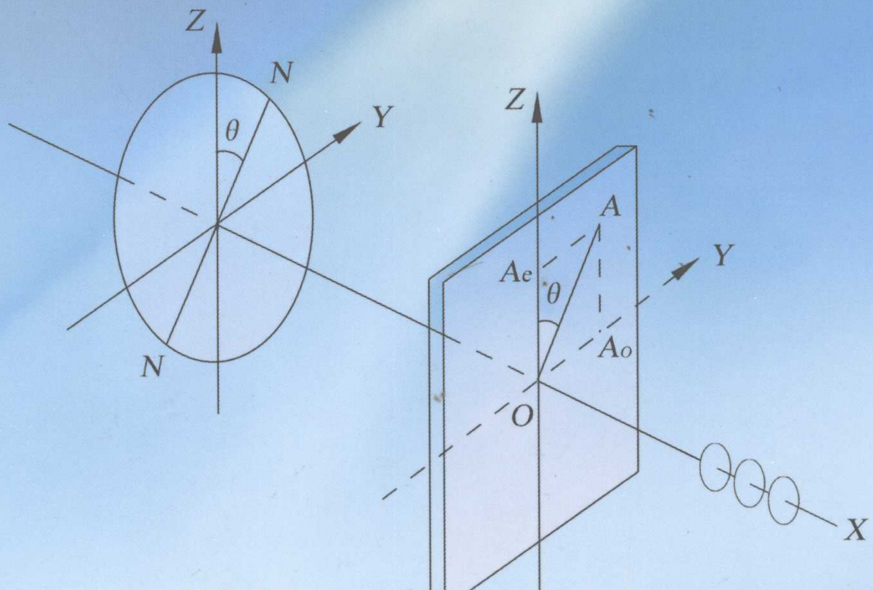
高等院校工科物理实验教材

大学物理实验

DAXUE WULI SHIYAN

（第2版）

周 曼 主编



中国林业出版社

高等院校工科物理实验教材

大学物理实验

（第2版）

周　曼　　主编

中国林业出版社

图书在版编目(CIP)数据

(高等院校工科物理实验教材)大学物理实验(第2版)/周曼主编. —2版. —北京:中国林业出版社,2005.8
高等院校工科物理实验教材
ISBN 7-5038-4035-8

Ⅰ.大… Ⅱ.周… Ⅲ.物理学-实验-高等学校-教材 Ⅳ.04-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第082143号

中国林业出版社·教材建设与出版管理中心
电话:66170109 66181489 传真:66170109

出版 中国林业出版社(100009 北京西城区刘海胡同7号)
E-mail:cfphz@public.bta.net.cn 电话:66184477
发行 新华书店北京发行所
印刷 北京市昌平百善印刷厂
版次 2002年8月第1版 2005年8月第2版
印次 2005年8月第1次
开本 787mm×1092mm 1/16
印张 14.75
字数 350千字
定价 18.00元

编者的话

一、本教材以全国工科物理课程指导委员会制订的《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》为指导，吸取了我校物理实验室建设的成果，结合我校近几年的教学经验，在原讲义的基础上，重新编写而成。

二、作为一门独立设置的必修课，与其相应的教材必须形成完整的体系。本书前三章比较系统地介绍了误差和不确定度的概念及其计算方法，数据处理知识和物理实验的基本测量方法和操作技术，并详细介绍了力学、热学、电磁学实验中常用的近 20 种仪器设备的原理和应用方法。从第四章到第八章，编排了 28 个实验，内容涉及力、热、电、光、声及综合性实验，不仅有基本要求、原理叙述、公式推导，还有实验步骤和数据表格，每个实验后有思考题或讨论题，可以帮助学生加深对课程内容的理解。

三、本教材是物理实验室近几年来教学改革与教学经验的总结，是全体教师和技术人员的共同劳动成果，凝聚了集体的智慧。本书编写的基础是由汪岱玉老师主编的实验讲义，此次重新编写，每位同志都做出了贡献。

四、一本教材的完成是一项艰巨而复杂的工作，实验教学是一项集体的事业，没有物理实验室广大教师和实验技术人员的支持和鼓励，本教材的修订工作将难以完成。本书由周曼主编与统稿，参加编写的人员有封维忠、殷祥元、林杨帆、刘岗、胡涛平、余观夏、王雅谷、冯星球、王军、吴海青、徐慧、张爱珍、刘砚一、张训华、徐锋。在编写过程中，我们也学习了兄弟院校的物理实验教材和教学参考书，吸取了宝贵经验，南京林业大学教材科和中国林业出版社对本书的出版给予了极大的关心和支持，在此特致谢意。

五、尽管我们做了努力，但限于水平，错误、疏漏之处在所难免，请使用本教材的教师和同学们给予批评指正。

编　者

2005 年 7 月于南京

目 录

绪　论

物理学研究的是自然界物质运动的最基本的形式，物理学研究的运动，普遍地存在于其他高级的、复杂的物质运动形式（如生物的、化学的等）之中，因此，物理学所研究的物质运动规律，具有最大的普遍性。原子能、电子计算机、半导体、空间科学等新技术时代的到来，物理学对其所产生的功绩不可低估。物理学在科学技术，乃至思维的发展中，起着极其重要的作用，对人类文明也产生巨大的影响。物理学是自然科学和工程科学的基础。

物理学从本质上说是一门实验科学，物理规律的研究都以严格的实验事实为基础，并且不断受到实验的检验。例如，麦克斯韦的电磁场理论，是建立在法拉第等科学家长期实验的基础上。赫兹的电磁波实验，又使其理论得到普遍的承认和广泛的应用。又如，物理学家杨振宁、李政道在1956年提出了基本粒子在"弱相互作用下的宇称不守恒"的理论，只是在实验物理学家吴健雄用实验证实之后，才得到国际上公认。当实验结果与理论发生矛盾时，还需进行进一步的实验，以便修正理论。所以实验是理论的源泉。

在物理学发展中，人类积累了丰富的实验方法，创造出各种精密巧妙的仪器设备，涉及到广泛的物理现象，这些使得实验物理课程有了充实的教学内容。实验物理课是独立设置的必修课，是学生进入大学后系统学习科学实验知识和技术的开端，是后继实验课的基础，它在培养学生用实验手段去发现、观察、分析和研究问题，最终解决问题的能力方面将起着至关重要的作用。

一、物理实验课的目的

1. 通过对物理实验现象的观测和分析，学习运用理论指导实验、分析和解决实验中问题的方法，从理论和实际的结合上加深对理论的理解。

2. 培养学生从事科学实验的初步能力。

这些能力是指：

（1）自学能力——通过阅读教材或资料，能概括出实验原理和方法的要点。

（2）动手能力——正确使用基本实验仪器，掌握基本物理量的测量方法和实验操作技能。

（3）分析判断能力——运用物理学理论对现象进行分析和判断。

（4）书写表达能力——正确记录和处理数据，绘制图线，讨论和分析实验结果，撰写实验报告。

（5）独立工作能力——根据课题要求，自行设计和完成不太复杂的实验任务。

3. 培养学生实事求是的科学态度，严谨踏实的工作作风，勇于探索、坚韧不拔的钻研精神以及遵守纪律、团结协作、爱护公物的优良品德。

二、物理实验课的主要教学环节

为达到物理实验课的目的，学生应重视物理教学的三个重要环节。

1. 实验预习

课前要仔细阅读实验教材或有关的资料,并学会从中整理出实验所用原理、方法、实验条件及实验关键,根据实验任务画好记录数据的表格。有些实验还要求学生课前自拟实验方案,自己设计线路图或光路图等,因此,课前预习的好坏是实验中能否取得主动的关键。

2. 实验操作

学生进入实验室后应遵守实验室规则,像一个科学工作者那样要求自己,并井井有条地布置仪器,安全操作,注意细心观察实验现象,认真钻研和探索实验中的问题,不要期望实验工作会一帆风顺。在遇到问题时,应看作是学习的良机,冷静地分析和处理它。仪器发生故障时,也要在教师指导下学习排除故障的方法。总之,要把重点放在实验能力的培养上,而不是测出几个数据就以为完成了任务。对实验数据要严肃对待,学生要用钢笔和圆珠笔记录原始数据,如确系记错了,也不要涂改,应轻轻划上一道,在旁边写上正确值(错误多的,须重新记录),使正误数据都能清晰可辨,以供在分析测量结果和误差时参考。不要用铅笔记录,给自己留有涂沫的余地,也不要先草记在另外的纸上再誊写在数据表格里,这样容易出错,况且,这已不是“原始记录”了。希望同学注意纠正自己的不良习惯,从一开始就不断培养好的科学作风。实验结束时,将实验数据交教师审阅、签字,整理还原仪器后方可离开实验室。

3. 实验总结

实验后要对实验数据及时进行处理。如果原始记录删改较多,应加以整理,对重要的数据要重新列表。数据处理过程包括计算、作图、误差分析等,计算要有计算式,代入的数据都要有根据,便于别人看懂,也便于自己检查,作图要按作图规则,图线要规矩、美观。数据处理后应给出实验结果,最后要求撰写出一份简洁、明了、工整、有见解的实验报告。这是每一个大学生必须具备的报告工作成果的能力。

实验报告内容包括:

(1)实验名称

(2)实验目的

(3)实验仪器

(4)实验原理,简要叙述有关物理内容(包括电路图或光路图或实验装置示意图)及测量中依据的主要公式,式中各量的物理含义及单位,公式成立所应满足的实验条件等。

(5)实验内容与步骤。根据实验的过程写明内容与关键步骤。

(6)数据表格与数据处理

记录中应有仪器编号、规格及完整的实验数据,要完成计算、曲线图、误差分析。最后写明实验结果。

(7)小结或讨论

内容不限,可以是实验中现象的分析,对实验关键问题的研究体会,实验的收获和建议,也可以解答思考题或讨论题。

请记住:**我们不是要一个塞满东西的脑袋,而是要一个善于分析的头脑!**

我们不仅要有知识,更重要的是将知识转化为能力!

第一章　误差理论及有效数字

§1-1　测量与误差

一、误差的基本概念

人类在生产、生活和科学实验中经常要对各种物理量进行测量，以获得客观事物的定量信息。为了进行测量，必须选定一些标准单位，如选定质量的单位为千克(kg)、长度的单位为米(m)、时间的单位为秒(s)、电流强度的单位为安培(A)等。测量就是将被测物理量与这些作为标准单位的量进行比较的过程，其倍数即为被测物理量的测得值。测量可分为直接测量和间接测量两种。凡使用测量仪器能直接测得结果的测量，如用米尺测量物体的长度、用秒表测量一段时间等，称为直接测量，相应的物理量称为直接测得量。另外，还有很多物理量，它们不是用测量仪器直接测得的，而是先直接测量另一些相关的物理量，然后通过这些量之间的数学关系运算才能得到结果，这样的测量称为间接测量，相应的物理量称为间接测得量。例如某物体的平均运动速率，我们是直接测量路程和通过这段路程所用的时间，然后经过计算得到的。显然，直接测量是间接测量的基础。

一般来说，测量过程都是某人、在一定的环境条件下，使用一定的测量仪器进行的。由于测量仪器的结构不可能完美无缺；观测者的操作、调整和读数不可能完全准确；环境条件的变化如温度的波动、振动、电磁辐射的随机变化；理论的近似性等等，都不可避免地对实验结果造成各种干扰。因此，任何测量都不可能做到绝对准确。我们把被测物理量在一定客观条件下的真实大小，称为该物理量的真值，记为 a。把某次对它的测得值记为 x。那么 x 与 a 之差 ε，就称为测得值的误差，即

$$\varepsilon = x - a \tag{1-1-1}$$

误差 ε 为一代数值，当 $x \geqslant a$ 时，$\varepsilon \geqslant 0$；当 $x < a$ 时，$\varepsilon < 0$。

误差存在于一切测量之中，而且贯穿测量过程的始终，每使用一种测量仪器，进行一次测量，都会引进误差。

在同一条件下多次测量同一物理量时，误差的大小和符号始终保持不变，或者按照某种确定的规律变化，这种误差称为系统误差，例如用秒表测量一段时间，假设秒表走得快，则用它测出的时间总比真值大(假设其他误差可以忽略不计)，此时的误差就是系统误差。

在同一条件下多次测量同一物理量时，测得值总有差异，并在消除系统误差以后，差异依然存在，即误差的绝对值和符号是变化不定、不可预知的，这种误差称为随机误差(或称偶然误差)。

由于观测者的粗心大意或操作不当造成的人为差错称为过失误差(或称粗大误差)。例如，看错刻度、读错数字、计算错误等。含有过失误差的测量结果是完全无效的，它往往表现为巨大的误差。当确认测量结果中含有过失误差时，该结果应舍弃不用。显然，过失误差是可以避免的。

测量结果中一般同时含有系统误差和随机误差。我们研究误差的目的就是要在测量过程中尽量减小误差,并对残存的误差给出适当的估计值。

二、精 度

精度是个笼统的概念,通常用它来反映测得值与真值的差异。它与误差的大小相对应,因此可用误差的大小来表示精度的高低。误差小则测量的精度高,误差大则测量的精度低。按误差的性质,精度又可分为下面几种。

1. *准确度*

准确度反映的是测量结果中系统误差的影响程度。如果系统误差小,则称测量的准确度高;如果系统误差大,则称测量的准确度低。

2. *精密度*

精密度反映的是测量结果中随机误差的影响程度。随机误差小,即重复测量所得的结果相互接近,则称测量的精密度高;反之,则称测量的精密度低。

3. *精确度*

精确度反映的是测量结果中系统误差和随机误差综合的影响程度。对于具体的测量,准确度高的测量其精密度不一定高,精密度高的测量其准确度也不一定高。但精确度高,则表示测量的准确度和精密度都高。

§1-2 系统误差

一、系统误差的来源

系统误差是使测量结果向一个方向偏离,其数值一定或按一定的规律变化。它的来源有以下三个方面:

1. 由于仪器本身的缺陷或没有按规定的条件使用仪器而造成的误差。例如,仪器的零点不准造成的误差,等臂天平两臂不等长造成的误差,在20℃下标定的标准电阻在30℃的条件下使用造成的误差等。

2. 由于测量所依据的理论公式本身的近似性,或者实验条件下不能达到理论公式所规定的要求,或者由于测量方法所带来的误差。例如,利用单摆测量重力加速度 g,所依据的公式为 $g=4\pi^2 l/T^2$(式中 l 为单摆的摆长,T 为单摆的周期),此公式成立的条件是摆角趋于零,而在测量周期时又必然要求有一定的摆角,这就决定了测量结果中必含有系统误差。

3. 由于观测者本人的生理或心理特点所造成的误差。例如,测量一段时间,观测者计时有超前或落后习惯所带来的误差;对准标志时,观测者总是偏左或偏右所造成的误差等。

系统误差经常是一些实验主要的误差来源。依靠多次重复测量一般不能发现系统误差是否存在。系统误差处理不当往往会给实验结果带来重大影响,因此,我们要经常总结经验,掌握各种因素引起的系统误差的规律,以提高自己的实验技术素养。

二、系统误差的发现

系统误差产生的原因往往是已知的，它的出现一般也是有规律的，人们通过长期实践和理论研究总结出一些发现系统误差的方法。

1. *理论分析法*

所谓理论分析法就是观测者凭借所掌握的有关某项实验的物理理论、实验方法和实验经验对实验所依据的理论公式的近似性、所采用的实验方法的完善性等进行研究与分析，从中找出产生系统误差的某些主要根源，从而发现系统误差的方法。例如，气垫导轨实验中，经理论分析知道由于滑块与导轨之间存在一定的摩擦阻力，如果实验中作为无摩擦的理想情况来处理，就会产生与摩擦阻力有关的系统误差。理论分析法是发现、确定系统误差的最基本的方法。

2. *对比法*

对比法就是改变实验的部分条件、甚至全部安排，去测量被测量，分析改变前后测得值是否有显著的不同，从中去分析有无系统误差和探索系统误差来源的方法。对比的方法有多种，其中包括不同实验方法和不同测量方法的对比；使用不同测量仪器的对比；改变测量条件的对比，以及采用不同人员测量的对比等。例如，将物体分别放在天平的左盘和右盘上分别称衡，可以发现天平不等臂引入的误差；精确地测量同一单摆在不同摆角时的周期值，可以发现周期与摆角有关。

以上介绍了两种发现系统误差的方法。除此之外，还有一些发现系统误差的方法。在具体工作中，我们应该注意学习。

三、系统误差的处理

处理系统误差没有通用的一般方法。下面介绍几个具有一定意义的原则。

1. *消除产生系统误差的因素*

这要求我们要对整个测量过程及测量装置进行必要的分析与研究，找出可能产生系统误差的原因，例如，测量方法方面是否有近似公式或近似计算；测量仪器结构是否合理；测量环境方面是否有由于温度、湿度、气压、振动、电磁场等所引起的影响；观测者是否有估读刻度的偏高或偏低习惯等。经过分析与研究，如果确认实验中有系统误差，则针对具体原因，采取相应措施使系统误差得以减弱或消除。

2. *对测量结果加以修正*

计算出要处理的系统误差之值，取其反号为修正值，加到测量结果上，使测量结果得到修正；或者在计算公式中加入修正项去消除某项系统误差；或者用更高一级的标准仪器校准一般仪器，得到修正值或修正曲线，从而使测量结果得以修正。

3. *采用适当的测量方法*

在测量过程中，根据系统误差的性质，选择适当的测量方法，使测量值中的系统误差得到抵消，从而消除系统误差对测量结果的影响。例如，天平只有在两臂严格等长时，砝码的质量才等于被测物体的质量。事实上，天平两臂总不是严格等长的，即砝码的质量与物体的质量并不严格相等。为了消除这种系统误差，可以采用所谓复称法称衡：设天平的左臂和右臂的长度分别为 l_1 和 l_2，物体的质量为 m，先将物体放在天平的左盘上、砝码放在右盘上进

行称衡。天平平衡时,砝码的质量 m',于是可得到 $ml_1 = m'l_2$。然后将物体放在天平有右盘上、砝码放在天平的左盘上进行称衡,天平平衡时,砝码的质量 m'',于是 $m''l_1 = ml_2$。根据以上公式,可得 $m = \sqrt{m'm''}$。

总的来说,消除系统误差影响的原则就是首先设法使它不产生,如果做不到就修正它或减小它,或者在测量过程中设法抵消它的影响。

我们在处理系统误差时,常将它分为两类来考虑,即已定系统误差和未定系统误差。已定系统误差是指误差的绝对值和符号已经确定的系统误差;未定系统误差是指误差的绝对值和符号未能确定的系统误差,对于未定系统误差通常可估计出误差范围。

§1-3 随机误差的数学处理

在相同的条件下多次测量同一被测量时,如果已经精心地排除了产生系统误差的因素(实际上不可能也不必要绝对排除),发现每次测量结果一般都不一样。测量误差或大、或小、或正、或负,初看显得毫无规律,但当测量次数足够多时,可以发现误差的大小以及正负误差的出现,都是服从某种统计规律的。这种误差我们称为随机误差。随机误差是由于人的感官灵敏程度和仪器的精密程度有限、周围环境的干扰以及随测量而来的其他不可预测的随机因素造成的。这些因素一般是无法预知、难以控制的。所以,测量过程中随机误差的出现带有某种必然性和不可避免性。例如,在测定单摆的周期时,观测者须按下秒表的按钮来记录单摆经过某一标志线的时刻。如果多次重复地测量,就会发现所测得的周期值一般并不相同。这是由于观测者有时过早地按下按钮,有时则过迟。而动作的迟、早也有程度上的差异。又如,在有的测量中,温度的微小起伏会造成测量结果的无序变化;杂散电磁场会影响精密测量等等。

一、随机误差的正态分布规律

对某一被测量进行多次重复测量,假设系统误差已被减弱到可以被忽略的程度,由于随机误差的存在,测量结果 x_1、x_2、…、x_n,一般存在着一定的差异。如果该被测量的真值为 a,则根据误差的定义,各次测量的误差

$$\varepsilon_i = x_i - a \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{1-3-1}$$

大量的实验事实和统计理论都证明,在绝大多数物理测量中,随机误差 ε_i 服从正态分布(或称高斯分布)规律。它具有以下的性质:

1. 绝对值小的误差出现的机会(概率)大,绝对值大的误差出现的机会(概率)小。
2. 大小相等、符号相反的误差出现的概率相等。
3. 非常大的正负误差出现的概率趋于零。
4. 当测量次数非常多时,由于正负误差相互抵消,各误差的代数和趋于零。

随机误差正态分布规律的这些性质在图 1-3-1 的正态分布曲线上可以看得非常清楚。该曲线横坐标为误差 ε,纵坐标为 $f(\varepsilon)$,即误差的概率密度分布函数,它的意义是单位误差范围内出现的误差概率。曲线下阴影包含的面积元 $f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon$,就是误差出现在 ε 至 $\varepsilon + d\varepsilon$ 区间内的概率(图 1-3-2)。

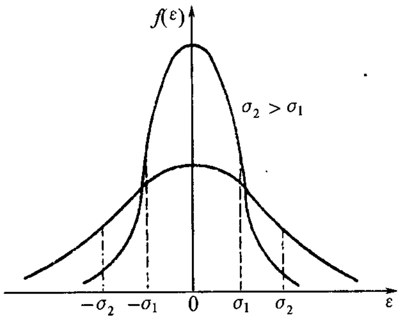


图 1-3-1

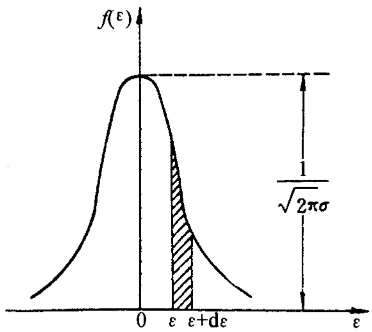


图 1-3-2

根据统计理论可以证明

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} \tag{1-3-2}$$

式中 σ 是一个取决于具体测量条件的常数,称为标准误差(或称均方误差),由式(1-3-2)容易证明,标准误差 σ 正好处在正态分布曲线拐点的横坐标上(拐点是函数的二阶导数为零时解出的值)。

按照概率理论,误差 ε 出现在区间($-\infty$,$+\infty$)的事件是必然事件,所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=1$,即曲线与横轴所包围的面积恒等于1。当 $\varepsilon=0$ 时,由式(1-3-2)得

$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \tag{1-3-3}$$

由式(1-3-3)可见,若测量的标准误差 σ 很小,则必有 $f(0)$ 很大。由于曲线与横轴间围成的面积恒等于1,所以曲线中间凸起较大,两侧下降较快,相应的测量必然是绝对值小的随机误差出现较多,即测得值的离散性小,重复测量所得的结果相互接近,测量的精密度高;相反,如果 σ 很大,则 $f(0)$ 就很小,误差分布的范围就较宽,说明测得值的离散性大,测量的精密度低。这两种情况的正态分布曲线如图 1-3-1 所示。因为 σ 反映的是一组测量数据的离散程度,因此常称它为测量列的标准误差。它的数学表达式为

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sum(x_i-a)^2}{n}} \tag{1-3-4}$$

可以证明,$\int_{-\sigma}^{\sigma}f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\approx0.683=68.3\%$,即由 $-\sigma\sim\sigma$ 之间正态分布曲线下的面积占总面积的68.3%。这就是说,如果测量次数 n 很大,则在所测得的数据中,将有占总数68.3%的数据的误差落在区间 $\pm\sigma$ 之内;也可以这样讲,在所测得的数据中,任一个数据 x_i 的误差 ε_i 落在区间 $\pm\sigma$ 之内的概率为68.3%。区间 $\pm\sigma$ 称为置信区间,其对应的概率($p=68.3\%$)称为置信概率。扩大置信区间,置信概率就会提高。例如,在区间 $\pm2\sigma$ 内,置信概率为95.5%;在区间 $\pm3\sigma$ 内,置信概率为99.7%。$\pm3\sigma$ 这个置信区间表明,随机误差超过这个范围的测得值大约在1000次测量中只出现3次左右。在一般的几十次测量中,几乎不可能出现。

二、算术平均值和标准偏差

1. 算术平均值

由于测量误差的存在,真值实际上是无法测得的。如果在一次系统误差已被减弱到可以忽略的实验中,对被测量进行 n 次相同的测量,得到的将是一组大小略有起伏的测量数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 。根据随机误差的正态分布规律,测得值偏大或偏小的机会是相等的,即绝对值相等的正负误差出现在概率上是相等的。因此,各次测得值的算术平均值

$$\bar{x} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{\sum x_i}{n} \qquad (1-3-5)$$

必然最为接近被测量的真值,而且当测量次数趋于无限多时($n \to \infty$),平均值无限接近真值,所以算术平均值是真值的最佳估计值。

2. 算术平均值的误差

我们通过测量获得了一组数据,并把求得的算术平均值 $\bar{x}$ 作为测量结果。如果我们在完全相同的条件下重复测量时,由于随机误差的影响,不一定能得到完全相同的$\bar{x}$。这表明算术平均值本身具有离散性。为了评定算术平均值的离散性,我们引入算术平均值的标准误差 $\sigma(\bar{x})$,可以证明

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (1-3-6)$$

式中,n 为测量次数,算术平均值的标准误差表示算术平均值的误差(即 $\bar{x} - a$)落在 $-\sigma(\bar{x}) \sim +\sigma(\bar{x})$ 之间的概率为68.3%,或者说从$\bar{x} - \sigma(\bar{x}) \sim \bar{x} + \sigma(\bar{x})$ 的范围内包含真值的概率为68.3%。

由式(1-3-6)可见,$\sigma(\bar{x})$ 是测量次数 n 的函数。测量次数越多,平均值的误差越小。由此可见,多次测量提高了测量的精度。但也不是测量次数越多越好。因为,n 增大只对随机误差的减小有作用,对系统误差则无影响,而测量误差是随机误差与系统误差的综合。所以,增加测量次数对减小误差的价值是有限的;其次 $\sigma(\bar{x})$ 与测量次数 n 的平方根成反比,σ 一定时,当 $n > 10$ 以后,$\sigma(\bar{x})$ 随测量次数 n 的增加而减少得很缓慢;另外,测量次数过多,观测者将疲劳,测量条件也可能出现不稳定,因而有可能出现增加随机误差的趋势。实际上,只有改进实验方法和仪器,才能从根本上改善测量的结果。

3. 标准偏差

真值实际上是无法测得的,因此前面对误差的讨论只有理论上的价值。下面我们讨论误差的实际处理方法。

由于算术平均值最接近真值,因此可以用平均值参与对标准误差的估计。我们常用如下的贝塞尔公式去估计标准误差。

$$\hat{\sigma}(x) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}} \qquad (1-3-7)$$

式中,测得值 x_i 与平均值$\bar{x}$之差 v_i(即 $v_i = x_i - \bar{x}$)称为测得值 x_i 的残余误差,简称残差。贝塞尔公式是用残差去求标准误差 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$,称此估计值为测量列的标准偏差。

可以证明,当测量次数 n 足够大时,可以用式(1-3-7)$\hat{\sigma}$ 的值代替按式(1-3-4)定义的 σ。

算术平均值的标准误差 $\sigma(\bar{x})$ 的估计值为算术平均值的标准偏差 $\hat{\sigma}(\bar{x})$,若测量列的标准偏差为 $\hat{\sigma}$,则

$$\hat{\sigma}(\bar{x}) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n(n-1)}} \qquad (1-3-8)$$

三、绝对误差与相对误差

设某一测得值 x 的真值为 a,则误差 $\varepsilon = x - a$,此误差和测得值有相同的单位,又称其为绝对误差。绝对误差和误差的绝对值不同,绝对误差为一代数值,而误差的绝对值总是正值。

误差的绝对值:$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n}(|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots + |x_n - \bar{x}|) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(|x_i - \bar{x}|)$

相对误差是误差与真值之比。因为误差和真值均不可知,在实际工作中就用标准偏差和平均值之比作为相对误差的估计值。相对误差常用符号 E 来表示,并表示成百分数。例如,测得单摆的周期及标准偏差为

$$\bar{T} \pm \hat{\sigma}(T) = (1.995 \pm 0.004)\,\mathrm{s} \qquad (置信概率\ p = 68.3\%)$$

则相对误差

$$E = \frac{\hat{\sigma}(T)}{\bar{T}} = 0.20\%$$

通过前面的讨论我们看到,误差一词有两重意义。一是它定义为测得值与真值之差,是确定的,但是一般不可能求出具体的数值;二是当它与某些词构成专用词组时(如标准误差),不指具体的误差值,而是用来表示和一定的置信概率相联系的误差范围。这个问题应引起初学者的注意。

四、过失误差的剔除

在测量数据中,有时会发现过大或过小的异常数据。这往往是测量过程中的过失引起的,这样引入的误差,我们称为过失误差或粗大误差。那么按什么标准来判断一组数据中是否含有过失误差呢?下面介绍两个判别的准则。

1. 拉依达准则

此准则是以凡残差大于 $3\hat{\sigma}$ 的数据就应舍弃为标准,来剔除不合理的数据的。其根据是,对于服从正态分布的随机误差来说,误差出现在 $\pm 3\sigma$ 区间的概率约为 99.7%,也就是说,在 1 000 次测量中,误差的绝对值大于 3σ 的测量为 3 次。所以,在测量次数不太多的情况下,出现这样的数据是不正常的,这时我们宁可将它舍弃。这样以测量列的标准偏差的 3 倍为界来决定数据的取舍就成为一个准则。

拉依达准则只有在测量次数 n 较大时才适用,且至少应使 $n > 10$,否则用这种方法是无

法剔除过失误差的。事实上，拉依达准则偏宽，又没有考虑数据个数的影响，在正式处理数据时一般不使用。

2. 肖维涅准则

设重复测量的次数为 n，则在一组测量数据中，凡未在区间 $\bar{x} \pm c_n\hat{\sigma}$ 的测得值可以认为是异常值而舍弃。c_n 为此准则的数，表 1-3-1 给出了各种测量次数下的 c_n 值。

表 1-3-1

n	c_n	n	c_n	n	c_n
5	1.65	14	2.10	23	2.30
6	1.73	15	2.13	24	2.31
7	1.80	16	2.15	25	2.33
8	1.86	17	2.17	30	2.39
9	1.92	18	2.20	40	2.49
10	1.96	19	2.22	50	2.58
11	2.00	20	2.24	75	2.71
12	2.03	21	2.26	100	2.81
13	2.07	22	2.28	200	3.02

必须指出，按上述准则若判别出测量数据中有两个以上测得值含有过失误差，此时只能首先剔除含有最大误差的测得值，然后重新计算算术平均值及测量列的标准偏差，再对余下的测得值进行判别，直至所有的测得值皆不含过失误差为止。

五、仪器的等价标准差

仪器误差也同样包含系统误差和随机误差两部分，其性质在很大程度上取决于仪器的准确度级别，一般级别较高的仪器和仪表（如 0.2 级）主要是随机误差，级别低的或工业用仪表则主要是系统误差。实验室常用的 0.5 级、1.0 级表，则两种误差都有，且数值相近。如何确定仪器的等价标准差？它与上述仪器最大示值误差间的关系又如何？

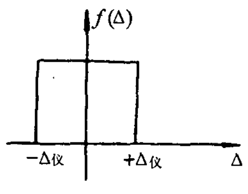


图 1-3-3

一般仪器误差的概率密度函数服从均匀分布，如图 1-3-3 所示。所谓均匀分布，是指在其误差范围内（如 $\Delta_{仪}$ 区间），各种误差（不同大小和符号）出现的概率都相同，区间外出现的概率为零。例如级别较高的仪器或仪表的误差、游标卡尺的仪器误差、仪器度盘或其他传动齿轮的回差所产生的误差、机械秒表在其分度值内不能分辨引起的误差、示波器实验中调李萨如图形不稳定引起的频率测量误差、指零仪表判断平衡的视差以及数据截尾引起的舍入误差等都属于均匀分布。误差发生在区间 $[-\Delta_{仪}, +\Delta_{仪}]$ 内的概率为

$$\int_{-\Delta_{仪}}^{+\Delta_{仪}} f(\Delta)\,\mathrm{d}\Delta = 1$$

所以误差服从的规律为

$$f(\Delta) = \frac{1}{2\Delta_{仪}}$$

可计算得标准误差为