



2009 知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

数学三

10年真题点评

文登培训学校策划

陈文灯 / 主 编

陈启浩 / 副主编

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



2009 知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

数学三

10年真题点评

陈文灯 / 主 编

陈启浩 / 副主编

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

数学10年真题点评. 3 / 陈文灯主编. —2版. —北京:
北京理工大学出版社, 2008.3(2008.4重印)
(知识树考研)
ISBN 978-7-5640-0713-3

I. 数... II. 陈... III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第024488号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街5号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京国马印刷厂

开 本 / 787毫米×1092毫米 1/16

印 张 / 12.5

字 数 / 290千字

版 次 / 2008年3月第2版 2008年4月第8次印刷

定 价 / 19.80元

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前 言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届,积累了近百份数学试卷,这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶,也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题,除其内容外,还包含诸多有价值的信息,例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性。为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法,我们将1998年~2008年全国硕士研究生入学统一考试数学试题作了精心的解析,编写成《考研数学·10年真题点评》系列丛书,奉献给广大考研朋友,书中对每道真题通过“分析”、“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明语言给出解题思路;在“详解”中用简捷、新颖方法给出详细解答;在“评注”中强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧。

我们希望读者在使用本书时,不要轻易地翻阅真题的解答,只有当百思不得其解时才查阅解答;而且每做完一道真题,应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注,进行比对和总结。如果能如此下功夫做完最近十年的数学考研真题,读完全书,我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上,在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃,而且在解题能力和应考水平上也将有一个较大幅度的提高,从而更加从容地面对研究生入学考试。

这套系列丛书自去年问世以来,深得广大考研学子的喜爱。今年在此基础上,作了认真的修订,增加了新的内容(如写了附录),使得它更适合广大考研朋友复习时使用。

由于成书时间仓促,书中疏漏之处在所难免,恳请广大读者和同仁指正。

编 者

2008年1月

目 录

近 10 年真题集

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	1
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	4
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	7
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	10
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	14
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	17
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	20
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	23
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	26
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	29

近 10 年真题分析、详解及评注

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	32
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	48
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	61
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	76
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	90
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	102
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	114
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	126
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	139
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	151
附录 研究生入学考试中常见三个问题解析	162
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	178
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题分析、详解及评注	181

2007 年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln(1 + \sqrt{x})$.

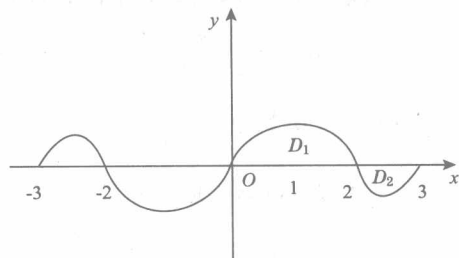
(C) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$. (D) $1 - \cos \sqrt{x}$. 【 】

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,下列命题错误的是

(A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$. (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$.

(C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在. (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在. 【 】

(3) 如图,连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周,设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$,则下列结论正确的是



(A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$.

(B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$.

(D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$. 【 】

(4) 设函数 $f(x, y)$ 连续,则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于

(A) $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$. (B) $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dy$.

(C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$. (D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$. 【 】

(5) 设某商品的需求函数为 $Q = 160 - 2P$,其中 Q, P 分别表示需求量和价格,如果该商品需求弹性的绝对值等于 1,则商品的价格是

(A) 10. (B) 20. (C) 30. (D) 40. 【 】

(6) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的渐近线的条数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. 【 】



(7) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

- (A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$. (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$.
 (C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$. (D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$. 【 】

(8) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B

- (A) 合同, 且相似. (B) 合同, 但不相似.
 (C) 不合同, 但相似. (D) 既不合同, 也不相似. 【 】

(9) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p (0 < p < 1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

- (A) $3p(1-p)^2$. (B) $6p(1-p)^2$.
 (C) $3p^2(1-p)^2$. (D) $6p^2(1-p)^2$. 【 】

(10) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x), f_Y(y)$ 分别表示 X, Y 的概率密度, 则在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为

- (A) $f_X(x)$. (B) $f_Y(y)$.
 (C) $f_X(x)f_Y(y)$. (D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$. 【 】

二、填空题: (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y|_{x=1} = 1$ 的特解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(15) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(16) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题 (本题共 8 小题, 满分 86 分, 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y \ln y - x + y = 0$ 确定, 试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近的凹凸性.

(18) (本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2 \end{cases}$$



计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$.

(19)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导且存在相等的最大值, 又 $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$. 证明:

(I) 存在 $\eta \in (a, b)$, 使得 $f(\eta) = g(\eta)$;

(II) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(20)(本题满分 10 分)

将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B .

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(I) 求 $P\{X > 2Y\}$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(24)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中参数 $\theta (0 < \theta < 1)$ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, \bar{X} 是样本均值.

(I) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(II) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由.

2006 年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题

一、填空题:1-6 小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中横线上.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导,且 $f'(x) = e^{f(x)}$, $f(2) = 1$, 则 $f'''(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设函数 $f(u)$ 可微,且 $f'(0) = \frac{1}{2}$, 则 $z = f(4x^2 - y^2)$ 在点 $(1, 2)$ 处的全微分 $dz|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, E 为二阶单位矩阵,矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布, 则 $P\{\max\{X, Y\} \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ($-\infty < x < +\infty$), X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 X 的简单随机样本,其样本方差为 S^2 , 则 $E(S^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题:7-14 小题,每小题 4 分,共 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x > 0$, 则

(A) $0 < dy < \Delta y$.

(B) $0 < \Delta y < dy$.

(C) $\Delta y < dy < 0$.

(D) $dy < \Delta y < 0$.

【 】

(8) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$, 则

(A) $f(0) = 0$ 且 $f'_-(0)$ 存在.

(B) $f(0) = 1$ 且 $f'_-(0)$ 存在.

(C) $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0)$ 存在.

(D) $f(0) = 1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.

【 】

(9) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛.

【 】

(10) 设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x), y_2(x)$, C 为任意常数, 则该方程的通解是

(A) $C[y_1(x) - y_2(x)]$. (B) $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$.

(C) $C[y_1(x) + y_2(x)]$. (D) $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$.

【 】

(11) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$, 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件

$\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

- (A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.
 (B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
 (C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.
 (D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. 【 】

(12) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是

- (A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.
 (B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.
 (C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.
 (D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关. 【 】

(13) 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得

$$C, \text{ 记 } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

- (A) $C = P^{-1}AP$. (B) $C = PAP^{-1}$.
 (C) $C = P^TAP$. (D) $C = PAP^T$. 【 】

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, 随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且

$$P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\},$$

则必有

- (A) $\sigma_1 < \sigma_2$. (B) $\sigma_1 > \sigma_2$.
 (C) $\mu_1 < \mu_2$. (D) $\mu_1 > \mu_2$. 【 】

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 7 分)

$$\text{设 } f(x, y) = \frac{y}{1+xy} - \frac{1-y\sin \frac{\pi x}{y}}{\arctan x}, x > 0, y > 0, \text{ 求}$$

(I) $g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$;

(II) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

(16) (本题满分 7 分)

$$\text{计算二重积分 } \iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由直线 } y = x, y = 1, x = 0 \text{ 所围成的平面区域.}$$

(17) (本题满分 10 分)

证明: 当 $0 < a < b < \pi$ 时, $b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a$.

(18) (本题满分 8 分)

在 xOy 坐标平面上, 连续曲线 L 过点 $M(1, 0)$, 其上任意点 $P(x, y)$ ($x \neq 0$) 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$).

(I) 求 L 的方程;

(II) 当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时, 确定 a 的值.

5

(19)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $s(x)$.

(20)(本题满分 13 分)

设 4 维向量组 $\alpha_1 = (1+a, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2+a, 2, 2)^T, \alpha_3 = (3, 3, 3+a, 3)^T, \alpha_4 = (4, 4, 4, 4+a)^T$, 问 a 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

(21)(本题满分 13 分)

设三阶实对称阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$;

(III) 求 A 及 $(A - \frac{3}{2}E)^6$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 13 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

令 $Y = X^2, F(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数. 求:

(I) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(II) $\text{Cov}(X, Y)$;

(III) $F(-\frac{1}{2}, 4)$.

(23)(本题满分 13 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1, \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

其中 θ 是未知参数 ($0 < \theta < 1$), X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于 1 的个数, 求:

(1) θ 的矩估计;

(2) θ 的最大似然估计.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2+1} =$ _____.

(2) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 2$ 的特解为 _____.

(3) 设二元函数 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$, 则 $dz|_{(1,0)} =$ _____.

(4) 设行向量组 $(2, 1, 1, 1), (2, 1, a, a), (3, 2, 1, a), (4, 3, 2, 1)$ 线性相关, 且 $a \neq 1$, 则 $a =$ _____.

(5) 从数 $1, 2, 3, 4$ 中任取一个数, 记为 X , 再从 $1, \dots, X$ 中任取一个数, 记为 Y , 则 $P\{Y=2\} =$ _____.

(6) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

	X \ Y	0	1
0		0.4	a
1		b	0.1

若随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的圆括号内.)

(7) 当 a 取下列哪个值时, 函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$ 恰有两个不同的零点.

- (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8. 【 】

(8) 设 $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, $I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma$, $I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则

- (A) $I_3 > I_2 > I_1$. (B) $I_1 > I_2 > I_3$.
(C) $I_2 > I_1 > I_3$. (D) $I_3 > I_1 > I_2$. 【 】

(9) 设 $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则下列结论正确的是

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛. 【 】

(10) 设 $f(x) = x \sin x + \cos x$, 下列命题中正确的是

- (A) $f(0)$ 是极大值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极小值. (B) $f(0)$ 是极小值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极大值.



(C) $f(0)$ 是极大值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极大值. (D) $f(0)$ 是极小值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极小值. 【 】

(11) 以下四个命题中, 正确的是

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界. 【 】

(12) 设矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $A^* = A^T$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, A^T 为 A 的转置矩阵. 若 a_{11} , a_{12} , a_{13} 为三个相等的正数, 则 a_{11} 为

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (B) 3. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\sqrt{3}$. 【 】

(13) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1 = 0$.

(B) $\lambda_2 = 0$.

(C) $\lambda_1 \neq 0$.

(D) $\lambda_2 \neq 0$. 【 】

(14) 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ 均未知. 现从中随机抽取 16 个零件, 测得样本均值 $\bar{x} = 20(\text{cm})$, 样本标准差 $s = 1(\text{cm})$, 则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是

(A) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(16)\right)$. (B) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(16)\right)$.

(C) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$. (D) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(15)\right)$. 【 】

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right)$.

(16) (本题满分 8 分)

设 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 且 $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) + yf\left(\frac{x}{y}\right)$, 求 $x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(17) (本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

(18 分) (本题满分 9 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - 1 \right) x^{2n}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x)$.

(19) (本题满分 8 分)

设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的导数连续, 且 $f(0) = 0, f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$. 证明: 对任何 $a \in [0, 1]$, 有

$$\int_0^a g(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx \geq f(a) g(1).$$

(20) (本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

$$(i) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

和

$$(ii) \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

同解,求 a, b, c 的值.

(21)(本题满分 13 分)

设 $D = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$ 为正定矩阵,其中 A, B 分别为 m 阶、 n 阶对称矩阵, C 为 $m \times n$ 矩阵.

(I) 计算 $P^T D P$, 其中 $P = \begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{bmatrix}$;

(II) 利用(I)的结果判断矩阵 $B - C^T A^{-1} C$ 是否为正定矩阵,并证明你的结论.

(22)(本题满分 13 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求:(I) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(II) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$;

(III) $P\left\{Y \leq \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{1}{2}\right\}$.

(23)(本题满分 13 分)

设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本,其样本均值为 \bar{X} . 记 $Y_i = X_i - \bar{X}, i = 1, 2, \dots, n$.

(I) 求 Y_i 的方差 $D(Y_i), i = 1, 2, \dots, n$;

(II) 求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\text{Cov}(Y_1, Y_n)$;

(III) 若 $c(Y_1 + Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量,求常数 c .

2004 年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 函数 $f(u, v)$ 由关系式 $f[xg(y), y] = x + g(y)$ 确定, 其中函数 $g(y)$ 可微, 且 $g(y) \neq 0$, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$ 则 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{D(X)}\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 则 $E \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

- (A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$ 【 】

(8) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则

- (A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.
 (B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.
 (C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.
 (D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关. 【 】

(9) 设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则

- (A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
 (B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
 (C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
 (D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, 0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 【 】

(10) 设有以下命题:

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$ 收敛.

③ 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

④ 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛.

则以上命题中正确的是

(A) ①② (B) ②③ (C) ③④ (D) ①④

【 】

(11) 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$, 则下列结论中错误的是

(A) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) > f(a)$.

(B) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) > f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f'(x_0) = 0$.

(D) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) = 0$.

【 】

(12) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则必有

(A) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = a$. (B) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = -a$.

(C) 当 $|A| \neq 0$ 时, $|B| = 0$. (D) 当 $|A| = 0$ 时, $|B| = 0$.

【 】

(13) 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* \neq O$, 若 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的互不相等的解, 则对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系

(A) 不存在. (B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量. (D) 含有三个线性无关的解向量.

【 】

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 对给定的 $\alpha \in (0, 1)$, 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$, 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$.

【 】

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$.

(16) (本题满分 8 分)

求 $\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) d\sigma$,

其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 所围成的平面区域(如右图).

(17) (本题满分 8 分)

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且满足

