第一章　集合与简易逻辑

1.1　集合与集合的运算

知识点精讲

一、集合有关概念

1. 某些指定对象的部分或全体就成为一个集合.

集合是数学中不加定义的基本概念.

构成集合的元素除了常见的数、式、点等数学对象外，还可以是其他对象.

2. 集合元素的特征

(1)确定性：集合的元素必须是确定的，任何一个对象都能明确判断出它是否为某个集合的元素.

(2)互异性：集合中任何两个元素都是不相同的，也就是同一个元素在同一个集合中不能重复出现.

(3)无序性：集合与组成它的元素的顺序无关.

二、集合与集合的关系

1. 元素和集合之间的关系：有属于“$\in$”和不属于“$\notin$”两种.

2. 集合与集合之间的关系：

(1)包含关系

子集：如果任意 $a\in A\Rightarrow a\in B$，则集合 A 是集合 B 的子集. 记为

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A\text{，显然 } A\subseteq A,\varnothing\subseteq A.$$

(2)相等关系

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$ 同时 $B\supseteq A$，那么集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

(3)真子集关系

对于两个集合 A 与 B，若 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subset B$.

三、集合的运算

1. 交　　集

由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作

$$A\cap B\text{，即 } A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

2. 并　　集

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作

$$A\cup B\text{，即 } A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

3. 补　　集

已知全集 I，集合 A，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 I 中的

补集,记作 $\complement_I A$.

四、集合运算中常用的结论

1. 集合中的逻辑关系

(1)交集运算性质:$A\cap B=B\cap A, A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B, A\cap I=A, A\cap A=A, A\cap\varnothing=\varnothing$

(2)并集的运算性质:$A\cup B=B\cup A, A\cup B\supseteq A, A\cup B\supseteq B, A\cup I=I, A\cup A=A, A\cup\varnothing=A$

(3)补集的运算性质:$\complement_I(\complement_I A)=A$, $\complement_I\varnothing=I$, $\complement_I I=\varnothing$, $\complement_I A\cap A=\varnothing$, $A\cup\complement_I A=I$

(4)分配律、结合律:

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)$

(5)反演律(摩根法则)

$\complement_I(A\cap B)=\complement_I A\cup\complement_I B$;$\complement_I(A\cup B)=\complement_I A\cap\complement_I B$.

2. 由 n 个元素组成的集合,其子集个数为 2^n 个,非空子集个数有 2^n-1 个,真子集个数有 2^n-1 个,非空真子集个数有 2^n-2 个.

五、求解集合命题应注意事项

(1)对于集合问题,首先要确定属于哪一类集合(数集、点集、或某类图形)然后再确定处理此类问题的方法.

(2)关于集合的运算,应把各参与运算的集合化简,然后进行运算.

(3)空集是一个特殊的集合,是任何集合的子集,也是任何非空集合的真子集,在解题中应特别注意.

(4)建立数形结合解题意识.

题型归纳及思路提示

题型 1 有关集合的运算及应用

【例 1.1】 设集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$

$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$,则集合 $M\cap N$ 中的元素个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】 通常考查集合所表示的几何意义,利用集合的性质解题.

【详解】 如图 1.1,集合 M 表示以原点为圆心,以 1 为半径的圆. 集合 N 表示顶点为原点,开口向上的抛物线. 故 $M\cap N$ 为两个交点.

故选 B.

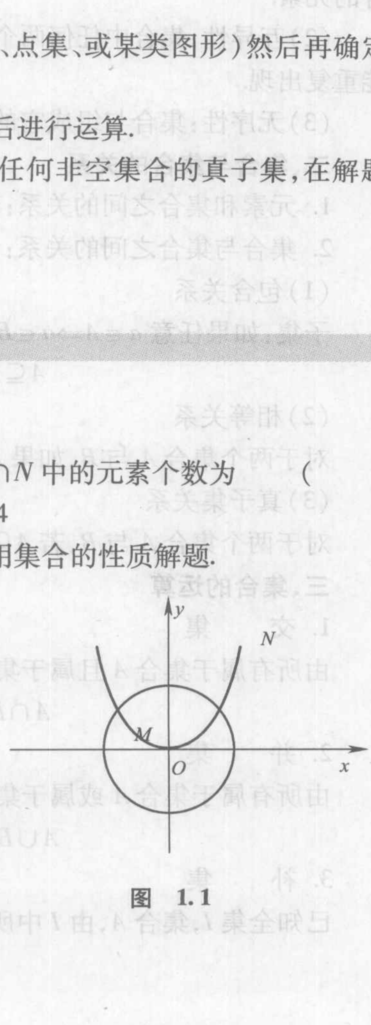


图 1.1

【评注】 凡是遇到集合问题,首先考虑的是集合表示的几何意义,是表示点还是表示数域. 如,集合 $M=\{y\mid x^2+y^2=1, x\in\mathbf{R}, y$

$\in \mathbf{R}\}$. $N=\{(x,y)\mid x^2-y=0, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$则 $M\cap N=\varnothing$.

【例 1.2】 下列 6 个关系中,正确的序号为 (　　)

① $\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$　② $\varnothing\in\{\varnothing\}$　③ $\varnothing\subsetneqq 0$　④ $0\in\varnothing$

⑤ $\varnothing\neq\{0\}$　⑥ $\varnothing\neq\{\varnothing\}$

A. ①③⑤　B. ②④⑥　C. ①②③⑤⑥　D. ①②③④⑤⑥

【分析】 根据空集的概念及集合的概念解题.

【详解】 ②$\varnothing\in\{\varnothing\}$的意义为以$\varnothing$作为元素构成的单元素集合,$\varnothing$是$\{\varnothing\}$的一个元素.因此$\varnothing\in\{\varnothing\}$正确.

①$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$的意义为$\varnothing$表示一个集合与单元素集合$\{\varnothing\}$的关系,因此也正确.

④由空集的概念可知,$0\in\varnothing$,因为 0 表示一个元素,$\varnothing$表示无任何元素,因此 $0\in\varnothing$错误.

故选 C.

【评注】 本题主要考查空集的概念.

【例 1.3】 设集合 $A=\{x\mid 2x+1<3\}$. $B=\{x\mid -3<x<2\}$则 $A\cap B$ 等于 (　　)

A. $\{x\mid -3<x<1\}$　B. $\{x\mid 1<x<2\}$　C. $\{x\mid x>-3\}$　D. $\{x\mid x<1\}$

【分析】 凡是遇到集合表示数域时,集合间的运算多用数轴解决.

【详解】 集合 A、B 在数轴上表示为

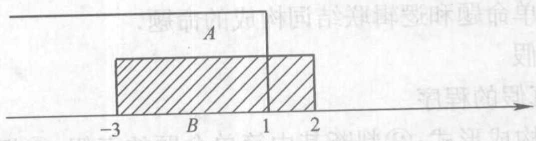


图　1.2

$A\cap B=\{x\mid -3<x<1\}$.

故选 A.

【评注】 对于集合的运算采用数形结合方法解题.

【例 1.4】 设 M、P 是两个非空集合,定义 M 与 P 的差集为 $M-P=\{x\mid x\in M 且 x\notin P\}$ 则 $M-(M-P)$等于 (　　)

A. P　B. $M\cap P$　C. $M\cup P$　D. M

【分析】 本题利用题目中所给定义,$M-P=M\cap \complement_U P$ 解题.

【详解】 根据题意作文氏图解题,如图 1.3 所示.

$$M-(M-P)=M\cap \complement_U(M\cap \complement_U P).$$

故选 B.

【评注】 利用交、并、补的概念,凡是遇到抽象的集合运算题都可利用文氏图解.

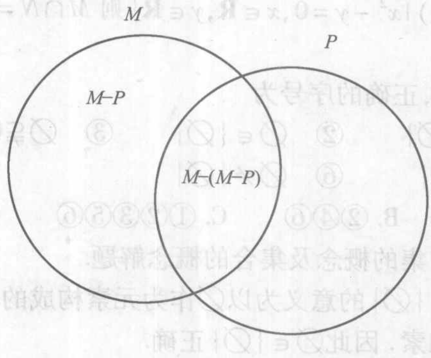


图 1.3

1.2 简易逻辑

知识点精讲

一、逻辑联结词

1. 命　　题

(1)定义:可以判断真假的语句叫命题.

(2)逻辑联结词:“或”、“且”、“非”.

(3)简单命题:不含逻辑联结词的命题.

(4)复合命题:由简单命题和逻辑联结词构成的命题.

2. 判断复合命题真假

(1)判断复合命题真假的程序

①确定复合命题的构成形式;②判断其中简单命题的真假;③根据其真值表判断复合命题的真假.

(2)利用真值表判断复合命题的真假

①先看“非 p”形式的复合命题:当 p 为真时,非 p 为假;当 p 为假时,非 p 为真.

非 p 形式复合命题的真假可以用下表表示

p	非 p
真	假
假	真

②再看“p 且 q”形式的复合命题:当 p、q 都为真时,“p 且 q”为真;当 p、q 中至少有一个为假时,“p 且 q”为假.

“p 且 q”形式复合命题的真假可以用下表表示

p	q	p 且 q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

③最后看“p 或 q”形式的复合命题：当 p、q 至少有一个为真时，“p 或 q”为真；当 p、q 都为假时，“p 或 q”为假.

p	q	p 或 q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

像上面那样表示命题真假的表叫真值表.

(3)判断一个“若 p 则 q”形式的复合命题的真假不能用真值表时，可采用下列方法：

若由 p 的逻辑推理能得到 q，则可确定“若 p 则 q”为真命题.

确定“若 p 则 q”是假命题，举出一个反例即可.

二、四种命题

1. 原命题：若 p 则 $q(p\Rightarrow q)$；

逆命题：若 q 则 $p(q\Rightarrow p)$；

否命题：若 p 则非 $q(\neg p\Rightarrow\neg q)$；

逆否命题：若非 q 则非 $p(\neg q\Rightarrow\neg p)$.

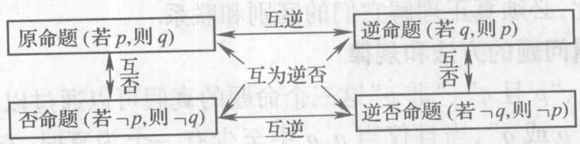
2. 四种命题的关系

(1)原命题为真，它的逆命题不一定为真；

(2)原命题为真，它的否命题不一定为真；

(3)原命题为真，它的逆否命题一定为真.

判断一个语句是否是命题的关键，是看能否判断其为真.



根据互为逆命题的两个命题的等价性，可知四种命题中实质不同的命题只有原命题和逆命题两类，另外两类只是它们的不同表示形式.

三、充分条件，必要条件，充分必要条件

1. 从逻辑推理关系上看

(1)若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\not\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充分而不必要条件；

(2)若 $q\Rightarrow p$ 但 $p\not\Rightarrow q$，则 p 是 q 的必要而不充分条件；

(3)若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件；

(4)若 $p\not\Rightarrow q$ 且 $p\not\Leftarrow q$，则 p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件.

对充要条件的理解和判断，要搞清楚其定义的实质；若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，所谓“充分”是指只要 p 成立，q 就成立. 且 q 是 p 的必要条件，所谓“必要”是指，在 p 成立的前提下得出了 q，那么 q 是 p 的必要条件.

2. 从集合与集合之间关系上看

(1)若 $A\subset B$，则 A 是 B 的充分条件；

(2)若 $A=B$,则 A 是 B 的充要条件;

(3)若 $A\not\subset B$ 且 $B\not\subset A$,则 A 既不是 B 的充分条件,也不是 B 的必要条件.

四、反证法

1. 反证法

因一个命题 p 与它的否定的真假相反,所以要证一个命题 p 为真,只要证它的否定为假即可.

2. 反证法的一般步骤

(1)假设命题的结论不成立,即假设结论的反面成立;

(2)从假设出发,经过推理论证,得出矛盾;

(3)由矛盾判定假设不成立,从而肯定命题的结论正确.

3. 可用反证法证明的一般题型

(1)结论是否定形式的命题;

(2)结论是以至多、至少、位移等形式出现的命题;

(3)结论的反面是证明比较明显或是比较易证明的命题.

五、理解简易逻辑问题应注意事项

(1)四种命题反映出命题之间的内在联系,要注意结合实际问题,理解其关系(尤其是两种等价关系)的产生过程,关于逆命题、否命题与逆否命题也可以叙述为:

①交换命题的条件和结论,所得到的命题就是原来命题的逆命题;

②同时否定命题的条件和结论,所得到的命题就是原来命题的否命题;

③交换命题的条件和结论,并且同时否定,所得到的命题就是原来命题的逆否命题.

(2)"充分条件"和"必要条件"是数学中重要的概念,它讨论"若 p 则 q"命题中条件和结论的逻辑关系,因此,必须真正理解它们的区别和联系.

六、解决简易逻辑问题的方法和规律

(1)对于"p 或 q"、"p 且 q"、"非 p"这三个命题的真假可以通过以下方法:

①对于复合命题"p 或 q",当且仅当 p、q 中至少有一个为真时,它是真命题;当且仅当 p、q 都为假时,它是假命题.

②对于"p 且 q"形式的复合命题,当且仅当 p、q 都为真时,它是真命题;当且仅当 p、q 中至少有一个是假时,它是假命题.

③对于复合命题"非 p"当且仅当 p 为真时,它是假命题;当且仅当 p 为假时,它是真命题.

(2)"否命题"与"命题的否定"是不同的概念."否命题"是对原命题既否定其条件又否定其结论的命题;而"命题的否定"是否定命题的结论,应特别注意概念上的区别.

(3)否定命题时,要注意特殊的词,如"全"、"都"、"一定"等等.

(4)不易用直接法证明的命题可尝试反证法.

(5)两个命题的充要条件是等价转换或非等价转换的基础,对这部分内容的复习要抓住基础概念.

(6)处理充分、必要条件问题时,首先要分清条件与结论,然后才能进行推理和判断.

(7)从集合的角度考察充分、必要条件,不仅为判断此类问题提供了新的解题思路,更

深化了对集合及充要条件的理解.

(8)在复习这部分内容时，紧抓课本的概念，针对各章节的概念进行练习.

题型2　简易逻辑的有关命题

【例1.5】　若P:“$x^2+(2k-1)x+k^2=0$”是“Q:两个大于1的实数”的充要条件，求命题成立的k的取值范围.

【分析】　利用充要条件的定义可知$P\Leftrightarrow Q$，根据一元二次方程根的分步解题

【详解】　充分条件是: $\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\(x_1-1)+(x_2-1)>0\\x_1\cdot x_2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\leqslant\dfrac{1}{4}\\k<-\dfrac{1}{2}\Rightarrow kc-\dfrac{1}{2}\\k\in\mathbf{R}\end{cases}$

必要条件是

$$\begin{cases}x_1+x_2>2\\(x_1-1)(x_2-1)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k<-\dfrac{1}{2}\\k>0\text{ 或 }k<-2\end{cases}\Rightarrow k<-2$$

综上所述命题成立时$k<-2$.

【评注】　本题要求是两根大于1,

$\begin{cases}x_1+x_2>2\\x_1\cdot x_2>1\end{cases}$是两根大于1的必要条件，而非充分条件. 如$x_1=1$,$x_2=2.5$,不满足$x_1>1$且$x_2>1$.

【例1.6】　条件p:“函数$f(x)=\sin\left(ax+\dfrac{\pi}{3}\right)$的周期为$\pi$”，条件$q$:“$a=2$”则$p$是$q$的　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【分析】　判断充要条件，可利用集合法.

【详解】　根据题意条件p若成立，则$a=\pm 2$，条件q成立，$a=2$

则$q\subset p$. 故p是q的必要不充分条件.

故选B.

【评注】　凡是具体代数式构成的命题均可利用集合法判断；结论是:

(1)若$p\subset q$，则p是q的充分条件；q是p的必要条件.

(2)若$p\supset q$，则p是q的必要条件；q是p的充分条件.

(3)若$p=q$，则p是q的充要条件.

精选习题一

一、单项选择题

1. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，集合 $\{1,a+b,a\}=\left\{0,\dfrac{b}{a},b\right\}$，则 $b-a=$ （　　）

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

2. $f(x)$，$g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，$h(x)=f(x)+g(x)$，则"$f(x)$，$g(x)$ 均为偶函数"是"$h(x)$ 为偶函数"的 （　　）

A. 充要条件　　B. 充分而不必要的条件

C. 必要而不充分的条件　　D. 既不充分也不必要的条件

3. 已知 m,n 是两条直线，α,β 是两个平面，则下列命题正确的是 （　　）

A. 若 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$\alpha/\!/\beta$，则 $m/\!/n$　　B. 若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $m\perp n$

C. 若 $m\subset\alpha$，$n\perp\beta$，$m/\!/n$，$\alpha\perp\beta$，则 $n/\!/\alpha$　　D. 若 $m\subset\alpha$，$n\perp\beta$，$\alpha/\!/\beta$，则 $m\perp n$

4. 命题 p：函数 $y=\log_a(ax+2a)$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图象必过定点 $(-1,1)$；命题 q：如果函数 $y=f(x)$ 的图象关于 $(3,0)$ 对称，那么函数 $y=f(x-3)$ 的图象关于原点对称，则有 （　　）

A. "p 且 q"为真　　B. "p 或 q"为假　　C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

5. 已知 $p:(x-1)(y+1)=0$，$q:(x-1)^2+(y+1)^2=0$，$(x,y\in\mathbf{R})$，则 p 是 q 成立的 （　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

二、填 空 题

1. 满足 $\{0,1,2\}\not\subseteq A\subseteq\{0,1,2,3,4,5\}$ 和集合 A 的个数是______个.

2. 定义集合 $A*B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$，若 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{2,3,5\}$，则 $A*B$ 的子集个数为______.

3. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，集合 $B=\{-1,2\}$，设映射 $f:A\to B$，如果集合 B 中的元素都是 A 中元素的 f 下的象，那么这样的映射 f 有______个.

4. 已知集合 $I=\{1,2,3,4\}$，$A=\{1\}$，$B=\{2,4\}$，则 $A\cup(\complement_I B)=$______.

三、解 答 题

1. 关于实数 x 的不等式 $\left|x-\dfrac{1}{2}(a+1)^2\right|\leqslant\dfrac{1}{2}(a-1)^2$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0$ 的解集依次为 A 与 B，求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

2. 已知命题 $p:\lg(x^2-2x-2)\geqslant0$，命题 $q:|2-x|<2$，若"p 或 q"为真命题，"p 且 q"为假命题，求实数 x 的取值范围.

3. 已知命题 p：x_1 和 x_2 是方程 $x^2-mx-2=0$ 的两个实根，不等式 $a^2-5a-3\geqslant|x_1-x_2|$，对任意实数 $m\in[-1,1]$ 恒成立；命题 q：只有一个实数 x 满足不等式 $x^2+2\sqrt{2}ax+11a\leqslant0$，若命题 p 是假命题，命题 q 是真命题，求 a 的取值范围.

4. 设集合 $A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$，$B=\{1,5a-5,-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{3}{2}a+4,a^3+a^2+3a+$

7}，问是否存在 $a\in\mathbf{R}$，使 $A\cap B=\{2,5\}$？若存在实数 a，求出实数 a 的取值，若不存在，请说明理由．

5. 设 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$，若 $A\cap B=B$，求实数 a 的值．

6. 已知 $M=\{2,a,b\}$，$N=\{2a,2,b^2\}$ 且 $M=N$，求 a、b 的值．

7. 已知 $A=\{x\mid |x-1|<b,b>0\}$，$B=\{x\mid |x-3|>4\}$，且 $A\cap B=\varnothing$，求 b 的取值范围．

8. 在直角坐标系中，求点$\left(2x+3-x^2,\dfrac{2x-3}{2-x}\right)$在第四象限的充要条件．

9. 指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件（在"充分而不必要条件""必要而不充分条件""充要条件""既不充分也不必要条件"中选出一种）？

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，$p:A>B$　$q:BC>AC$；

(2) $p:a=3$，$q:(a+2)(a-3)=0$；

(3) $p:a>2$，$q:a>5$；

(4) $p:a<b$，$q:\dfrac{a}{b}<1$．

10. 若 $\dfrac{1}{p}x^2+qx+p>0$ 的解集是 $\{x\mid 2<x<4\}$，求实数 p、q 的值．

精选习题一参考答案

一、单项选择题

1. C；思路提示：利用集合相等，其中元素相同，分析后可得 $a+b=0$，$\dfrac{b}{a}=-1$，$b=1\Rightarrow a=-1$．

2. B；思路提示：$f(x)=x^2-2x$，$g(x)=2x$；$f(x)$ 是非奇非偶函数，$g(x)$ 是奇函数．

3. D；思路提示：利用直线和平面的位置关系．

4. C；思路提示：第一个命题将点代入函数方程；第二个命题利用图形的性质．

5. B；思路提示：p 命题为 $x=1$ 或 $y=-1$；而 q 命题可直接得 $x=1$，$y=-1$．

二、填 空 题

1. 7.　2. 4.　3. 14.　4. $\{1\}$.

三、解 答 题

1. 由 $\left|x-\dfrac{1}{2}(a+1)^2\right|\leqslant\dfrac{1}{2}(a-1)^2$ 得

$$-\frac{1}{2}(a-1)^2\leqslant x-\frac{1}{2}(a+1)^2\leqslant\frac{1}{2}(a-1)^2$$

$\therefore A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$．

由 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ 得

$(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$．

当 $3a+1\geqslant 2$ 即 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$ 时得 $B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$

当 $3a+1<2$ 即 $a<\frac{1}{3}$ 时得 $B=\{x|3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$.

综上所述：当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时若 $A\subseteq B$ 则

$$\begin{cases}2\leqslant 2a,\\ a^2+1\leqslant 3a+1,\end{cases}$$

解得 $1\leqslant a\leqslant 3$.

当 $a<\frac{1}{3}$ 时若 $A\subseteq B$ 则

$3a+1\leqslant 2a\leqslant a^2+1\leqslant 2$,

解得 $a=-1$.

a 的范围是 $\{a|1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1\}$.

2. 命题 p 为真命题时，$x^2-2x-2\geqslant 1\Rightarrow x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3$

命题 q 为真命题时，$|x-2|<2\Rightarrow 0<x<4$

依题意可知 p、q 两命题为一真一假，

若 p 真 q 假，则得 $\begin{cases}x\leqslant -1\text{ 或 }x\geqslant 3\\ x\leqslant 0\text{ 或 }x\geqslant 4\end{cases}\Rightarrow x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 4$

若 p 假 q 真，则得 $\begin{cases}-1<x<3\\ 0<x<4\end{cases}\Rightarrow 0<x<3$

综上可得，x 的取值范围是 $x\leqslant -1$ 或 $0<x<3$ 或 $x\geqslant 4$.

3. (1) p：x_1 和 x_2 是 $x^2-mx-2=0$ 的两根，

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1\cdot x_2=-2\end{cases}\Rightarrow |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{m^2+8}$.

又 $m\in[-1,1]$，则有 $|x_1-x_2|\in[2\sqrt{2},3]$。因为不等式 $a^2-5a-3\geqslant|x_1-x_2|$，对任意实数 $m\in[-1,1]$ 恒成立，所以 $a^2-5a-3\geqslant|x_1-x_2|_{\max}=3$，

所以 $a^2-5a-3\geqslant 3\Rightarrow a\in(-\infty,-1]\cup[6,+\infty)$，

q：由题意有 $\Delta=(-2\sqrt{2}a)^2-4\times 11a=0\Rightarrow a=0$ 或 $a=\frac{11}{2}$.

由命题"p 或 q"是假命题，命题"p 且 q"是假命题，有 p 假 q 假，所以 $a\in\left\{\frac{11}{2}\right\}$.

4. 因为 $A\cap B=\{2,5\}$，所以 $a^3-2a^2-a+7=5$

变形得：$(a^2-1)(a-2)=0\therefore a=2$ 或 $a=\pm 1$

当 $a=2$ 时，B 中元素有重复，故 $a=2$ 不合题意；

当 $a=1$ 时，$A\cap B=\{5\}$，$a=1$ 不符合题意；

当 $a=-1$ 时，$A\cap B=\{2,4\}$，故 $a=-1$ 不符合题意.

综上，不存在实数 a，使得 $A\cap B=\{2,5\}$.

5. 由 $x^2+4x=0$ 得，$x_1=0,x_2=-4$ $\therefore A=\{0,-4\}$，

$\because A\cap B=B,\therefore B\subseteq A$.

若 $0\in B$，则 $a^2-1=0,\therefore a=\pm 1$.

当 $a=-1$ 时,$B=\{0\}$;当 $a=1$ 时,$B=A$.

若 $-4\in B$,则 $(-4)^2+2(a+1)\cdot(-4)+a^2-1=0$,

$\therefore a=1$ 或 $a=7$.

当 $a=7$ 时,$B=\{x|x^2+2(7+1)x+7^2-1=0\}=\{-4,-12\}$

此时 $A\cap B=B$ 不成立.

若 $B=\varnothing$,则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$ 得 $a<-1$.

综上所述,$a=1$ 或 $a\leqslant-1$.

6. 根据集合的相等可知:

$$\begin{cases}a=2a\\b=b^2\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=b^2\\b=2a\end{cases}$$

解得:$\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$或$\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

再根据集合中元素的互异性,得:

$$\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=\dfrac{1}{4},\\b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

7. 由 $|x-1|<b$,得 $1-b<x<1+b$ $\quad\therefore A=\{x|1-b<x<1+b,b>0\}$

同理,$B=\{x|x>7$ 或 $x<-1\}$.

$\because A\cap B=\varnothing\quad\therefore\begin{cases}1-b\geqslant-1\\1+b\leqslant7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b\leqslant2\\b\leqslant6\end{cases}\Rightarrow b\leqslant2$,

$\therefore 0<b\leqslant2$.

8. 该点在第四象限$\begin{cases}2x+3-x^2>0\\\dfrac{2x-3}{2-x}<0\end{cases}$

$-1<x<\dfrac{3}{2}$或 $2<x<3$.

$\therefore$ 该点在第四象限的充要条件是 $-1<x<\dfrac{3}{2}$或 $2<x<3$.

9. (1)在 $\triangle ABC$ 中,$A>B\Leftrightarrow BC>AC$.

$\therefore p$ 是 q 的充要条件.

(2)$a=3\Rightarrow(a+2)(a-3)=0$,$(a+2)(a-3)=0\nRightarrow a=3$

$\therefore p$ 是 q 的充分而不必要条件.

(3)$a>2\nRightarrow a>5$,$a>5\Rightarrow a>2$,$\therefore p$ 是 q 的必要而不充分条件.

(4)$a<b\nRightarrow\dfrac{a}{b}<1$,$\dfrac{a}{b}<1\nRightarrow a<b$.

$\therefore p$ 是 q 的既不充分也不必要条件.

10. 不等式$(x-2)(x-4)<0$的解集为$\{x|2<x<4\}$.
即$x^2-6x+8<0$也就是$-x^2+6x-8>0$的解集为$\{x|2<x<4\}$.
这与题中要求的不等式$\frac{1}{p}x^2+qx+p>0$是同解且同向二次不等式,
$\therefore$ 其对应的系数成比例,且比值为正数(即二次项系数之值同号)
$\therefore \frac{\frac{1}{p}}{-1}=\frac{q}{6}=\frac{p}{-8}>0$ 解得 $p=-2\sqrt{2}, q=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

第二章　函　数

2.1　映射与函数

知识点精讲

一、映　射

1. 映射的概念

设 A、B 是两个非空集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，则这样的对应（包括集合 A、B 以及 A 到 B 的对应法则 f）叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作：$f:A\to B$

2. 象与原象

如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射，那么，A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象，a 叫做 b 的原象.

3. 一一映射

设 A、B 是两个集合，$f:A\to B$ 是 A 到 B 的映射，在这个映射下，对于集合 A 中的不同元素，在集合 B 中都有不同的象，且集合 B 中的任意一个元素都有唯一的原象，那么这个映射叫做 $f:A\to B$ 的一一映射.

二、函　数

1. 定　义

设 A、B 是两个非空数集，如果按照某个确定的对应法则 $f:A\to B$，那么从 A 到 B 的映射就叫做函数. 记作 $y=f(x)$，其中 $x\in A$，$y\in B$，原象集合 A 叫做函数的定义域，象集合 B 叫做函数的值域.

2. 构成函数的三要素

(1) 三要素是指：定义域、对应法则、值域.（可简单记作：定、对、值）；

(2) 三要素中只要有一个不同，就是不同的函数；

(3) 三要素中都相同的两个函数是同一个函数.

三、解决映射与函数问题的方法与规律

1. 映射的定义有方向性，从集合 A 到集合 B 的映射与从集合 B 到集合 A 的映射是两个不同的映射，所研究的映射是一种特殊的对应关系，一对一.

2. 判断两个函数是否是同一个函数，要看函数三要素是否具备.

题型归纳及思路提示

题型 1　函数的概念及解析式的求法

【例 2.1】　下列图 2.1 的四个图象中，是函数图象的是　　　　(　　)

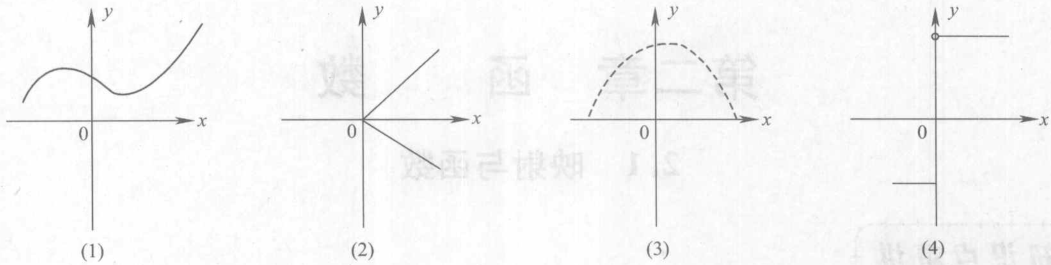


图 2.1

A. (1)　　B. (1)(3)(4)　　C. (1)(2)(3)　　D. (3)(4)

【分析】 利用函数的概念解题

【详解】 函数表示自变量 x 任取 $x \in D$. 则 y 有唯一的值与其对应,可知(1)、(3)、(4)为函数.

故选 B.

【评注】 本题也可利用作 x 轴的垂线,当垂线与图象有一个交点时,象表示函数.

【例 2.2】 若 $f: A \to B$ 能构成映射,下列说法正确的是 (　　)

①A 中任一元素在 B 中必须有象且唯一;

②B 中的多个元素可以在 A 中有相同的原象;

③B 中的元素可以在 A 中无原象;

④象的集合就是集合 B.

A. ①②　　B. ③④　　C. ①③　　D. ②③④

【分析】 本题考查映射的概念. 利用"知识点精讲"中映射概念解题.

【详解】 由概念可知.

故选 C.

【评注】 在高考中,基础概念题型每年都会出现,应注意概念的理解.

【例 2.3】 已知 $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$. 求 $f(x)$ 的表达式.

【分析】 利用本题中的复合变量 $\frac{x+1}{x}$ 凑出 $\frac{x^2+1}{x^2}$.

【详解】 配凑法:

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{x+1}{x}+1$$

即 $f(x)=x^2-x+1$. $(x \neq 1)$.

【评注】 本题也可利用换元法解题.

令 $\frac{x+1}{x}=t\,(t \neq 1)$ 到 $x=\frac{1}{t-1}$

因此 $f(t)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{t-1}\right)^2+1}{\left(\dfrac{1}{t-1}\right)^2}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{t-1}}=t^2-t+1$

故 $f(x)=x^2-x+1\quad(x\neq1)$.

【例 2.4】 已知函数 $f(x)$ 对任意的实数 x、y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2y(x+y)+1$. 且 $f(1)=1$. 若 $x\in\mathbf{N}^*$, 求 $f(x)$ 的表达式.

【分析】 本题考查抽象函数解析式,求抽象函数的解析式、单调性、奇偶性等问题. 通常采用赋值法解.

【详解】 令 $y=1$. 解得: $f(x+1)=f(x)+f(1)+2x+3$.

即 $f(x+1)=f(x)+2x+4$

当 $x\in\mathbf{N}^*$ 有 $f(2)-f(1)=2\times1+4$

$$f(3)-f(2)=2\times2+4$$

$$f(4)-f(3)=2\times3+4$$

$$\cdots$$

$$f(x)-f(x-1)=2\cdot(x-1)+4$$

将上面各式相加得 $f(x)-f(1)=x^2+3x-4$

即 $f(x)=x^2+3x-3\ (x\in\mathbf{N}^*)$.

【评注】 本题中 $f(x+1)=f(x)+2x+4$ 可根据数列思想:

$a_{n+1}-a_n=2n+4$ 叠加求和即求出 a_n.

即是本题中的 $f(x)$ 表达式. 关于数列的通项公式. 求法见本书数列 3.1 节.

题型 2　分段函数及复合函数

【例 2.5】 已知函数 $f(x)=2x-1$. $g(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant0,\\ -1 & x<0,\end{cases}$ 求 $f(g(x))$ $g(f(x))$ 的表达式.

【分析】 本题考查分段函数的概念. 根据函数对复合变量的要求解题.

【详解】 由 $g(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant0,\\ -1 & x<0,\end{cases}$ 可知

$$f(g(x))=\begin{cases}2x^2-1 & x\geqslant0,\\ -3 & x<0.\end{cases}$$

当 $f(x)\geqslant0$ 时 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$, $f(x)<0$ 时 $x<\dfrac{1}{2}$,

因此 $g(f(x))=\begin{cases}(2x-1)^2 & x\geqslant\dfrac{1}{2},\\ -1 & x<\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

【评注】 对于分段函数的题型,不论是求值还是求分段函数表达式,一定要注

意复合变量的要求.

2.2 函数的定义域、值域(最值)

知识点精讲

一、求函数定义域的主要依据

求函数定义域时,一般遵循以下原则:

(1)$f(x)$是整式时,定义域是全体实数.

(2)$f(x)$是分式函数时,定义域是使分母不为零的一切实数.

(3)$f(x)$是偶次根式时,定义域是使被开方式为非负值时的实数集合.

(4)对数函数的真数大于零;当对数或指数函数的底数中含变量时,底数须大于零且不等于1.

(5)$y=\tan x$ 中,$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$;$y=\cot x$ 中,$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

(6)$y=\arcsin x$ 中的$|x|\leqslant 1$;$y=\arccos x$ 中的$|x|\leqslant 1$.

(7)零指数幂的底数不能为零.

二、求定义域常见的形式

(1)若函数为解析式,则函数的定义域就是使解析式有意义的自变量值的集合.

(2)实际问题或几何问题,除要考虑解析式有意义外,还应使实际问题或几何问题有意义.

(3)由$f(x)$的定义域确定函数$f(g(x))$的定义域或由$f(g(x))$的定义域确定函数$f(x)$的定义域.

①熟练掌握基本初等函数(尤其是分式函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数)的定义域是求函数定义域的关键.

②对于求复合函数的定义域问题,其步骤一般是:若已知$f(x)$的定义域$[a,b]$,其复合函数$f(g(x))$的定义域应由不等式$a\leqslant g(x)\leqslant b$解出.

三、函数值域的概念

函数值域的定义

1. 函数$y=f(x)$中,由与自变量x对应的y值的全体所构成的集合称为函数的值域.

2. 求函数的值域应注意以下问题

(1)函数的值域取决于函数的定义域和对应法则;

(2)利用函数单调性求复合函数的单调性,应注意“同性即增,异性即减”(外函数是增(减),内函数是增(减),复合函数是增;外函数是增(减)内函数是减(增),复合函数是减);

(3)可以将求函数最值的问题与函数值域相互转化.

题型归纳及思路提示

题型3　函数定义域与值域

【例2.6】 已知函数$f(2^x)$的定义域是$[0,1]$求$f(2x-1)$的定义域.

【分析】 本题考查了函数定义域的概念.

【详解】 函数定义域是函数"f"有意义的x的取值范围.$f(2^x)$的定义域是$[0,1]$说明$2^x\in[1,2]$即"$f(x)$"中x要求的范围是$[1,2]$.因此$f(2x-1)$有意义时要求

$$2x-1\in[1,2]$$

$$\text{即}x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$$

$$\text{故}f(2x-1)\text{的定义域为}\left[1,\frac{3}{2}\right].$$

【评注】 例:$f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$定义域为$x\neq2$

$f(2x)=\dfrac{6x+1}{2x-2}$此时$f(2x)$定义域为$x\neq1$. 也就是$2x\neq2\Rightarrow x\neq1$.

【例2.7】 设函数$f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$,则函数$g(x)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$的定义域为________.

【分析】 函数$g(x)=h(x)+f(x)+\cdots+v(x)$的定义域.为各函数$h(x)$、$f(x)$、$\cdots$、$v(x)$的定义域的交集.

【详解】 由$f(x)$定义域为$\{x|-1<x<1\}$可知

$f\left(\dfrac{x}{2}\right)$定义域为$\left\{x\middle|-1<\dfrac{x}{2}<1\right\}$

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$定义域为$\left\{x\middle|-1<\dfrac{1}{x}<1\right\}$.

因此　$g(x)$的定义域为$\begin{cases}-1<\dfrac{x}{2}<1\\-1<\dfrac{1}{x}<1\end{cases}\Rightarrow -2<x<-1$或$1<x<2$.

故所求定义域为$(-2,-1)\cup(1,2)$.

【评注】 定义域及值域的填写必须为区域形式.

本题的错误答案为$-2<x<-1$或$1<x<2$.

【例2.8】 求函数$y=\sqrt{\log_a(x-1)}$的定义域.

【分析】 本题考查含参数的函数定义域.对参数要分类讨论.

【详解】 当$a>1$时$\begin{cases}\log_a(x-1)>0\\x-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-1>1\\x>1\end{cases}\Rightarrow x>2$.