快乐大本·优秀教材辅导
KUAILE DABEN
YOUXIUJIAOCAIFUDAO

概率论与数理统计
学习指导

主　编　杨晓东　陈孝国　李文宇

● 典型习题 精析 精解
● 同步训练 勤学 勤练

XUEXI
ZHIDAO

哈尔滨工程大学出版社

优秀教材辅导

概率论与数理统计学习指导

主　编　杨晓东　陈孝国　李文宇

副主编　张永利　刘彦慧　丛凌博

主　审　苑延华

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书根据"本科数学基础课程教学基本要求"及"全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲"编写，与课改新教材同步，为了方便教学及学生学习，本着重点突出，同步训练、循序渐进、巩固提高、举一反三、融会贯通的编写原则，精选了有代表性的例题和部分考研试题，并作了详细的分析和解答，针对学生普遍存在的疑难问题，进行了细致的解释，本书可作为高等学校工学、医学、经济类各专业学生学习概率论与数理统计的参考教材，也可作为考研的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/杨晓东，陈孝国，李文宇主编. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2008. 8
ISBN 978－7－81133－272－8

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①杨…②陈…③李… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 128650 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451－82519328
传　　真 0451－82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 肇东粮食印刷厂
开　　本 787mm×1 092mm 1/16
印　　张 10
字　　数 237 千字
版　　次 2008 年 8 月第 1 版
印　　次 2008 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 22.00 元
http://press. hrbeu. edu. cn
E-mail: heupress@hrbeu. edu. cn

前　言

《概率论与数理统计》是高等学校工学、医学、经济类各专业学生必修的基础课，是一门应用广泛的学科，也是硕士研究生入学考试的必考科目。它是近代数学的重要组成部分，是研究自然科学、工程技术及社会科学等学科的重要工具。

在教学过程中我们发现，有相当多的学生由于不适应大学“以学生自学为主”的学习方式，加上本门课程内容比较抽象，应用比较灵活，初学者难以掌握，而对学习产生畏惧感。本书力求帮助学生顺利地掌握这门课程，指导学生准确理解基本概念、原理，熟练掌握解题思路、方法，提高分析问题、解决问题的能力。为了能将平日的学习与考研有机联系，书中有针对性地选用了部分考研试题。

本书根据“本科数学基础课程教学基本要求”及“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”编写，与课改新教材同步，全书共分为10章，内容包括概率、概率分布、概率密度、随机变量函数的分布、大数定律与中心极限定理、样本的分布、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析。每章设计为导读、重点知识框图、基本公式及重点、典型例题精析、近年考研题详解、疑难解答、自测题、参考答案与提示。

本书第一、二、五章由杨晓东编写，第三、六章由李文宇编写，第四章由张永利编写，第七章由丛凌博编写，第八、九章由陈孝国编写，第十章由刘彦慧编写，全书由杨晓东统稿，苑延华主审。

本书参考了国内外的一些教材和学习辅导书，在此对其作者表示衷心感谢。

欢迎读者给我们提出宝贵意见和建议。

编　者

2008年6月

目 录

第一章　概　　率

一、导读

本章给出了概率的公理化定义，证明了概率的基本性质，并结合古典概型讨论了概率的基本算法. 灵活运用这些性质和算法是计算概率的必备条件. 另外，这些算法中也蕴含了概率论的基本思想方法，这种方法贯穿于本门课程的始终. 因此，学好第一章就相当于掌握了开启概率论这门学科的金钥匙，祝你开启成功！

第一节是概率论的预备知识，给出了随机试验、样本空间、随机事件的关系与运算的定义. 要正确理解事件之间的关系，清楚互斥与互逆之间的区别与联系.

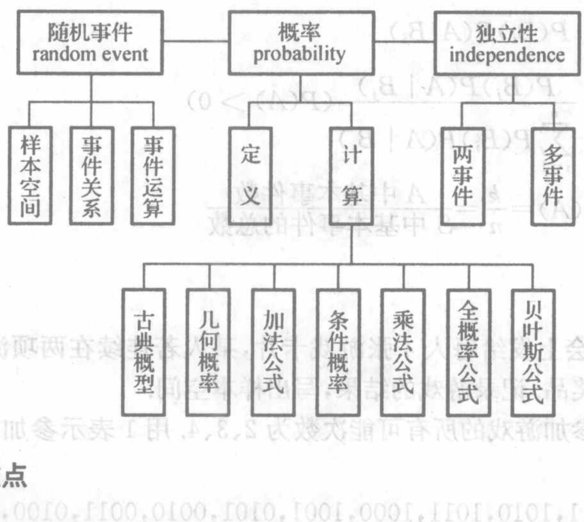
第二节给出了概率的公理化定义及计算性质.

讨论了最简单的概率模型——古典概型（等可能概型）. 古典概型以其样本空间的有限性及基本事件的等概性决定了事件 A 的概率实质上就是比值. 这里关键是要清楚是哪两个量的比.

第三节介绍了条件概率、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式等重要公式. 掌握了这些公式，可以说不仅对所有的古典概型问题所向无敌，而且对样本空间是可列无限的情况也能着手讨论了. 全概率公式实际上是将复杂事件的概率化成互不相容的简单事件之和的一种概率的算法，这恰恰是实际中人们常用的化繁为简、化整为零的解决问题方法在概率论中的应用. 当然，首先要掌握样本空间的划分方法. 另外，还要清楚 $P(AB)$ 与 $P(B|A)$ 的区别.

事件之间的独立性为计算乘积事件的概率提供了方便，要清楚多个事件中两两独立与相互独立的区别与联系. 清楚互斥、互逆、独立之间的区别与联系.

二、重点知识关系框图



三、基本公式及重点

1. 事件之间的关系与运算

(1)若 $A\subset B$，则 $\overline{A}\supset\overline{B}$，$AB=A$，$A\cup B=B$，$A-B=\varnothing$.

(2)若 $AB=\varnothing$,则 $A\subset\overline{B}$,$B\subset\overline{A}$.

(3)$A\overline{B}=A-B=A-AB$.

(4)$A\cup B=A\cup(B-A)=B\cup(A-B)=AB\cup(A-B)\cup(B-A)$.

(5)$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B}$,$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(6)A 与 B 互斥的充要条件是 $AB=\varnothing$.

(7)A 与 B 对立的充要条件是 $AB=\varnothing$,$A\cup B=S$.

(8)A 与 B 独立的充要条件是 $P(AB)=P(A)P(B)$.

(9)$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 独立的充要条件是

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

对任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$,$\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}\subset\{1,2,\cdots,n\}$成立.

2. 概率计算公式

(1)$P(A)=1-P(\overline{A})$

(2)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i\neq j}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{k-1}\sum_{i_1<i_2<\cdots<k_k}P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})+\cdots+$$
$$(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

(3)$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$

(4)$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$,$P(A)>0$

(5)$P(AB)=\begin{cases}P(A)P(A|B), & P(B)>0\\ P(A)P(B|A), & P(A)>0\\ P(A)P(B), & A\text{ 与 }B\text{ 独立}\end{cases}$

$$P(ABC)=\begin{cases}P(A)P(B|A)P(C|AB), & P(AB)>0\\ P(A)P(B)P(C) & A,B,C\text{ 相互独立}\end{cases}$$

(6)若$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=S$,$B_iB_j=\varnothing$,$i\neq j$,且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则

①$P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$

②$P(B_j|A)=\dfrac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)}(P(A)>0)$

(7)等可能概型 $P(A)=\dfrac{k}{n}=\dfrac{A\text{ 中基本事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}}$

四、典型例题精析

【例 1—1】 联欢会上发给每人 4 张游戏卡片,某人若连续在两项游戏中中奖,就用自己余下的卡片直接领取奖品.记录游戏的结果,写出样本空间.

【分析】 一个人参加游戏的所有可能次数为 2、3、4.用 1 表示参加游戏中奖,0 表示参加游戏没中奖.

【解】 $S=\{11,011,1010,1011,1000,1001,0101,0010,0011,0100,0001,0000\}$

【例 1—2】 设 $S=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$,$A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\right\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{4}\leqslant x<\dfrac{3}{2}\right\}$,求下列各事件

(1)$\overline{A}B$ (2)$\overline{A}\cup B$ (3)$\overline{AB}$ (4)$\overline{\overline{A}B}$

【分析】 本题运用事件的关系与运算.

【解】 (1)$\overline{A}B=\left\{x\left|\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right.\right\}\cup\left\{x\left|1<x<\frac{3}{2}\right.\right\}$

(2)$\overline{A}\cup B=S$

(3)$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}=\left\{x\left|0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right.\right\}\cup\left\{x\left|1<x\leqslant 2\right.\right\}$

(4)$\overline{\overline{A}B}=A\cup\overline{B}=B$

【例 1－3】 若 $P(A)=0.4,P(B)=0.3,P(A\cup B)=0.6$. 求 $P(A\overline{B})$

【分析】 利用概率的性质

【解】 $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$

$$=P(A)-[P(A)+P(B)-P(A\cup B)]$$
$$=P[A\cup B]-P(B)$$
$$=0.6-0.3=0.3$$

【例 1－4】 设随机事件 A,B 及差事件 $A-B$ 的概率分别是 0.5,0.4 和 0.3,求事件 $A\cup B$ 与 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 的概率.

【分析】 由已知 $P(A)=0.5,P(B)=0.4,P(A-B)=0.3$,可确定 A 与 B 相容.

【解法一】 由加法公式有

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

又由 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

可得 $P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.5-0.3=0.2$

所以 $P(A\cup B)=0.5+0.4-0.2=0.7$

而 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.2=0.8$

【解法二】 $P(A\cup B)=P(B\cup(A-B))=P(B)+P(A-B)=0.4+0.3=0.7$

又由 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=P(AB)+P(A-B)$

所以 $P(A\cdot B)=P(A)-P(A-B)=0.5-0.3=0.2$

因此 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.2=0.8$

【例 1－5】 从 0,1,2,…,9 十个数字中任选三个不同的数字,试求下列事件的概率:

(1)$A=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$;

(2)$B=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$.

【分析】 这是古典概型问题

【解】 (1)$P(A)=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{8\times7\times6}{10\times9\times8}=\dfrac{7}{15}$

(2)设 $B_1=\{$三个数中不含 0$\}$

$B_2=\{$三个数中不含 5$\}$

则 $B=B_1\cup B_2$

$P(B)=P(B_1\cup B_2)=1-P(\overline{B_1\cup B_2})$

$$=1-P(\overline{B}_1\overline{B}_2)=1-\frac{C_1^1C_1^1C_0^1}{C_{10}^3}$$

$$=1-\frac{8\times3!}{10\times9\times8}=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$$

或 $P(B)=P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)-P(B_1B_2)$

$$=\frac{C_9^3}{C_{10}^3}+\frac{C_9^3}{C_{10}^3}-\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{10}+\frac{7}{10}-\frac{7}{15}=\frac{14}{15}$$

【例 1－6】 从 5 双不同颜色的袜子中取 4 只，求 4 只中至少有 2 只配成一双的概率.

【分析】 基本事件总数为 C_{10}^4，在求"至少"或"至多"问题中，使用公式 $P(A)=1-P(\overline{A})$ 可使问题简化.

【解】 设 A 表示"4 只袜子中至少有 2 只配成一双"，则 $\overline{A}$ 表示"4 只袜子都不成双".

$\overline{A}$ 所包含的基本事件数为 $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$

所以 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{C_5^4\cdot 2^4}{C_{10}^4}=1-\dfrac{8}{21}=\dfrac{13}{21}$

【例 1－7】 甲乙丙丁 4 人受聘为学校运动会工作人员，已知工作人员分 3 组，假设每人被分到每个组的可能性相等，A_k 为 4 人中最多有 k 个人分在同一组. 试求(1)$P(A_k)$，$k=2,3,4$；(2)4 人都不在第 1 组的概率；(3)4 人均不在某一组的概率；(4)4 人不都在第 3 组的概率.

【解】 (1)这是典型的随机投球(无限制)模型，$n=3^4$. $k=2$ 时，可以分成(2,1,1)，(1,2,1)，(1,1,2)或(2,2,0)，(2,0,2)，(0,2,2)方式(可看成将某两人在一起视为一人)，人的分组有 C_4^2 种方式，4 人分成 3 组或 2 组，分别有 $C_4^2A_3^3$ 和 $C_4^2C_3^2$ 种方式，所以

$$P(A_2)=\frac{(C_4^2A_3^3+C_4^2C_3^2)}{3^4}=\frac{54}{81}$$

$k=3$ 时，人的分组法有 C_4^3 种，两种的排法有 A_3^2 种，故

$$P(A_3)=\frac{C_4^3A_3^2}{3^4}=\frac{24}{81}$$

$$P(A_4)=\frac{A_3^1}{3^4}=\frac{3}{81}$$

(2)4 个人都不在第 1 组，每人只有 2 种方法，在第 2 组或第 3 组，故

$$P_2=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$$

(3)由对称性

$$P_3=C_3^1P_2=\frac{48}{81}$$

(4)4 个人不"都在第 3 组"与 4 个人"都在第 3 组"互逆，所以

$$P_4=1-\frac{1}{3^4}=\frac{80}{81}$$

【例 1－8】 10 名学生入围知识竞赛决赛，其中数学、英语、历史学科的题目分别有 4 道题、6 道题、10 道题，每人随机抽取 2 道题，求：(1)3 号学生抽到英语题目的概率；(2)3 号学生抽到两道英语题目，5 号学生抽到一道英语题目和一道历史题目的概率.

【解】 这是超几何模型

(1)设 A 为"3 号学生抽到英语题目"，由于一次抽取结果"抽到英语题目"与抽取次数无关，因此可以看作 1 号学生抽到英语题目的概率. 所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{14}^2}{C_{20}^2}=0.5211$$

或分别按该生抽到一道英语题目和两道英语题目计算

$$P(A)=\frac{C_{14}^1C_6^1+C_6^2}{C_{20}^2}=0.5211$$

(2)超几何模型分三组(3号一组、5号一组及余下的一组)的情况，试验结果与抽取次数无关. 由于称性，可以看作1号学生取到两道英语题目、2号学生取到一道英语题目和一道历史题目的概率. 设 B 为所求事件，则

$$P(B)=\frac{C_6^2C_4^1C_{10}^1}{C_{20}^2C_{18}^2}=0.021$$

【例1—9】 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意拨号. (1)设 $A_k(k=1,2,\cdots,10)$ 表示他第 k 次拨通所需电话，求 $P(A_k)$；(2)已知他前两次都没拨通所需电话，求他第三次能拨通所需电话的概率.

【解】 (1)$P(A_1)=\frac{1}{10}$，应用乘法公式

$$P(A_2)=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$$

$$\begin{aligned}P(A_{10})&=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_9A_{10})\\&=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_9|\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_8)P(A_{10}|\overline{A}_1\cdots\overline{A}_9)\\&=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

(2)若他前两次都没拨通所需电话，那么他第三次只能在余下的8个数中拨号，这是在缩小的样本空间求条件概率. 显然拨通所需电话的概率为 $P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{1}{8}$.

【例1—10】 对于任意二事件 A 和 $B(P(A)>0)$，证明

$$P(B\mid A)\geqslant1-\frac{P(\overline{B})}{P(A)}$$

【分析】 由 $A\overline{B}\subset\overline{B}$，有 $P(A\overline{B})\leqslant P(\overline{B})$，再由加法公式求出 $P(AB)$.

【证明】 由 $P(A\cup B)=P(B\cup A\overline{B})=P(B)+P(A\overline{B})$ 和 $P(A\overline{B})\leqslant P(\overline{B})$，可得

$$\begin{aligned}P(B\mid A)&=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)+P(B)-P(A+B)}{P(A)}\\&=\frac{P(A)+P(B)-[P(B)+P(A\overline{B})]}{P(A)}\\&=1-\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}\geqslant1-\frac{P(\overline{B})}{P(A)}\end{aligned}$$

【例1—11】 设一人群中有37.5%的人血型为A型，20.9%为B型，33.7%为O型，7.9%为AB型，已知能允许输血的血型配对如下表，现在在人群中任选一人为输血者，再任选一人为需要输出者，问输血能成功的概率是多少？

受血者＼输血者	A型	B型	AB型	O型
A型	✓	×	×	✓
B型	×	✓	×	✓
AB型	✓	✓	✓	✓
O型	×	×	×	✓

其中✓：允许输血压计；×：不允许输血

【解】 设C表示输血能成功,B_1 表示受血者为A型;B_2 表示受血者为B型;B_3 表示受血者为AB型;B_4 表示受血者为O型.

由全概率公式

$$P(C)=P(B_1)P(C|B_1)+P(B_2)P(C|B_2)+P(B_3)P(C|B_3)+P(B_4)P(C|B_4)$$
$$=0.375\times(0.375+0.337)+0.209\times(0.209+0.337)+0.079\times1+0.337\times0.337$$
$$=0.5737$$

【例1—12】 袋中装有m只正品硬币,n只次品硬币(次品的两面均印有国徽),在袋中任取一只,将它投掷r次,已知每次都得到国徽,问这只硬币是正品的概率为多少?

【分析】 利用贝叶斯公式.

【解】 设A为"取到的硬币是正品",B为"每次都得到国徽面".

由已知 $P(B|A)=\dfrac{1}{2^r},P(A)=\dfrac{m}{n+m}$

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{m}{n+m}\frac{1}{2^r}+\frac{n}{m+n}\times1$$

所以 $P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{\dfrac{m}{n+m}\dfrac{1}{2^r}}{\dfrac{m}{n+m}\dfrac{1}{2^r}+\dfrac{n}{m+n}}=\dfrac{m}{m+2^rn}$

【例1—13】 设有5个独立工作元件1,2,3,4,5,它们的可靠性均为p,将它们按图1—1的方式连接(称为桥式系统).求这个系统的可靠性.

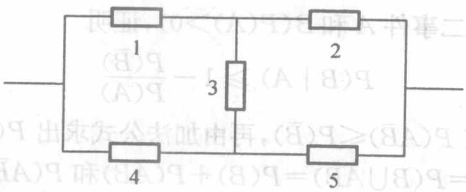


图1—1

【分析一】 分两种情况考虑.

(1)当元件3工作正常时,相当于1,4并联,与2,5并联电路再串联而得.

(2)当元件3失效时,相当于1,2串联再与4,5串联电路进行并联而得.故可用全概率公式求解.

【解法一】 设事件A_i表示为i个元件正常工作($i=1,2,3,4,5$),B表示系统正常工作.

$$P(B)=P(A_3)P(B|A_3)+P(\overline{A}_3)P(B|\overline{A}_3)$$
$$P(B|A_3)=P((A_1\cup A_4)(A_2\cup A_5))=P(A_1\cup A_4)P(A_2\cup A_5)$$
$$=[1-P(\overline{A}_1\overline{A}_4)][1-P(\overline{A}_2\overline{A}_5)]$$
$$=[1-(1-p)^2]^2=(2p-p^2)^2$$
$$P(B|\overline{A}_3)=P(A_1A_2\cup A_4A_5)=P(A_1A_2)+P(A_4A_5)-P(A_1A_2A_4A_5)$$
$$=p^2+p^2-p^4=2p^2-p^4$$

所以 $P(B)=P(2p-p^2)^2+(1-p)(2p^2-p^4)$
$$=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5$$

【分析二】 考虑各元件正常工作时所形成的系统正常工作的道路的四种情况的和事件的

概率,即为系统正常工作的概率,用加法公式和事件的独立性.

【解法二】 $P(B)=P(A_1A_2\cup A_4A_5\cup A_1A_3A_5\cup A_4A_3A_2)$

$=P(A_1A_2)+P(A_4A_5)+P(A_1A_3A_5)+P(A_4A_3A_2)$

$-P(A_1A_2A_4A_5)-P(A_1A_2A_3A_5)-P(A_1A_2A_3A_4)-P(A_1A_3A_4A_5)$

$-P(A_2A_3A_4A_5)-P(A_1A_2A_3A_4A_5)+4P(A_1A_2A_3A_4A_5)-P(A_1A_2A_3A_4A_5)$

$=2p^2+2p^3-(5p^4+p^5)+4p^5-p^5$

$=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5$

【例 1-14】 任取一整数 N,试求下列事件的概率:

(1)N^2 的尾数为 1;

(2)N^4 的尾数为 1;

(3)乘任意正整数后,其尾数为 1.

【解】 (1)设 $H_1=\{$取到一个正整数$\}$,$H_2=\{$取到一个负整数$\}$,$A=\{$取到一个平方的尾数为 1 的整数$\}$.

则 H_1 与 H_2 互斥且 $A\subset H_1\cup H_2$.因此

$$P(A)=P(H_1)P(A\mid H_1)+P(H_2)P(A\mid H_2)$$

易知

$$P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$$

任取一个整数,尾数可能为 0,1,…. 9.

令 $N=a+10b$,其中 a,b 均为整数,且 $0\leqslant a\leqslant 9,0\leqslant b,a+b\neq 0$,则

$$N^2=(a+10b)^2=a^2+20ab+100b^2$$

故 N^2 的尾数为 1 的充要条件是 N 的尾数 $a=1,9$.

由此可知 $P(A|H_1)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$,同理 $P(A|H_2)=\frac{1}{5}$

因此 $P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$

(2)设 $B=\{$取到一个四次方的尾数为 1 的整数$\}$,则 $B\subset H_1\cup H_2$,故

$$P(B)=P(H_1)P(B\mid H_1)+P(H_2)P(B\mid H_2)$$

令 $N=a+10b$,其中 a,b 均为整数,且 $0\leqslant a\leqslant 9,0\leqslant b,a+b\neq 0$,则

$$N^4=(a+10b)^4=a^4+40a^3b+600a^2b^2+40000ab^3+10000b^4$$

故 N^4 的尾数为 1 的充要条件是 N 的尾数 $a=1,3,7,9$,由此可知

$$P(B\mid H_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

同理 $P(B|H_2)=\frac{2}{5}$

因此 $P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$

(3)设 $C=\{$取到一个乘任意正整数后,尾数为 1 的整数$\}$.

显然 $P(C)=P(\varnothing)=0$

五、近年考研题详解

1.(2000·Ⅰ)设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为$\frac{1}{9}$,A 发生 B 不发生的概

率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$______.

【解】 由题设，有 $P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{9}$，$P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$

因为 A、B 相互独立，所以 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立. 于是有

$$P(A)P(\bar{B})=P(\bar{A})P(B)$$

即 $P(A)[1-P(B)]=[1-P(A)]P(B)$

可得 $P(A)=P(B)$

从而 $P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=[1-P(A)]^2=\frac{1}{9}$

解得 $P(A)=\frac{2}{3}$

【评注】 不能由 A 与 B 相互独立推导出 A 与 B 互不相容.

2.（1994・Ⅰ）已知 A、B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$______.

【解】 由 $P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$

及 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，

有 $P(B)=1-P(A)=1-p$

【评注】 A，B 常用公式：$A=AB+A\bar{B}$

从而 $P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$

3.（1997・Ⅰ）袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球，今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是______.

【解】 设 $A=\{$第一个人取出的为黄球$\}$，$B=\{$第一个人取出的为白球$\}$，$C=\{$第二个人取出的为黄球$\}$.

则 $P(A)=\frac{2}{5}$，$P(B)=\frac{3}{5}$，$P(C|A)=\frac{19}{49}$，$P(C|B)=\frac{20}{49}$

由全概率公式知：

$$P(C)=P(A)\cdot P(C\mid A)+P(B)\cdot P(C\mid B)=\frac{2}{5}\times\frac{19}{49}+\frac{3}{5}\times\frac{20}{49}=\frac{2}{5}$$

【评注】 抽签不分先后.

4.（1998・Ⅰ）设 A、B 是两个随机事件，且 $0<P(A|<1,P(B)>0)$，$P(B|A)=P(B|\bar{A})$，则必有（　　）

(A)$P(A|B)=P(\bar{A}|B)$　　(B)$P(A|B)\neq P(\bar{A}|B)$

(C)$P(AB)=P(A)P(B)$　　(D)$P(AB)\neq P(A)P(B)$

【解】 因为 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$，$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}$

于是有 $P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(\bar{A}B)=P(A)[P(B)-P(AB)]$

所以 $P(AB)=P(A)P(B)$　故选(C)

【评注】 由 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$，可知 A 与 B 相互独立.

5.（2006・Ⅰ，Ⅳ）设 A，B 为随机事件，且 $P(B)>0$，$P(A|B)=1$，则必有（　　）

(A)$P(A\cup B)>P(A)$　　(B)$P(A\cup B)>P(B)$

(C)$P(A\cup B)=P(A)$　　(D)$P(A\cup B)=P(B)$

【解】 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$,而 $P(A|B)=1$,故 $P(AB)=P(B)$.

所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)$

故选(C).

6.(2001·Ⅳ)对于任意二事件 A 和 B,与 $A\cup B=B$ 不等价的是(　　)

(A)$A\subset B$　　(B)$\bar{B}\subset\bar{A}$

(C)$A\bar{B}=\varnothing$　　(D)$\bar{A}B=\varnothing$

【解】 由于 $A\cup B=B\Leftrightarrow\bar{B}\subset\bar{A}\Leftrightarrow A\bar{B}=\varnothing$

故应选(D).

7.(2000·Ⅳ)设 A,B,C 三个事件两两独立,则 A,B,C 相互独立的充分必要条件是(　　)

(A)A 与 BC 独立　　(B)AB 与 $A\cup C$ 独立

(C)AB 与 AC 独立　　(D)$A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

【解】 因为 A,B,C 两两独立,所以 $P(AB)=P(A)P(B)$,$P(BC)=P(B)P(C)$,$P(CA)=P(C)P(A)$,于是 A,B,C 相互独立$\Leftrightarrow P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(A)P(BC)\Leftrightarrow A$ 与 BC 独立.

故应选(A).

8.(1990·Ⅳ,Ⅴ)从 0,1,2,…,9 等十个数字中任意选出三个不同的数字,试求下列事件的概率:

$A_1=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$;

$A_2=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$;

$A_3=\{$三个数字中含 0 但不含 5$\}$.

【解】 $P(A_1)=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$

$P(A_2)=\dfrac{2C_9^3-C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{14}{15}$

$P(A_3)=\dfrac{C_9^2-C_8^1}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{30}$或 $P(A_3)=\dfrac{C_8^2}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{30}$

9.(1998·Ⅲ)设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表,其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份.随机地取一个地区的报名表,从中先后抽出两份.

(1)求先抽到的一份是女生表的概率 p.

(2)已知后抽到的一份是男生表,求先抽到的一份是女生表的概率 q.

【解】 设 $H_i=\{$报名表是第 i 区考生的$\}$,$(i=1,2,3)$

$A_j=\{$第 j 次抽到的报名表是男生表$\}$,$(j=1,2)$

则 $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\dfrac{1}{3}$

$P(A_1|H_1)=\dfrac{7}{10}$,$P(A_1|H_2)=\dfrac{8}{15}$,$P(A_1|H_3)=\dfrac{20}{25}$.

由全概率公式得:

(1)$p=P(\bar{A}_1)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(H_i)P(\bar{A}_1|H_i)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{15}+\dfrac{5}{25}\right)=\dfrac{29}{90}$

(2)$P(A_2|H_1)=\dfrac{7}{10}, P(A_2|H_2)=\dfrac{8}{15}, P(A_2|H_3)=\dfrac{20}{25}$

$P(\overline{A}_1A_2|H_1)=\dfrac{7}{30}, P(\overline{A}_1A_2|H_2)=\dfrac{8}{30}, P(\overline{A}_1A_2|H_3)=\dfrac{5}{30}$

$P(A_2)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(H_i)P(A_2|H_i)=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{7}{10}+\dfrac{8}{15}+\dfrac{20}{25}\right]=\dfrac{61}{90}$

$P(\overline{A}_1A_2)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A}_1A_2|H_i)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{7}{30}+\dfrac{8}{30}+\dfrac{5}{30}\right)=\dfrac{2}{9}$

因此 $q=P(\overline{A}_1|A_2)=\dfrac{P(\overline{A}_1A_2)}{P(A_2)}=\dfrac{2}{9}\Big/\dfrac{61}{90}=\dfrac{20}{61}$

10. (2002・Ⅳ)设 A,B 是任意二事件，其中 A 的概率不等于 0 和 1，证明 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充分必要条件.

【证】 由于 A 的概率不等于 0 和 1，可知题中的两个条件概率都存在.

必要性，由 A 与 B 独立，知 $\overline{A}$ 与 B 也独立，因此

$$P(B\mid A)=P(B), P(B\mid \overline{A})=P(B)$$

从而 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$

充分性，由 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$，有

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

即 $P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(B)-P(A)P(AB)$

于是 $P(AB)-P(AB)P(A)=P(A)P(B)-P(A)P(AB)$

因此 $P(AB)=P(A)P(B)$

故 A 和 B 独立.

六、疑难解答

1. 如何通过已知事件表达其他事件？

答　设 A、B、C 为已知事件，则

(1)“A 发生而 B 与 C 都不发生”可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$，或 $A-(B\cup C)$.

(2)“A 与 B 都发生而 C 不发生”可表示为 $AB\overline{C}$，或 $AB-C$，或 $AB-ABC$.

(3)“A、B、C 三事件都发生”可表示为 ABC.

(4)“A、B、C 三事件都不发生”可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$，或$(\overline{A\cup B\cup C})$.

(5)“A、B、C 三事件至少有一发生”可表为 $A\cup B\cup C$，或 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup ABC$.

(6)“A、B、C 中至少有两个发生”可表为 $AB\cup BC\cup AC$，或 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$.

(7)“A、B、C 中不多于一个发生”表为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$ 或$\overline{AB\cup BC\cup AC}$.

(8)“A、B、C 中不多于两个发生”表为$\overline{ABC}$或 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$.

(9)“A、B、C 中恰好有一个发生”表为：$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

(10)“A、B、C 中恰发有两个发生”可表为：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$，或 $AB\cup BC\cup AC-ABC$.

2. 在实际应用中，如何判断两事件的独立性？

答　在实际应用中，对于事件的独立性，我们常常不是用定义来判断，而是由试验方式来判断试验的独立性，由试验的独立性来判断事件的独立性. 或者说根据问题的实质，直观上看