻域.

二、函数

1. 常量与变量

在某一过程中, 数值始终保持不变的量称为常量, 可以取不同数值的量称为变量.

2. 函数的概念及表示法

设 x 和 y 是两个变量 (均在实数集 $\mathbf{R}$ 内取值), D 是一个给定的非

空数集,如果对于每个数 $x \in D$,按照一定的法则,变量 y 有唯一确定的数值和它对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记作 $y = f(x)$,其中 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量.

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域.表示法有:公式法、表格法、图形法等.

要注意函数定义中的两个要素:

(1) 定义域 D :它表示 x 的取值范围.

(2) 对应法则 f :它表示给定 x 值,求 y 值的方法.

因此:① 对于两个给定的函数,当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时,才能说它们是相同的函数,否则它们就是不同的函数.

② 求函数 f 的定义域,就是求使 y 的取值和运算有意义的自变量 x 的取值范围.

【例 1.1】 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

$$(1) f(x) = \lg x^2, \quad g(x) = 2\lg x.$$

$$(2) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, \quad g(x) = x \sqrt[3]{x-1}.$$

【详解】 (1) 不相同.因为两个函数的定义域不同, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

(2) 相同.因为两个函数的定义域相同,都为全体实数,而且对应法则相同.

【例 1.2】 已知 $f(x) = \sin x, f[\varphi(x)] = 1 - x^2$,且 $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi(x) \leq \frac{\pi}{2}$,试求函数 $\varphi(x)$ 的定义域.

【详解】 由于 $1 - x^2 = f[\varphi(x)] = \sin \varphi(x)$,

$$\text{且} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi(x) \leq \frac{\pi}{2},$$

故

$$\varphi(x) = \arcsin(1 - x^2).$$

于是 $-1 \leq 1 - x^2 \leq 1$,即 $0 \leq x^2 \leq 2$.

所以函数 $\varphi(x)$ 的定义域为: $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

注:当函数 $y = f(x)$ 给出时,事先要给出其定义域,若函数是由