国家科学技术学术著作出版基金
NFAPST

带自相容源的孤立子方程

王红艳 胡星标 著

清华大学出版社
http://www.tup.com.cn

国家科学技术学术著作出版基金资助

王红艳 胡星标 著

带自相容源的孤立子方程

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍如何运用一种新颖的方法——源生成方法，来研究带自相容源的孤立子方程(以下简称孤子方程). 本书首先介绍了带自相容源的孤子方程发展的背景以及最新进展，并对已有的研究方法做了扼要的介绍；进而详细地论述了作者提出的一种以 Hirota 双线性方法为基础的代数方法——源生成方法，阐述了怎样利用这种新方法来构造和求解带自相容源的孤子方程；研究了不同类型的带自相容源的孤子方程，像带自相容源的 BKP 类型孤子方程、混合型带自相容源的孤子方程的 Bäcklund 变换等可积性质.

本书可供高等院校和科研机构的数学、物理、力学、光学等专业高年级大学生、研究生和教师阅读，也可供非线性科学、理论物理、数学物理和工程等专业的科技人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

带自相容源的孤立子方程/王红艳，胡星标著. —北京：清华大学出版社，2008. 2
ISBN 978-7-302-16742-6

Ⅰ. 带…　Ⅱ. ①王…　②胡…　Ⅲ. 孤立子　Ⅳ. O175. 24　O411

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 001884 号

责任编辑：佟丽霞　王海燕
责任校对：赵丽敏
责任印制：杨　艳
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　　**客户服务**：010-62776969
印 刷 者：清华大学印刷厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170×230　**印　张**：9. 25　**字　数**：166 千字
版　次：2008 年 2 月第 1 版　　**印　次**：2008 年 2 月第1 次印刷
印　数：1～2000
定　价：28. 00 元

前　言

从孤子的发现, 到孤子理论的产生, 直至现在孤子理论的逐步完善和成熟, 已经经历了一百多年, 孤子理论也成为应用数学和数学物理的一个重要组成部分. 作为孤子理论中的一个分支, 带自相容源的孤子方程的历史还很短. 20 世纪 80 年代, 前苏联著名学者 V. K. Mel'nikov 提出了一类新的可积模型, 用来描述不同的孤立波之间的相互作用, 并称之为带自相容源的孤子方程. 这一类孤子方程有着广泛的物理应用背景, 在流体力学、固体物理、等离子物理等方面都有着重要的应用, 近年来已引起越来越多国内外学者的研究兴趣.

国内外关于孤子理论的书籍已出现很多, 其中更不乏优秀之作, 可谓是百花齐放, 但是关于带自相容源的孤子方程, 无论是基础普及书籍还是学术专著, 作者还未曾见到. 本书从带自相容源的孤子方程的发展历史出发, 以时间为主线, 详述其研究方法的发展以及最新动态. 书中叙述了孤子理论中的一些经典研究方法, 例如反散射方法、Darboux 变换法, 以及一些直接方法等在研究带自相容源的孤子方程过程当中的发展和改进. 本书的主要目的是介绍作者最近在 Hirota 双线性理论框架下, 提出的一种新的方法 —— 源生成方法, 并讲述如何用这一新方法来研究带自相容源的孤子方程.

本书内容共分 7 章. 第 1 章绪论, 主要介绍带自相容源的孤子方程的历史和发展现状, 并对我们提出的新的研究方法 —— 源生成方法作详细叙述. 第 2 章简单介绍 Hirota 双线性方法以及 Pfaff 式的概念及性质.

第 3 章比较详细地介绍如何利用源生成方法来构造和求解带自相容源的 AKP 类型的孤子方程, 包括带自相容源的 KP 方程、带自相容源的二维 Toda 格方程、半离散 Toda 格方程、Leznov 格方程, 以及带自相容源的全离散的 KP 方程. 另外, 我们还以带自相容源的 KP 方程为例, 给出了带自相容源 KP 方程的双线性 Bäcklund 变换; 从带 K 对自相容源的 KP 方程的 N-孤子解出发, 通过这组 Bäcklund 变换公式, 既能得到带 K 对自相容源的 KP 方程另外一组 N-孤子解, 又能得到它的 $(N+1)$-孤子解.

第 4 章主要利用源生成方法来研究带自相容源的 BKP 类型的孤子方程, 其中包括带自相容源的连续和离散情形的孤子方程. BKP 类型的孤子方程具有 Pfaff 式解, 而不具有行列式解. 这一章旨在说明源生成方法对于构造和求解带自相容源的 BKP 类型的孤子方程同样有效.

第 5 章的主要内容是把源生成方法应用到一些比较特殊的孤子方程, 包括 (2+1) 维的 Sasa-Satsuma 方程, q-离散的二维 Toda 格方程, 以及 Nizhnik-Veselov-Novikov(NVN) 方程.

第 6 章从数学结构上对源生成方法做进一步研究. 这一章将讨论源生成方法分别与 Pfaff 化方法、Bäcklund 变换的可交换性. 利用源生成方法与 Pfaff 化方法的可交换性, 可以给出 Pfaff 化的带自相容源的 KP 方程, 这个新的耦合系统既能约化为带自相容源的 KP 方程, 又能约化为 Pfaff 化的 KP 方程. 另外, 本章还以一个 BKP 类型的孤子方程为例, 证明带自相容源的变形的孤子方程也是带自相容源的孤子方程的一组双线性 Bäcklund 变换, 由此说明源生成方法与 Bäcklund 变换的可交换性.

第 7 章研究几类新型的带自相容源的孤子方程. 首先利用源生成方法给出了第一种新型的带自相容源的 KP 方程, 这一类型方程的精确解里含有自变量 y 的任意函数. 而对于普通的带自相容源 KP 方程, 它的精确解却包含关于时间变量 t 的任意函数. 本章的另一内容就是提出了另一新类型的带自相容源的孤子方程, 我们称之为混合型的带自相容源的孤子方程, 包括混合型的二维 Toda 格方程, 以及混合型的带自相容源的 KP 方程. 这种混合型的带自相容源孤子方程既可以约化为原来的孤子方程, 又可以约化为两种比较简单的带自相容源的孤子方程.

本书是以第一作者的博士论文为基础, 修改补充而成. 在此, 谨向论文评阅人曹策问教授、李翊神教授、曾云波教授、张友金教授、刘青平教授表示深深的谢意, 感谢他们提出的重要而有价值的意见和建议. 同时, 衷心地感谢郭柏灵院士、吴可教授、刘张炬教授、楼森岳教授、马文秀教授、耿献国教授、李梦如教授、杨建科教授所给予的鼓励、支持、讨论和帮助. 也感谢葛根哈斯博士、谭汉华博士, 感谢他们在带自相容源孤子方程研究中的讨论和合作. 本书的相关研究成果得到了国家自然科学基金 (项目编号 10471139 和 10771207) 的资助. 由于作者水平有限, 书中难免出现纰漏和错误, 恳请读者批评指正.

王红艳　胡星标

2007 年 8 月

目　　录

第 1 章　绪　　论

1.1　孤子理论的产生和发展

在自然科学发展的历史上, 交叉学科领域总能给人意想不到的惊喜. 非线性科学当中的孤子理论就是其中的一支, 它把应用数学与数学物理完美地结合在一起. 孤子是最早在自然界观察到, 并且可以在实验室产生的非线性现象之一. 孤子也称为孤立波, 它是指一大类非线性偏微分方程的具有特殊性质的解. 而具有这种孤子解的非线性偏微分方程就称为孤子方程. 从数学的观点来看, 这类特殊解一般具有以下两种性质:

(1) 能量有限, 且分布在有限的空间范围内;

(2) 弹性碰撞, 即在碰撞后恢复到原来的波形和速度.

孤子现象最早于 1834 年被苏格兰一位造船工程师 J. S. Russell 发现[1], 之后, 科学家 G. B. Airy, G. Stokes, J. Boussinesq 以及 L. Rayleigh 等都对此现象做了大量的实验和研究, 而对孤子理论的产生有重要推动作用的是 D.J. Korteweg 和 G. de Vries. 他们于 1895 年提出了一种浅水波方程[2], 也就是著名的 KdV 方程, 并找到了其孤立波解, 至此确定了孤立波的存在性. 而孤子理论中里程碑式的进展, 在于 1965 年美国应用数学家 M. D. Kruskal 和 Bell 实验室的 N. J. Zabusky 所做的数值实验[3]. 他们用数值模拟方法详细地考察和分析了等离子体中孤立波的非线性相互作用过程, 证明了两个 KdV 孤立波在发生碰撞之后, 各自保持原来的波形和速度继续向前传播. 他们的工作揭示了这种孤立波的本质, "孤子"概念也就此确立. 在此之后, 孤子概念逐渐应用到固体物理、等离子物理、光纤通信、生物以及地球物理等领域[4~6].

随着具有孤子的非线性方程在一些应用物理等实际问题中的出现, 人们对孤子的关注也日益密切. 研究发现, 一些孤子方程不仅具有广泛的应用背景, 而且也与一些数学分支有着紧密的联系. 像 KdV 方程, 场论中的自对偶的 Yang-Mills 方程等, 已证明可以找到它们的一列无限多个相互对合的首次积分. 而且大多数孤子方程, 尽管背景不相同, 却都被证明是 Liouville 可积的. 在非线性理论中, 还存在其他意义下的可积性, 像反散射可积、对称可积、Painlevé可积、C 可积、Lax 可积等, 这些可积性之间并非独立, 而是相互联系的. 另外, 孤子方程与 Kac-Moody 代数、微分几何、代数几何、动力系统、Sato 理论等都有着内在

深刻的联系, 也会产生许多美妙的代数与几何性质[7~9]. 可见, 孤子方程不仅是物理领域的一个重要发现, 它也对一些数学方法的发展有着重要的推动作用.

在孤子理论中, 怎样有效地求出一类非线性方程的精确解并研究其解的性质, 一直是一个重要而又基本的课题. 1967 年, C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal 和 R. M. Miura (简称 GGKM)用 Schrödinger 方程的反散射理论求解 KdV 方程的初值问题[11], 他们为求解孤子方程提供了一套系统的解析方法. 这种所谓的 "反散射方法" [12, 13]无疑是数学物理方法上的一个重大发现, 也对数学自身的发展有着深远的影响. 正如 S. P. Novikov 所说[10]:"……数学和物理学中的数学方法的大部分最重要的发现是在可积模型理论的发展过程中得到的 ……". 之后, 随着研究者们对孤子领域不断关注和深入研究, 求解孤子方程的方法也变得多种多样起来, 其中主要包括 Bäcklund 变换法[14~16]、Darboux 变换法[8, 17]、Hirota 双线性方法[40, 43]、τ-函数方法[37~39]、摄动法[34~36]、穿衣服方法[41, 42] 等. 与此同时, 我国的研究学者们也做了非常重要的工作. 曹策问教授提出的非线性化方法[18~23], 李翊神教授、程艺教授等人发展的对称约束法[24~26], 楼森岳教授, 屈长征教授等人发展和推广的分离变量法(包括形式分离变量法, 泛函分离变量法等)[27~33] 等, 这些均为研究孤子系统提供了行之有效的系统方法, 并且得到了广泛的应用.

上述方法中, Hirota 双线性方法是求解非线性方程的一种代数方法. 1971 年, R. Hirota 提出了一种全新的方法[43] 来求解 KdV 方程, 并给出了其多孤子解的精确表达式. 利用 Hirota 双线性方法求解非线性方程可以通过纯粹的代数手段来实现, 求解过程也变得相对简单. 这种方法主要是把非线性方程进行相关变量变换, 然后引进双线性算子将其化为双线性方程. Hirota 方法对于求解一些非线性方程的各种精确解来说是一种行之有效的方法. 像 1+1 维非线性 Schrödinger 方程、sine-Gordon 方程、mKdV 方程、浅水波方程[44~47], 以及一些高维和微分差分方程[48~56], 都可通过双线性方法来求得精确解. 利用双线性方法可以得到非线性方程的孤子解、有理解、周期解等. 值得说明的是, 根据这种双线性方法, 我们还可以通过统一的途径得到双线性方程的双线性 Bäcklund 变换. 由此不仅可以导出方程的非线性叠加公式[59~63], 得到方程的多孤子解; 还可得到非线性方程的 Lax 表示、无穷多守恒律. 从而这种纯粹的代数方法就与经典可积系统紧密地联系在一起, 进一步完善了其理论框架.

在 Hirota 双线性理论中, Pfaff 式[64~66] 这种代数工具的应用又进一步推动了双线性方法的发展. Pfaff 式与行列式联系紧密, 可以看作是行列式的一种推广, 也有很多与行列式类似的性质[40]. Pfaff 式技巧可有效地用来获得非线性方程的多孤子解. 一些孤子方程 (例如 KP 方程、二维 Toda 格方程) 的解可以用行列式来表示, 但是有些孤子方程 (例如 BKP 类型的孤子方程) 的精确解不

能用行列式表示, 却可以由行列式的推广形式 Pfaff 式表示. R. Hirota 曾给出双线性 BKP 方程族的 Pfaff 式解[66]; S. Tsujimoto 和 R. Hirota 给出了全离散 BKP 族的 Pfaff 式解[67]; Y. Ohta 曾给出 Veselov-Novikov 方程的两种不同形式的 Pfaff 式解[69]. 刘青平教授等人也从约化的角度考虑了 BKP 方程族的 Pfaff 式解[68]. 我们知道, 如果孤子方程有行列式解, 那么双线性孤子方程就可以表示成行列式恒等式[70~72]. 同样地, 具有 Pfaff 式解的双线性孤子方程也可以约化为 Pfaff 式恒等式[66~69].

1.2 带自相容源的孤子方程

随着孤子理论的发展, 如何寻找新的可积系统或耦合可积系统逐渐成为孤子研究的重要课题之一. 目前有两种人们所熟知的耦合可积系统. 1991 年 Hirota 和 Ohta 提出一种用 Pfaff 式来寻求孤子方程的耦合系统的方法, 即 Pfaff 化方法 (Pfaffianization)[73]. 目前, 此方法已经成功运用到很多具有物理意义的孤子方程, 并得到这些方程的耦合系统, 像 Davey-Stewartson 方程[75]、自对偶 Yang-Mills 方程[74]、三维三波方程[76]、两维 Toda 方程[77]、全离散 KP 方程[78]、全离散的三维三波方程[79]、全离散的 mKP 方程[80], 以及 KP 方程族等[81~84].

另外一种耦合方程就是带自相容源的孤子方程, 也是本书的主题. 1983 年, 俄罗斯数学物理学家 V. K. Mel'nikov 利用 Lax 表示给出了一类非线性发展方程[85], 这一类方程可以描述孤立波在 x-y 平面的相互作用, 这即是带自相容源的孤子方程. 从物理上讲, 带自相容源的孤子方程反映了不同孤立波之间的相互作用. 例如, 带自相容源的 KdV 方程[89, 92] 可以描述等离子体中高频波包和一个低频波的相互作用. 带自相容源的 KP 方程就描述了一个长波和一个短波包在 x-y 平面沿着某一角度传播时的相互作用[85, 97], 而且孤立波的相互作用也会产生不同的物理现象[88]. 而带自相容源的非线性 Schrödinger 方程[90] 既可描述孤立波在有可共振和不可共振介质的媒介中的传播过程, 也可描述等离子体中高频静电波与离子声波之间的相互作用[93, 95]. 这些性质在固体物理、等离子物理、流体力学等物理领域里都有广泛应用.

带自相容源孤子方程与不带源的孤子方程之间关系密切, 那么什么样的方程可以看作是带源孤子方程, 或者说是孤子方程的带源系统呢? 为方便理解, 我们给出一种带自相容源孤子方程的一般模型. 首先给出一个普通的孤子方程

$$P(u, u_x, u_y, u_t, \cdots) = 0, \tag{1.1}$$

其中 u 是一些自变量 x, y, t 等的函数, 则关于这一孤子方程的带源系统较常见

的形式可以表示为如下的耦合系统:

$$P(u, u_x, u_y, u_t, \cdots) = \sum_{j=1}^{M} F(\varphi_j, \psi_j), \tag{1.2}$$

$$L_1(u, \varphi_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, M, \tag{1.3}$$

$$L_2(u, \psi_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, M, \tag{1.4}$$

其中 φ_i, ψ_i 是自变量 x, y, t 等的函数. 一般情况下, $L_1(u, \cdot)$, $L_2(u, \cdot)$ 分别是关于 φ_i, ψ_i 的线性算子; 而且 F 以及 L_1, L_2 满足条件

$$F(0, 0) = 0, \quad L_1(u, 0) = L_2(u, 0) = 0. \tag{1.5}$$

以上系统 (1.2)~(1.4) 就称为带自相容源的孤子方程, 其中 φ_i, ψ_i 就称为自相容源, 而 M 表示自相容源的度数. 从条件 (1.5) 可以看出, 如果选取自相容源为零, 则以上耦合系统就退化为原来的孤子方程 (1.1), 因此带自相容源的孤子方程也可以看作是原孤子方程的一种耦合推广. 下面来看两个具体例子.

(1) 已知 KdV 方程

$$4u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1.6}$$

而带自相容源的 KdV 方程有以下形式:

$$\begin{cases} 4u_t + 6uu_x + u_{xxx} = -2\displaystyle\sum_{j=1}^{K} (\phi_j^2)_x, \\ \phi_{j,xx} + (\lambda_j + u)\phi_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, K. \end{cases} \tag{1.7}$$

(2) 已知 KP 方程是以下的 2+1 维非线性方程:

$$-4u_t + u_{xxx} + 6uu_x + 3\int^x u_{yy} \mathrm{d}x = 0, \tag{1.8}$$

则 KP 方程的带自相容源系统有形式

$$4u_t - u_{xxx} - 6uu_x - 3\int^x u_{yy} \mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{K} (\Phi_j \Psi_j)_x = 0, \tag{1.9}$$

$$\Phi_{j,y} = \Phi_{j,xx} + u\Phi_j, \quad j = 1, 2, \cdots, K, \tag{1.10}$$

$$-\Psi_{j,y} = \Psi_{j,xx} + u\Psi_j, \quad j = 1, 2, \cdots, K. \tag{1.11}$$

1.3　带自相容源的孤子方程的发展

自 20 世纪 80 年代起, 人们对带自相容源的孤子方程的研究越来越关注. 如何构造带自相容源的孤子方程并对其求解也已成为研究者们关心的一个问题.

V.K. Mel'nikov, J. Leon, A. Latifi, E.V. Doktorov, C. Claude, V.S. Shchesnovich, V.E. Zakharov 和曾云波等学者在这些方面做了许多出色的工作. 构造带自相容源的孤子方程已存在几种不同的方法. V. K. Mel'nikov 主要通过在 Lax 表示中加入新的算子来给出一些带自相容源的非线性系统, 像带自相容源的 KdV 方程、KP 方程、非线性 Schrödinger 方程, 以及 Boussinesq 方程[85, 86]; 但是这种方法却没有给出时间部分的显示 Lax 表示, 而且对参数选取的要求技巧性比较强. J. Leon 等通过在与特征值问题相联系的色散关系式中加入奇异部分而得到带自相容源的孤子方程[92, 94], 而且如果奇异部分消失, 就得到原来的孤子方程. V.E. Zakharov 等也曾用多尺度展开得到带自相容源的 KP 方程[97]. 后来, M. Antonowitz 和曾云波教授通过研究孤子方程族的高阶约束流[100~106] 发现, 带自相容源的孤子方程族的静态情形恰好可以看作是孤子方程族的约束系统. 而孤子方程族的约束系统的 Lax 表示可以通过孤子方程特征值问题的伴随表示导出, 因此, 这就为构造带自相容源的孤子方程及其显式的 Lax 表示提供了有效简便的途径[100, 103, 104], 带自相容源的孤子方程 Lax 表示的空间部分和时间部分也就能够完全确定. 以后, 利用孤子方程的约束系统为构造带自相容源的孤子方程提供了一个系统的方法.

带自相容源的孤子方程的解可以描述物理上多种多样的动力现象, 因此如何求解这一类方程也是众多学者关心的问题之一. 对于带自相容源孤子方程的求解, 目前主要有两类方法. 一类是以带自相容源孤子方程的 Lax 表示为基础的解析方法, 像反散射方法[90, 98, 99]、$\bar{\partial}$-方法[92]、Darboux 变换法、Bäcklund 变换法等. 早期, Mel'nikov 利用反散射方法求得带自相容源孤子方程的精确解[89~91]; 但当时并没有给出时间部分的显式 Lax 表示, 而是利用所谓的"决定关系式"(determining relations) 给出散射数据的演化规律. J. Leon 等则利用 $\bar{\partial}$-方法求解带自相容源孤子方程的初边值问题[92]. 随着研究的深入, 利用孤子方程的高阶约束可以得到带自相容源孤子方程的 Lax 表示的显示形式, 因此反散射方法求解带自相容源孤子方程也变得完善起来. 带自相容源孤子方程的 Lax 表示与普通孤子方程的 Lax 表示有一点重要区别, 即是在带自相容源孤子方程的 Lax 表示中, 谱参数存在极点. 曾云波教授、林润亮教授提出了一种在推导散射数据演化时能够克服极点问题的方法[105, 108], 从而可以借助明确的 Lax 表示, 利用反散射方法求解整个带自相容源的孤子方程族[104, 109]. 除利用反散射方法求解带自相容源孤子方程外, 还可利用 Darboux 变换法、Bäcklund 变换法来求解带自相容源的孤子方程. 曾云波教授等人给出了带自相容源的 KdV 方程族、mKdV 方程族的双 Darboux 变换 (或称为积分型 Darboux 变换)[106, 107], 通过 Darboux 变换把自相容源度数为 N 的带自相容源方程的解变为自相容源度数为 $N+1$ 的方程的解, 从而得到带自相容源孤子方程的孤子解. 随后 Darboux 变换和

Bäcklund 变换又被进一步推广而应用到带自相容源的 KdV 方程[110], 带自相容源的 NLS 方程、KP 方程族、mKP 方程族[111, 112, 114], 带自相容源的无色散 KP 方程族、无色散 mKP 方程族[113], 带自相容源的 (1+1) 维 Toda 格方程族[115] 等, 并得到这些方程的不同种类的解, 例如孤子解、有理解、呼吸子解 (breather-type solution). 而马文秀教授则利用 Darboux 变换给出了 Schrödinger 带自相容源方程[116] 的孤子解、positon 解、negaton 解; 另外, 他也给出了带自相容源 KdV 方程的 complexiton 解[117](包括孤子解、positon 解、negaton 解).

除了以上提到的一类方法以外, 还有一类求解带自相容源孤子方程的直接方法, 即是求解时不借助带自相容源孤子方程的 Lax 对, 而直接对其进行求解. 事实上, 在 1987 年, Mel'nikov 利用矩阵理论和行列式的一些性质, 也就是他所说的"Direct method"[87, 88] 给出了带自相容源 KP 方程的多孤子解精确表达式, 并研究了这些解的变化动态. 而在对带自相容源的孤子方程直接进行求解的方法中, 最主要的就是 Hirota 双线性方法. 我们知道, 双线性方法对求解普通的孤子方程是非常简单和有效的, 而这种方法对解决带自相容源的孤子方程同样适用. Y. Matsuno 和胡星标等人利用这种直接方法导出自相容源度数为 1 的带自相容源孤子方程的双线性 Bäcklund 变换和非线性叠加公式, 进而得到了带自相容源孤子方程的多孤子解[118~123]. C. N. C. Freeman 和 C. R. Gilson 给出了双线性形式的带自相容源 KP 方程, 并得到其 Wronskian 行列式解[124]. 而陈登远教授、张大军教授以及他们的课题组则利用 Hirota 双线性方法和 Wronskian 技巧来求解带自相容源的 sine-Gordon 方程[126]、KP 方程[127]、mKdV 方程[125, 128] 等一些带自相容源的孤子方程[129]. 我们的课题组也曾利用 Hirota 双线性技巧构造了一些带自相容源的半离散情形的孤子方程, 例如带自相容源的二维 Toda 格方程, 带自相容源的微分差分 KP 方程等[130~132], 并给出了它们的 Casorati 行列式解.

1.4 源生成方法的提出

通过 1.3 节可以看到关于带自相容源的孤子方程, 已经出现了一些丰富的研究成果. 但是可以发现, 以前的研究多集中在带自相容源的 AKP 类型方程的连续情形, 而半离散的例子还比较少, 至于全离散情形的带自相容源孤子方程, 也无人涉及. 关于这类方程, 还存在几个重要问题悬而未决. 第一, 怎样构造和求解离散情形的带自相容源的孤子方程? 第二, 怎样研究其他类型的带自相容源的孤子方程, 例如带自相容源的 BKP 类型的孤子方程? 前面的内容里介绍了研究带自相容源的孤子方程的一些方法. 对于构造带自相容源的孤子方程, 已

有的一个比较成熟的方法就是通过研究孤子方程的约束流找到带自相容源孤子方程的 Lax 表示, 进而由相容性条件给出带自相容源的孤子方程. 一些带自相容源的连续和半离散的孤子方程[114, 115] 由这种方法得到, 但是这种方法应用到全离散情形却有一定难度, 相关文献也没有这方面的结果. 因此以 Lax 表示为基础的一些求解方法, 像反散射方法、Darboux 变换法等也就难以应用. 另一方面, 关于带自相容源的孤子方程的直接求解问题, 文献[125~132] 中利用 Wronskian 技巧求解带自相容源的孤子方程, 其证明过程也略显复杂. 而且 BKP 类型的孤子方程没有行列式形式的解, 因此 Wronskian 技巧对这一类型的孤子方程显得无能为力. 那么我们是否能从其他角度出发, 找到一个更为统一的方法来研究带自相容源的孤子方程?

前面我们已经根据人们对带自相容源孤子方程的研究结果, 给出了它的一般形式, 也看到带源孤子方程与原孤子方程之间的紧密联系, 即当带自相容源的孤子方程的自相容源度数为零时, 带自相容源的孤子方程就约化为原来的孤子方程. 例如在参考文献 [85, 86, 92] 里, 如果自相容源部分消失, 带自相容源的 KP 方程、带自相容源的 KdV 方程就分别退化为 KP 方程、KdV 方程. 带自相容源的孤子方程的这一特性跟非齐次线性常微分方程非常相似, 因为非齐次线性常微分方程在非齐次项为零时, 就退化为齐次线性方程. 而求解非齐次线性常微分方程的方法, 即是大家熟悉的常数变易法, 这种方法把非齐次线性方程的解与齐次线性方程的解联系在一起. 关于常数变易法的思想可以用图 1.1 的框图来描述, 其中集合 $\{\varphi_i\}$ 是以上齐次线性常微分方程的一组基解, c_i 是任意常数, 而 $c_i(x)$ 表示自变量 x 的函数.

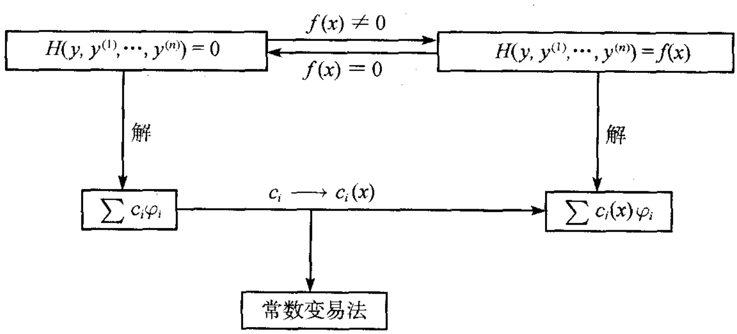

图 1.1

那么, 是否可以把这种常数变易方法推广, 进而应用到这一类特殊的非线性方程呢? 像大家所熟知的反散射方法是求解非线性孤子方程的一种经典方法, 它可以看作是非线性的傅里叶变换法, 是傅里叶变换的非线性推广. 而一般的

傅里叶变换却是求解常系数线性偏微分方程的一种方法. 可见, 线性微分方程里的方法和思路对于研究非线性微分方程来说, 有很多借鉴之处. 另外, 还有一点值得一提, 以前的研究方法中, 都是先通过找到孤子方程的 Lax 对, 再给出带自相容源的孤子方程, 进而才能求解这一类非线性方程. 那么, 如果事先不知道带自相容源的孤子方程的 Lax 表示, 我们是否能直接通过普通孤子方程的解来构造带自相容源的孤子方程的解, 进而得到带自相容源的孤子方程? 答案是确定的.

本书正是基于以上思想, 合理利用双线性方法, 以一种全新的角度来研究带自相容源的孤子方程. 本书作者首次提出了一个新颖的代数方法来统一地构造和求解带自相容源的孤子方程, 这种方法就是源生成方法 (此方法原英文名称为 source generalization procedure, 后改为 source generation procedure). 这种方法以双线性形式的孤子方程为基础, 从双线性方程的行列式解或 Pfaff 式解出发, 对原孤子方程的解进行推广, 来同时构造和求解带自相容源的孤子方程. 源生成方法首次将常数变易法的思想进行推广, 应用到研究带源的孤子方程这一类非线性发展方程, 因此可以看作是非线性的常数变易法; 而从数学结构上来说, 带源孤子方程也可以看作是“非齐次的”非线性孤子方程.

本书的主要内容是利用源生成方法来构造和求解带自相容源的孤子方程, 并研究这一类方程的可积性. 源生成方法主要以双线性方法为基础, 第 2 章将简单介绍 Hirota 双线性方法以及 Pfaff 式概念和性质.

第 2 章　双线性方法以及 Pfaff 式技巧简介

Hirota 双线性方法是求解孤子方程的有效的代数方法之一. 双线性方法主要从非线性方程出发, 通过把原本的非线性方程转化为双线性形式的方程, 把非线性方程的问题转变为双线性方程的问题, 进而使问题的解决变得相对简单.

2.1　Hirota 双线性方法介绍

人们处理线性问题的方法和手段已经非常成熟, 因此对于研究孤子方程这一类特殊的非线性方程, 也总是希望能从线性问题的解决方法中得到启发. 一些非线性方程, 例如 Riccati 方程、Burgers 方程等可以通过适当的变换转化为线性方程, 这样就对原有的问题进行了简化. 然而对于其他一大类孤子方程都不能变换为线性方程, 因此我们希望能够把线性的条件放宽一些. Hirota 曾利用相关变量变换, 并通过引进双线性算子, 把非线性发展方程转化为一种双线性方程, 进而可以对双线性方程进行一系列的研究, Hirota 双线性方法就是在此基础上建立起来的一种理论体系.

2.1.1　非线性方程的双线性化以及双线性算子

下面以 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.1}$$

为例, 说明怎样把非线性方程转化为双线性方程. 对 KdV 方程作以下相关变量变换:

$$u = 2(\ln f)_{xx},$$

则 KdV 方程就转化为

$$\frac{\partial}{\partial x}[(f_{xt}f - f_xf_t + f_{xxxx}f - 4f_{xxx}f_x + 3f_{xx}^2)/f^2] = 0, \tag{2.2}$$

由此可得到双线性方程

$$f_{xt}f - f_xf_t + f_{xxxx}f - 4f_{xxx}f_x + 3f_{xx}^2 = cf^2, \tag{2.3}$$

其中 c 是积分常数. 为了把双线性方程 (2.3) 写成更为紧凑、简洁的形式, 下面引进一种双线性算子.