北京市成人高等院校统编试用教材

概率论与数理统计

《经济应用数学基础》编写组

同心出版社

概率论与数理统计

《经济应用数学基础》编写组

同心出版社

(京)新登字 214 号

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/《经济应用数学基础》编写组编.
北京:同心出版社,1995.6
ISBN 7-80593-135-6

Ⅰ.概… Ⅱ.经… Ⅲ.①概率论-成人教育:高等教育-教材②数理统计-成人教育:高等教育-教材 Ⅳ.①O21②O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 03379 号

同心出版社出版、发行
(100734 北京市东单西裱褙胡同 34 号)
北苑印刷厂印刷印刷 新华书店经销
1995 年 7 月第 1 版 1995 年 7 月第 1 次印刷
850×1168 毫米 32 开本 5.875 印张
字数:152 千字 印数:1—13200 册

定价:6.00 元

前　言

在北京市成人教育局的指导下，中国职工教育数学学会北京分会部分教师承担了成人高等院校统编试用教材《经济应用数学基础》的编写工作。本套教材分《微积分》、《线性代数与线性规划》和《概率论与数理统计》三册，每册都配有相应的“学习指导”。

在编写过程中，我们认真研究并讨论了教学大纲，广泛征求了成人高校数学教师的意见，力求编出一套具有大专水平、理论联系实际、基础理论充实、便于自学的教材，以适合目前北京市成人高等院校财经类核心课程的需要。

由于时间短，编者水平有限，书中定有很多不妥之处，望广大教师与学员在使用本教材过程中不吝指正，使之不断完善。

本套教材由于仲云副教授任主编，王培根、张学忠、何嗣玫三位副教授任副主编，刘德荫副教授、励金华教授、林士中教授主审。

本书由刘德荫、何嗣玫编著。

北京市成人高等院校统编试用教材

《经济应用数学基础》编写组

目　　录

第一章　概率的基本概念

概率论是研究随机现象数量规律的数学分支.随着科学技术的飞速发展、概率论与数理统计在自然科学、社会科学、工程技术、经济管理等国民经济的各个部门中都得到广泛的应用.

§1.1　随机现象、随机试验、随机事件

一、随机现象

概率与统计是研究大量随机现象的规律性的数学分支.什么是随机现象呢?我们先看几个例子.

例 1　往桌子上掷一枚硬币,如果规定有币值一面为“正面”,则正面可能向上,也可能向下.究竟出现这两种结果的哪一种,在投掷之前是不能肯定的.

例 2　掷一颗骰子,观察出现的点数.可能是“1 点”、“2 点”…“6 点”,这 6 种结果究竟出现哪一种,在投掷前是不能确定的.

例 3　在抽样检查某种产品时,随意抽取 5 件,观察次品的件数.可能是“0 件”、“1 件”…“5 件”,在抽取前也不能肯定被抽到的次品的件数.

例 4　记录某天在西单地铁车站于 6：00 至 6：03 这 3 分钟内排队候车的人数.可能是 0、1、2、3…

例 5　某车工在同样的工艺条件下生产出来的零件的尺寸总不完全相同,而且每个零件的尺寸在加工完成以前是不能准确预言的.

上述现象的共同特点是:

在一定的条件下可能出现的结果不止一个,至于哪个结果出现,我们在事前无法准确地判定,这种现象称为随机现象.

各种随机现象，从表面上看好象杂乱无章无规律可循. 其实不然，对随机现象只做个别的试验或观测，看不出明显的规律性. 但是，在相同的条件下，对随机现象进行大量的重复试验或观测，通过分析就会发现，各种结果出现的可能性是有一定的规律性的. 概率与统计就是研究随机现象数量规律性的一门数学学科.

二、随机试验与随机事件

对随机现象的一次观察或实验，称为一次随机试验简称试验.

随机试验具有以下特点：

1. 可以在相同的条件下重复地进行；
2. 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；
3. 每次试验之前不能预言哪一个结果会出现.

随机试验的每一个可能出现的结果称为**基本事件**或称**样本点**. 全体基本事件的集合称为**基本事件空间**或称**样本空间**，用希腊字母“Ω”表示.

例 6 掷一枚硬币，观察正面出现的情况试验结果有两个，记 ω_1 为正面朝上，ω_2 为正面朝下，这个试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$.

例 7 在掷一颗骰子的试验中，观察出现的点数，设 ω_i 为出现 i 点（$i=1,2,\cdots,6$）于是样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$.

例 8 任意抽查 5 件产品，观察出现的次品件数，设 ω_i 为恰好出现 i 件次品. 于是样本空间 $\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$.

样本空间的某个子集称为随机事件，简称事件. 用大写的字母 A、B、C…表示.

例 9 在掷骰子的试验中，事件 A 为出现偶数点，则 $A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$，$A$ 是 Ω 的子集，又如事件 B 为出现“3 点”，$B=\{\omega_3\}$，事件 C 为“点数大于 4”出现，即 $C=\{\omega_5, \omega_6\}$，其中 A、B、C 均为随机事件.

例 10 从 10 件同类产品（其中有 8 件正品、2 件次品）中，任

意抽取 3 件. 那么,

A=“三件都是正品”={0 个次品}

B=“至少有一件次品”={“1 件次品”}+{“2 件次品”}

C=“三件都是次品”

D=“至少有一件正品”

从例 10 中,我们可以看出基本事件为:ω_0=“三件都是正品,即 0 件次品”,ω_1=“2 件正品,1 件次品”,ω_2=“1 件正品,2 件次品”,即 $\Omega=\{\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2\}$;其中 $A=\{\omega_0\}$, $B=\{\omega_1,\ \omega_2\}$,$A$、$B$ 是随机事件,而 C 是不可能发生的,它不包含任何基本事件,D 是必定要发生的,它包含样本空间中每一个基本事件.

我们把在每次试验中都不发生的事件称为**不可能事件**,用符号“ϕ”表示. 把必定要发生的事件称为**必然事件**,用符号 Ω 表示. 为讨论问题方便起见,将不可能事件 ϕ 和必然事件 Ω 看作随机事件的特殊情况.

三、事件间的关系与运算

1. 事件的包含

如果事件 A 的发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 包含于事件 B,记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

为了直观起见,今后我们用一个矩形表示必然事件 Ω,而矩形内的一些区域用来表示随机事件,如图 1-1 表示 $A\subset B$.

显然包含有以下两个性质:

对于任意事件 A 有,$A\subseteq A$.

若 $A\subset B$、$B\subset C$,则有 $A\subset C$.

2. 相等事件

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 是相等事件,记作 $A=B$.

显然,若 $A=B$ 又 $B=C$,则 $A=C$.

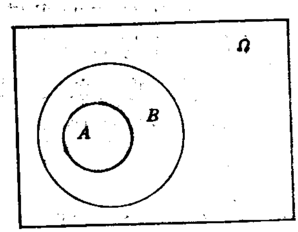

图 1-1

3. 和事件

事件 A 与事件 B 至少有一个发生,这一事件称为 A 与 B 的

和事件,(或并事件),记作 $A+B$ 或 $A\cup B$,见图 1-2.

类似地,可以推广到 n 个事件的情况. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生,这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个事件的和事件,记作:$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$.

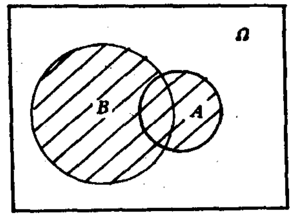

图 1.2

显然,对任一事件 A 有:

(1) $A+A=A$

(2) $A+\Omega=\Omega$

(3) $A+\phi=A$

4. 积事件

事件 A 与事件 B 同时发生,这一事件称为 A 与 B 的积事件(或交事件),记作 AB 或 $A\cap B$.

积事件的关系见图 1-3.

类似地,可以推广到 n 个事件的情况. 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生,这一事件称为这 n 个事件的积事件,记作:

$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cdot A_2 \cdots\cdots \cdot A_n$

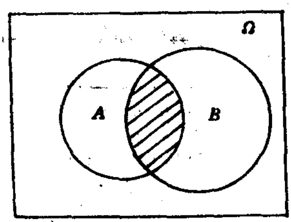

图 1.3

5. 差事件

事件 A 发生而事件 B 不发生,这一事件称为 A 与 B 的差事件,记作 $A-B$.

差事件的关系表示如图 1-4.

如上面掷骰子,$A=\{1, 2, 3\}$

$B=\{2, 4, 6\}$

则 $A-B=\{1, 3\}$,而 $B-A=\{4, 6\}$.

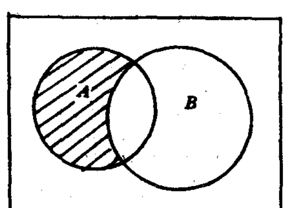

图 1.4

6. 互不相容事件

若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $A\cdot B=\phi$,则称 A 与 B 是互不相容事件

（或互斥事件）；反之，则称 A 与 B 是相容事件.

例如掷骰子，A 表示出现偶数点 $A=\{2, 4, 6\}$，B 表示出现的点数为不超过 3 的奇数 $B=\{1, 3\}$，C 表示出现 5 点即 $C=\{5\}$，则 A 与 B、B 与 C、C 与 A 两两互不相容.

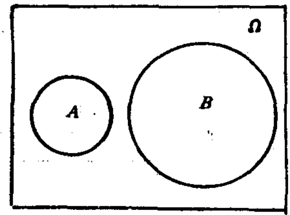

图 1.5

A 与 B 互不相容表示成图 1-5.

7. 对立事件

如果事件 A 与事件 B 中，仅有且必有一个事件发生，即 $A+B=\Omega$ 且 $A\cdot B=\phi$，称 A、B 为对立事件. 它们的关系如图 1-6.

对立事件又称互逆事件，事件 A 的对立事件记作 $\overline{A}$.

例如 掷一枚骰子，B 表示掷出的点数不少于 3，即 $B=\{3, 4, 5, 6\}$ 则 $\overline{B}=\{1, 2\}$.

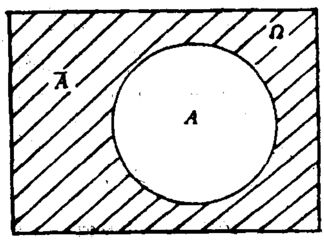

图 1.6

对立事件是互不相容事件的特殊情况，易知，$\overline{\Omega}=\phi$，$\overline{\phi}=\Omega$，$\overline{\overline{A}}=A$.

§1.2 概率的定义

一、概率的统计定义

在研究许多自然现象和社会现象时，我们发现在大量重复试验中，随机事件的发生呈现出某种统计规律性. 为了研究和描述这种规律性，我们先给出事件频率的定义.

在 n 次试验中，事件 A 出现了 m 次，则称 m 为 A 发生的频数，而 $\frac{m}{n}$ 叫做事件 A 的频率.

以抛掷硬币的试验为例，从前法国生物学家蒲丰（*D. Buffon*）

和英国统计学家皮尔逊($K. Pearson$)做过掷硬币的试验,所得数据如下表:

表 1.1

试验者	掷币次数	正面次数	频　率
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

从表 1.1 可以看出,当试验次数逐渐增多时,正面朝上出现的频率总是在 0.5 附近摆动.

许多自然现象和社会现象出现的真正概率是很难求得的,但试验次数相当大时,我们可以取事件频率作为其概率的近似值,试验的次数愈多,频率愈能代表事件出现的概率.

概率的统计定义表述如下:

在确定的条件下,事件 A 在 n(n 很大)次试验中出现 m 次,则事件 A 的频率可以作为事件 A 的概率 $P(A)$的近似值,试验次数愈多,频率就愈接近于概率,即

$$P(A)=\frac{\textbf{事件 } A \textbf{ 出现的次数}}{\textbf{试验的总次数}}=\frac{m}{n}$$

二、概率的古典定义

许多试验都具有如下的特点:

(1)有限性:试验的结果(即基本事件)的总数为有限个.

(2)等可能性:试验中每个基本事件发生的可能性的大小都是相同的.

这种概率模型是概率发展初期的主要研究对象,称之为古典概型.上面所说的掷硬币和掷骰子都是古典概型.利用古典概型的两个特点我们可以直接来计算事件的概率.

概率的古典定义：

在古典概型中，如果基本事件的总数为 n，事件 A 包含有其中的 m 个基本事件，则称 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 的概率，记作：$P(A)=\frac{m}{n}$.

这个定义只适用于古典概型，所以称为概率的古典定义. 定义本身给出了概率的求法，但 n 和 m 的计算要用到排列和组合的知识，需掌握一定技巧.

例 1 一部五卷集的"工程数学手册"，按任意顺序放到书架上，试求下列事件的概率：

(1) A="各卷自左向右或自右向左的卷号恰为 1,2,3,4,5".

(2) B="第一卷和第五卷分别在两端"

解 基本事件的总数为 P_5

(1) 事件 A 包含两个基本事件，所以：

$$P(A)=\frac{2}{P_5}=\frac{1}{60}$$

(2) 事件 B 包含 $P_2 \cdot P_3$ 个基本事件：

$$P(B)=\frac{P_2 \cdot P_3}{P_5}=\frac{1}{10}$$

例 2 20 件产品中有 3 件次品，现从中随机地抽取两件，求：

(1) 其中恰有一件次品的概率？

(2) 其中至少有一件次品的概率？

解 所谓随机地抽取是指对每件产品被抽到的机会相等，避免了人为的偏好，这是概率的古典定义的要求.

从 20 件产品中抽取 2 件，基本事件总数 $n=C_{20}^2$，

(1) 设 A 为所抽取的"2 件中恰有 1 件是次品"的事件，则 A 包含的基本事件数 $m=C_3^1 \cdot C_{17}^1$，所以：

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_3^1 \cdot C_{17}^1}{C_{20}^2}=\frac{51}{190}$$

(2) 设 B 为所抽取的两件中至少有一件是次品的事件，这包括"恰有一件是次品"和"两件都是次品"两种情况，它包含的基本

事件数 $m=C_3^1\cdot C_{17}^1+C_3^2\cdot C_{17}^0$

$$P(B)=\frac{C_3^1\cdot C_{17}^1+C_3^2\cdot C_{17}^0}{C_{20}^2}=\frac{27}{95}$$

例 3 3 位密码锁的每一位都可由从 0 到 9 这 10 个数字抽取，求随机地对号 10 次能开锁的概率？

解 设事件 A 表示“对号 10 次能开锁”的事件，则 A 发生的次数 $m=10$，而每一位可取 0 到 9 的三位数的个数共有 $n=10^3$ 个. 即：

$$P(A)=\frac{10}{10^3}=\frac{1}{100}$$

§1.3 概率的基本性质与基本公式

一、概率的基本性质

由概率的定义可以推出概率具有以下性质：

1. 任何事件 A 的概率都介于 0 和 1 之间即 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$，
2. 必然事件的概率等于 1，即 $P(\Omega)=1$，
3. 不可能事件的概率等于 0，即 $P(\phi)=0$.

因为：在基本事件数为 n 的样本空间中

1. A 包含 m 个基本事件，而 $0\leqslant m\leqslant n$，有：

$$\frac{0}{n}\leqslant\frac{m}{n}\leqslant\frac{n}{n}$$

即 $$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

2. 必然事件 Ω 在每次试验中都发生，即 Ω 中包含 n 个基本事件：$P(\Omega)=\dfrac{n}{n}=1$

3. 不可能事件 ϕ 在每次试验中都不发生，即 ϕ 中包含 0 个基本事件：$P(\phi)=\dfrac{0}{n}=0$

二、概率的加法公式

1. 互不相容事件的加法公式

定理 1.1　如果事件 A 与 B 互不相容，那么它们的和事件的概率等于这两个事件的概率之和. 即：

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1.2}$$

证： 若试验中包含的基本事件总数是 n，事件 A 中包含基本事件数为 m_1，B 中包含的基本事件数为 m_2，则：

$$P(A)=\frac{m_1}{n} \qquad P(B)=\frac{m_2}{n}$$

由于 A，B 互不相容，$AB=\phi$，说明 $A+B$ 包含的基本事件数是 m_1+m_2 个，因此有：

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$$

由定理 1.1 不难证明以下三个推论：

推论 1　如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i) = \sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1.3}$$

推论 2　$P(\overline{A})=1-P(A)$　(1.4)

推论 3　若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

2. 一般加法公式

定理 1.2　设 A、B 为任意两个事件，则有：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.5}$$

证： 如图 1-7 所示

$$A+B=A+(B-AB)$$

而 A 与 $B-AB$ 互不相容，由定理 1.1 有：$P(A+B)=P(A)+P(B-AB)$.

而 $AB\subset B$，则由推论 3 有：

$$P(B-AB)=P(B)-P(AB)$$

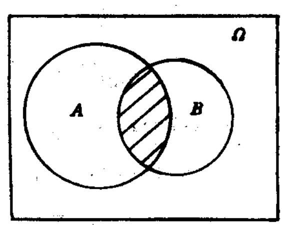

图 1.7

所以有：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

定理 1.2 可以推广到 $n(n>2)$个事件的情形. 比如：对任意事件 A、B、C，有：

$$\begin{aligned}P(A+B+C)&=P[A+(B+C)]\\&=P(A)+P(B+C)-P[A(B+C)]\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)-[P(AB)\\&\quad+P(AC)-P(AB\cdot AC)]\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)\\&\quad-P(BC)+P(ABC)\end{aligned}\tag{1.6}$$

例 1 一批灯泡 40 只，其中有 3 只是坏的. 从中任取 3 只检查，求其中至少有一只坏灯泡的概率？

解 设 A_i 表示"取到 i 只坏灯泡"，B 表示"至少有一只坏灯泡"的事件.

按照概率的古典定义有 $P(A_i)=\frac{C_3^iC_{37}^{3-i}}{C_{40}^3}(i=1,2,3)$由题意知事件 B 为 A_1、A_2、A_3 的和事件，而 A_1、A_2、A_3 又两两互不相容，所以有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1+A_2+A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\&=\frac{C_3^1C_{37}^2}{C_{40}^3}+\frac{C_3^2C_{37}^1}{C_{40}^3}+\frac{C_3^3C_{37}^0}{C_{40}^3}\\&=\frac{211}{988}\approx 0.214\end{aligned}$$

解本题还可用较简的方法：设事件 B 的对立事件为 $\overline{B}$，$\overline{B}$ 为"取到的全是好灯泡"的事件，则由上述推论 2 有：

$$\begin{aligned}P(B)&=1-P(\overline{B})\\&=1-P(A_0)\end{aligned}$$

$$=1-\frac{C_3^0C_{37}^3}{C_{40}^3}=\frac{211}{988}\approx 0.214$$

此例说明，如果一个事件 B 的概率的计算比较复杂，可以考虑通过计算它的对立事件 $\overline{B}$ 的概率来解决.

例 2 某公司在业余时间组织外语和计算机两个培训班. 该公司 40 名职工中，有 20 名参加外语班学习，16 名职工参加计算机班学习，其中同时参加两个班学习的有 8 名职工. 在该公司中任抽一名职工，问他是参加培训班学习的职工的概率是多少？

解 设 A＝“参加外语班学习”

B＝“参加计算机班学习”

$A+B$＝“参加培训班学习”

已知 $P(A)=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$ $P(AB)=\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$

则 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$$

答：任抽一名职工是参加培训班学习的职工的概率是 $\frac{7}{10}$.

三、条件概率

定义 1.1 设 A、B 为两个事件，$P(A)\neq 0$，在事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的概率称为事件 B 在给定事件 A 下的条件概率. 记作：$P(B/A)$.

实际上，随机事件都是在给定条件下发生的，条件概率只是在原有的条件上又增加了新的限制（条件）的情况下随机事件发生的概率.

例 3 袋中有 10 个球，其中有 6 个白球，4 个红球，甲乙二人先后从袋中各取一球（不放回），现研究乙取得红球的概率.

解 设 A 表示甲取得红球，$\overline{A}$ 表示甲取得白球.

$$P(A)=\frac{4}{10}\qquad P(\overline{A})=\frac{6}{10}$$