

2003年上海大学博士学位论文 ②0

无穷域问题的 谱方法研究

作者：张 璟
专 业：流体力学
导 师：周哲玮



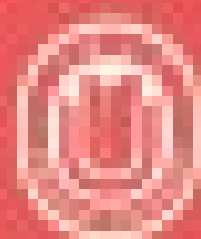
上海大学出版社

· 上海 ·

数学研究 1992(1) 1

无穷级数问题的 新方法研究

李 杰 王 明
李 杰 王 明
李 杰 王 明



上海人民教育出版社

2003 年上海大学博士学位论文

无穷域问题的谱方法研究

作 者： 张 璟
专 业： 流体力学
导 师： 周哲玮

上海大学出版社
• 上海 •

上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查, 确认符合上海大学博士学位论文质量要求.

答辩委员会名单:

主任: **戴世强** 教授, 上海市应用数学和力学研究所 200072

委员: **夏南** 教授, 上海市应用数学和力学研究所 200072

马和平 教授, 上海大学数学系 200072

盛万成 教授, 上海大学数学系 200072

郭兴明 教授, 上海市应用数学和力学研究所 200072

导师: **周哲玮** 教授, 上海大学 200072

评阅人名单:

尹协远	教授, 中科大力学和机械工程系	230026
夏 南	教授, 上海市应用数学和力学研究所	200072
马和平	教授, 上海大学数学系	200072

评议人名单:

贺国强	教授, 上海大学数学系	200072
刘宇陆	教授, 上海市应用数学和力学研究所	200072
翁培奋	教授, 上海市应用数学和力学研究所	200072
胡国辉	副教授, 上海市应用数学和力学研究所	200072

答辩委员会对论文的评语

张璟同学的博士学位论文提出了一种指数函数变换和座标变换结合 Chebyshev 谱配置法求解无穷域问题的新方法,并用于第二类 Bessel 函数和 Burgers 方程的计算,为应用谱方法研究无穷域问题提供了新思路.

作者采用新方法重新计算第二类变型 Bessel 函数,得到了比前人更为理想的结果,在对 Burgers 方程的计算中,得出了与解析解符合的结果.证明作者所得到的方法是有效的.

本文分析的解在无穷远出衰减的轴对称问题代表了射流问题的基本特征,因此这种方法在射流问题研究中有重要的应用前景.

作者对谱方法做了详细的研究,并有所创新,提出了自己的方法.论文思路严谨,内容翔实,结果可信,是一篇较为优秀的博士学位论文.并在答辩中能正确流利地回答问题,表明作者有坚实宽广的专业知识基础和独立从事科研的能力,特别是有很强的应用计算机的能力.

答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决,全票同意通过张璟同学的博士学位论文答辩,建议授予工学博士学位。

答辩委员会主席: **戴世强**

2003年8月4日

摘 要

喷射成形工艺是一种在冶金行业有重要应用前景的新工艺,而喷射雾化技术是喷射成形工艺中的关键技术,因此对喷射雾化技术的研究具有十分重要的意义.但是应当指出的是由于物理现象非常复杂,对喷射雾化机理的了解还是非常不够的.由于理论分析和试验研究存在不小的困难,因此使用高精度数值计算方法作为研究手段对喷射雾化技术中的现象进行研究是非常有必要的.谱方法作为一种高精度的数值计算方法在进行喷射雾化机理研究时具有重要的意义.

使用谱方法研究喷射雾化技术中涉及的主要困难在于边界条件的处理,即无穷远边界条件和界面边界条件的处理.文章主要着眼于无穷远边界条件的处理方法.对于此类问题主要的处理方法有三种,即计算区域截断处理、使用取值范围为无界区域的基函数作为谱方法展开的展开基、使用座标变化方法.在文章中,作者提出新的指数变化方法结合座标变化的处理办法,并计算了线性的第二类变型 Bessel 函数 $K_n(z)$ 和无穷区域下的非线性的 Burgers 方程作为应用的范例.

线性的第二类变型 Bessel 函数 $K_n(z)$ 在自变量趋于无穷时是指数变小的,使用多项式逼近的方法求解往往误差很大.在文章中,作者提出新的指数变换结合有理 Chebyshev 多项式和指数变换结合 Chebyshev 谱配置法来计算第二类变型 Bessel 函数的方法,得到了令人满意的在较大范围内有效的解.通过计算发现使用指数变换结合 Chebyshev 谱配置法求解线性的无穷远

问题—零阶第二类变型 Bessel 函数 $K_0(z)$ 是有效的, 但是仍然有继续改进的余地. 而使用指数变换结合有理 Chebyshev 多项式方法能够达到较高的计算精度.

在文章中同时还提出新的指数变换方法结合谱方法在无界域中求解非线性问题——Burgers 方程. 使用指数变换方法对 Burgers 方程和边界条件作了处理, 然后使用代数变换的方法和对数变换的方法将经过指数变换后的问题的取值范围从无界区域变成有界的, 最后使用谱方法求解问题. 在实际计算的时候, 发现使用代数变换方法的计算精度和收敛速度都不够, 更为严重的是在很多不同参数 A/μ 下计算结果都出现了发散的情况, 但是使用指数变换和对数坐标变换的组合, 可以得到较小的计算误差. A/μ 对计算精度有重要的影响, 选择适合的 A/μ 是整个算法成功的关键.

作者文中提出的方法不同于其他方法之处在于考虑到当自变量趋于无穷大的时候, 问题的解是指数衰减的, 引入一个指数变换对问题进行变换, 然后使用座标变换和 Chebyshev 谱配置法来求解变换后的新问题.

应当指出的是虽然作者提出并使用指数变换结合谱方法只计算了无穷域下的非线性问题——Burgers 方程和线性的第二类变型 Bessel 函数 $K_n(z)$, 但是对于其他无穷域下的非线性和线性方程的求解应该也是可以提供求解的思路的.

关键词 喷射成形, 喷射雾化, 谱方法, 无穷域

Abstract

Sprayforming is a new technology in metallurgical industry, which have been well applied, and spray atomization is a key technology for sprayforming. So the research of spray atomization is very important. But it should be pointed out that people don't know much about the mechanism of spray atomization, since physical phenomenon of spray atomization is very complicated. Because there is large difficulty in theory analysis and experimental study, it is very necessary to use high-accuracy numerical method as means of studying to the phenomenon of spray atomization. So as a high-accuracy numerical method, spectral method is very important for studying the mechanism of spray atomization.

The major difficulty in studying spray atomization is how to handle boundary condition, such as unbounded domain problem and interface condition. In the thesis, the author will major in the method to deal with unbounded domain problem. There are three basic ways to deal with unbounded domain problem, *i.e.*, domain truncated, expand in functions whose variables are infinite or semi-infinite, and coordinate transformation. The author develop a new exponential transform method combined with coordinate transformation to deal with unbounded domain problem. By the method, the author computed a linear problem, the second kind of modified Bessel Function $K_n(z)$, and a nonlinear problem, Burgers Equation in unbounded domain.

The second kind of modified Bessel function $K_n(z)$ is decay exponentially when $z \rightarrow +\infty$. So if it is approximated by Chebyshev

polynomial, it will meet large error. In the thesis, We develop a new exponential transform method combined with Rational Chebyshev Polynomials or Chebyshev Spectral Collocation Method to compute the second kind of modified Bessel function. By introducing an exponential transformation to achieve high precision and the property of second kind of modified Bessel Function $K_n(z)$ is identified with Chebyshev polynomial approximation, so it can be approximated efficiently.

The author also use the exponential transformation combined with coordinate transformation to deal with a nonlinear problem, Burgers Equation. First, Burgers Equation and boundary condition were dealt with by the exponential transformation; then through algebraic mapping or logarithmic mapping, the semi-infinite into finite one was mapped; at last, it was solve by spectral method. It is not accuracy enough and convergent slowly to use algebraic mapping to solve Burgers Equation. But using logarithmic mapping to solve Burgers Equation, the compute errors are small. Parameter A/μ is a key to success of the method.

The main difference between the method we developed and another one is that we introduce a new exponential transformation to transform problem by considering that the function $f(z)$ is decay exponentially when $z \rightarrow +\infty$. And it should be pointed out that the method is not only suitable for dealing with the linear problem, the second kind of modified Bessel Function $K_n(z)$, and the nonlinear problem, Burgers Equation in unbounded domain, but also suitable to supply a new way to solve another problem in unbounded domain.

Key words sprayforming, spray atomization, spectral method, unbounded domain

目 录

前 言	1
第一章 喷射雾化技术简介	3
1.1 熔融金属喷射雾化方法概述	3
1.2 影响气体雾化过程的物理因素	8
1.3 气体雾化过程的阶段	11
1.4 气体雾化过程中各阶段机理的研究	14
1.5 雾化过程的数值模拟	21
1.6 本章小结	25
第二章 无界区域问题的求解	27
2.1 引言	27
2.2 计算区域截断方法	28
2.3 Sinc 函数	29
2.4 Hermite 多项式和 Laguerre 多项式	31
2.5 座标变换方法	32
2.6 本章小结	32
第三章 射流线性稳定性问题的谱分析	34
3.1 引言	34
3.2 Chebyshev 谱配置方法	36
3.3 柱坐标系的影响	43
3.4 广义特征值问题的求解和伪特征值	45
3.5 理想流体射流稳定性的谱分析	48

3.6 本章小结	65
第四章 第二类变型 Bessel 函数的 Chebyshev 逼近	67
4.1 引言	67
4.2 有理 Chebyshev 多项式方法	69
4.3 Luke 的方法	72
4.4 指数变换	75
4.5 本章小结	103
第五章 Burgers 方程指数衰减解的 Chebyshev 逼近	105
5.1 引言	105
5.2 基本方程和边界条件	106
5.3 指数变换	107
5.4 座标变换——代数变换	109
5.5 座标变换——对数变换	113
5.6 本章小结	140
附录 A 非线性项的处理	141
第六章 结论与展望	145
参考文献	148
致 谢	162

前言

由于喷射成形工艺作为一种新的工艺在冶金行业有重要的应用前景,而喷射雾化技术是喷射成形工艺中的关键技术,因此对喷射雾化技术的研究具有非常十分重要的意义.但是应当指出的是由于物理现象非常复杂,我们对喷射雾化机理的了解还是非常不够的.

为了更好的进行喷射雾化机理的研究,我们有必要使用高精度数值模拟方法作为研究手段.谱方法作为一种高精度的数值计算方法在进行喷射雾化机理研究时具有重要的意义,但是谱方法在处理边界条件时存在一定的困难.在使用谱方法模拟喷射雾化过程时不得不面对两种边界条件的处理,即无穷远边界条件和界面边界条件.在文章中,将主要研究如何使用谱方法(主要是 Chebyshev 谱配置法)处理无穷远边界的问题.本文主要完成以下工作:

1. 简单介绍喷射雾化工艺;
2. 回顾处理无界区域问题的主要方法;
3. 使用谱方法计算射流的线性稳定性问题,即广义特征值问题;
4. 提出一种新的指数变换方法结合谱方法处理无界区域上的线性问题,并以第二类修正贝塞耳函数的计算作为算例;
5. 提出一种新的指数变换方法结合谱方法处理无界区域上

的非线性问题, 并以 Burgers 方程的计算作为算例;

在第一章中, 我们主要介绍喷射雾化工艺. 首先我们将简单概括一下主要的熔融金属喷射雾化的方法; 然后集中介绍一下影响气体雾化的主要物理因素; 以及气体雾化的主要过程和各阶段的机理; 最后再介绍一下使用数值模拟方法研究喷射雾化的现状.

在第二章中, 我们主要介绍谱方法处理无穷远边界条件的方法, 即计算区域截断方法、使用取值范围为无界区域的基函数作为展开基的谱方法以及座标变换的方法.

在第三章中, 我们主要介绍 Chebyshev 谱配置法, 并使用该方法求解射流的线性稳定性问题. 我们将主要介绍 Chebyshev 谱配置法的特点、离散过程和问题的边界条件的处理; 柱坐标系的奇性与谱法的关系; 讨论特征值问题的解法和伪特征值问题, 最后将详细地讨论理想流体射流线性稳定性问题的谱方法分析的结果.

在第四章中, 我们提出一种新的指数变换方法结合谱方法处理无界区域上的线性问题, 并以第二类修正贝塞耳函数的计算作为算例. 我们将分别使用 J. P. Boyd 的有理 Chebyshev 多项式方法、Luke 的座标变换方法、指数变换方法结合有理 Chebyshev 多项式方法以及指数变换方法结合 Chebyshev 谱配置法.

在第五章中, 我们提出一种新的指数变换方法结合 Chebyshev 谱配置法求解无穷域上的 Burgers 方程. 从而说明使用指数变换方法结合 Chebyshev 谱配置法求解无穷域上的非线性问题也是有效的.

第一章 喷射雾化技术简介

喷射成形工艺是一种新兴的冶金工艺。早在1958年, Brennan 就设想使用一种金属喷射工艺来生产金属半成品, 然而直到1970年才由 A.R.E. Singer 开展了喷射成形的早期研究。Singer 利用氩气和氮气雾化铝合金连续生产铝带。此后 Osprey 公司进一步研究该技术, 发展出了一种被称为“Osprey Process”的喷射成形技术。至1994年秋, Osprey 公司已经授权近二十五家公司或机构生产喷射成形产品和设备(P. S. Grant, 1995)。类似的技术还有 CSD(控制喷射沉积, Controlled Spray Deposition)和 LDC(液体动态冲击, Liquid Dynamic Compaction)。

喷射成形工艺一般都是利用喷射雾化技术使得液态金属破碎直接沉积到模具上从而形成产品或半成品, 因此该工艺又被称为喷射雾化和沉积。(其原理如图 1-1 所示)

1.1 熔融金属喷射雾化方法概述

熔融金属喷射雾化方法大致可以分为以下四类(E. J. Lavernia, 1996):

- (1) 真空雾化 (Vacuum Atomization);
- (2) 双流体雾化 (Twin Fluid Atomization);
- (3) 离心雾化 (Centrifugal Atomization);
- (4) 单一大小液滴生成(Mono-sized Droplet Generation)

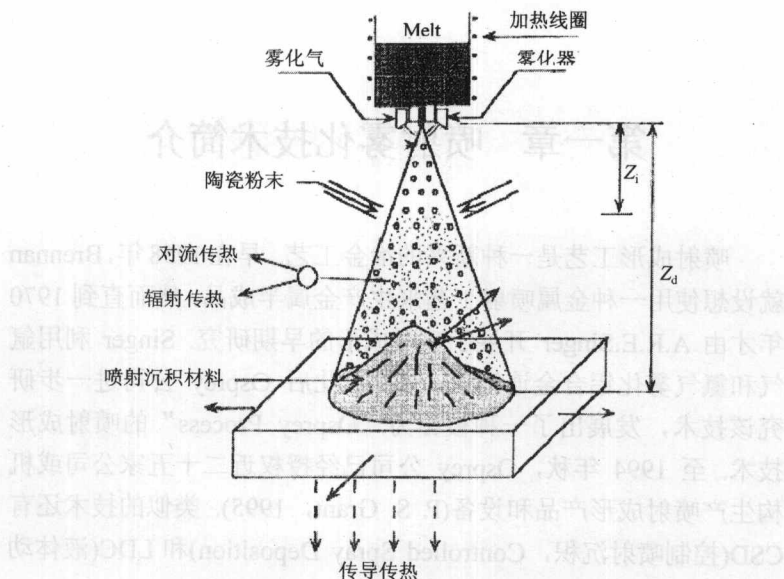


图 1-1 喷射成形工艺的工作原理(E. J. Lavernia, 1996)

真空雾化过程是将保存在隔离气体中的熔融金属射入低压或真空环境中，由于暴露在真空中导致熔融金属中所含气体的膨胀并释放到低压或真空环境中引起熔融金属的变形和破碎。

双流体雾化是熔融金属被作用在其上的雾化流体冲击导致破碎，因此根据雾化流体的物理性质的不同可以分为：

- (1) 水雾化(Water Atomization);
- (2) 油雾化(Oil Atomization);
- (3) 气体雾化(Gas Atomization).

而气体雾化器可以根据雾化气体的流动特性分为：

- (1) 亚音速气体雾化(Subsonic Gas Atomization);
- (2) 超音速气体雾化(Supersonic Gas Atomization);