DAXUEWENKESHUXUE

大学文科数学

云南大学公共数学教研部　编

云南大学出版社

大学文科数学

云南大学公共数学教研部　编

云南大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

大学文科数学/云南大学公共数学教研部编. —昆明：云南大学出版社，2004

ISBN 7－81068－810－3

Ⅰ.大... Ⅱ.云... Ⅲ.高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 063883 号

策划编辑：徐 曼
责任编辑：徐 曼 康 实
封面设计：何 璞
责任校对：虞 宏

大学文科数学

云南大学公共数学教研部 编

出版发行	云南大学出版社
印 装	云南福保东陆印刷股份有限公司
开 本	787×1092 1/16
印 张	11.5
字 数	277 千
版 次	2005 年 5 月第 2 版
印 次	2005 年 5 月第 2 次印刷
书 号	ISBN 7－81068－810－3/O·49
定 价	20.00 元

社 址：云南省昆明市翠湖北路 2 号云南大学英华园内(650091)
发行电话：0871－5033244 5031071
网 址：http://www.yunp.com E-mail：market @ yunp.com

前　言

本教材是根据我们云南大学文科类大学数学的教学实践经验，组织公共数学教研部九位老师根据同名讲义改编而成的。

目前国内关于高等数学的教材颇多，长期以来为广大教师培养人才提供了充实的材料。当今21世纪科学技术迅速发展，数学理论在自然科学和社会科学领域中得到了广泛的应用和发展，特别是随着计算机和信息技术的发展而引起的各门科学和技术定量化趋势日益明显，需要进一步拓宽大学生的知识面和增强其灵活应用的能力，训练其严谨的思维方法和思维能力。作为大学重要基础课程的高等数学课，不再只是为理工专业课程提供数学工具，同时还担负着培养文科类大学生数学素质的重任。本教材的编写就是基于这种思想指导下进行的一种尝试。

从中学进入大学，一般总是把学生所学专业划分为理工类和文科类，一些文科学生认为数学不是自己的专业，从心理上放松对数学的学习，认为学不好数学也无所谓。然而，我们应该换一下角度看待数学，一切科学技术都是以数学为基础或工具的，当代社会科学中的许多方法也直接取自于数学。我们必须认识到数学的重要性，从大学生数学素质的培养而言学习数学也是非常必要的。对于“数学素质”，人们有不同的理解，但下列几条是比较一致的看法：

- 对事物的归纳和抽象的思维能力，从具体到一般的联想能力。表现之一即是能建立实际问题的数学模型。
- 正确的演绎推理习惯和动手运算能力。
- 了解基本的数学语言，具有一定的自学能力，了解一些新的数学工具和思想。

当然，提高数学素质，不能只靠高等数学一门课，也不能只靠若干门数学课，而需要通过整个大学期间各种课内外的教学实践来完成。

这本教材虽然对现行文科类大学数学中的一元函数微积分和线性代数的教学内容和体系作了较大的调整和更新，并尽量使用现代数学的语言，但是，基于数学科学继承性很强的特点，因而全书的内容仍是以古典数学为主的。

关于内容处理和体系安排，我们注意体现以下几点：

1. 注重知识体系内容的整体性和结构性。

数学分析、线性代数仍是高等数学的基础。在一学期每周4学时的教学过程中，我们力图讲清概念，并着重阐明如何从经济、几何等问题理解这些概念，理论的要求则适当放低。对证明较难或技巧较高的定理，一般只作准确的叙述而不加证明。我们把重点放在对定理的应用上，要求学生掌握基本计算方法和计算技巧，并通过要求学生做一定数量的习题，让他们真正把方法学到手，这样不会影响内容的整体性和系统性。

2. 因材施教，加强对学生数学素质的培养。

多数文科学生一般数学相关基础知识比较薄弱，我们尽可能为他们讲述那些现在用得到而又忘了的数学知识，即重建基础平台。同时，对例题的讲解和习题的安排也要遵循由

易到难、由浅入深、循序渐进的教学原则。当然，提高学生的数学素质是一项非常艰巨的任务。我们力求做到：在课堂教学中知识结构比较新，基础比较厚，知识面比较宽，并尽量使用现代数学语言，为学生进一步学习相关科学知识奠定基础。

总之，本教材与传统的文科大学数学教材相比，在体系上注重了知识体系的整体性，结构上遵循学生的认知规律（线性代数比一元函数微积分较为抽象，所以本书把一元函数微积分作为前面部分，后讲线性代数），同时也试图尽可能地做到数学语言和符号的统一和规范。第二版中增加了第一章与第十章内容，以扩大学生知识面。

参加本教材编写工作的有：林国广撰写前言、第一章数学知识简介及第二章函数、极限与连续；关莉编写第三章导数与微分；朱敏编写第四章微分中值定理与导数的应用；李源编写第五章不定积分；李友宝编写第六章定积分及第十章概率统计的前5节；赵莉莉编写第七章行列式；刘萍编写第八章矩阵；徐贵桐编写第九章线性方程组；陈丹编写第十章的后3节及习题。最后全书由林国广、李友宝、徐贵桐统稿。对云南大学出版社支持本教材的出版，我们表示衷心的感谢。由于受我们的水平和经验所限，本教材不妥之处在所难免，恳请同行专家及热心的读者批评指教。

编　者

2005年5月于云大

目　录

第一章　数学知识简介 ………………………………（1）

第一节　数学是什么 ………………………………（1）

第二节　数学发展简史 ………………………………（2）

第二章　函数、极限与连续 ………………………………（8）

第一节　函数复习 ………………………………（8）

第二节　极限 ………………………………（13）

第三节　函数的连续性 ………………………………（24）

第二章习题 ………………………………（26）

第三章　导数与微分 ………………………………（29）

第一节　导数及其运算 ………………………………（29）

第二节　微分 ………………………………（39）

第三章习题 ………………………………（42）

第四章　微分中值定理与导数的应用 ………………………………（45）

第一节　微分中值定理 ………………………………（45）

第二节　洛必达法则 ………………………………（48）

第三节　导数的应用 ………………………………（52）

第四章习题 ………………………………（61）

第五章　不定积分 ………………………………（63）

第一节　不定积分的概念 ………………………………（63）

第二节　基本积分表 ………………………………（65）

第三节　不定积分的性质 ………………………………（66）

第四节　换元积分法 ………………………………（67）

第五节　分部积分法 ………………………………（74）

第五章习题 ………………………………（78）

第六章　定积分 ………………………………（80）

第一节　定积分的概念与性质 ………………………………（80）

第二节　定积分的计算 ………………………………（82）

第六章习题 ………………………………（87）

第七章 行列式 …… (89)
第一节 行列式的定义 …… (89)
第二节 n 阶行列式的性质 …… (91)
第三节 行列式的计算 …… (99)
第七章习题 …… (104)

第八章 矩 阵 …… (106)
第一节 矩阵的概念 …… (106)
第二节 矩阵的运算 …… (109)
第三节 矩阵的逆矩阵 …… (114)
第四节 矩阵的分块 …… (118)
第八章习题 …… (121)

第九章 线性方程组 …… (124)
第一节 消元法 …… (124)
第二节 线性方程解的一般理论 …… (131)
第三节 齐次线性方程组的基础解系 …… (135)
第九章习题 …… (137)

第十章 概率统计 …… (139)
第一节 随机事件及其运算 …… (139)
第二节 概率的定义及性质 …… (140)
第三节 条件概率及全概率公式 …… (141)
第四节 随机变量及其分布 …… (146)
第五节 随机变量的数字特征 …… (149)
第六节 抽样分布 …… (153)
第七节 参数估计 …… (157)
第八节 假设检验 …… (161)
第十章习题 …… (164)

参考答案 …… (167)

第一章　数学知识简介

第一节　数学是什么

数学作为人类思维的表达形式，反映了人们积极进取的意志，周密的推理以及对完美境界的追求。它的基本要素是：逻辑和直观，分析和构作，一般性和个别性。虽然不同的传统可以强调不同的侧面，然而正是这些互相对立的力量的相互作用以及它们综合起来的努力才构成了数学科学的生命、用途和它的崇高价值。数学来源于人类活动及生存的一切过程中，产生于人类实际的需要，从而使数学自身获得发展的动力。回答数学是什么及如何看待数学的意义和重要性，古往今来不少杰出人物是最有发言权的。

“数学是科学之王。”

——C.F. 高斯（Gauss）.

“数学是打开科学大门的钥匙。”

——R. 培根（Bacon）.

“数学是人类智慧王冠上最灿烂的明珠。”

——N.A. 考特（Court）.

“数学代表人类抽象思维方面的最高成就和胜利。”

——K.L. 米斯拉（Misra）.

“数学是观察理解世界的一种方式。”

——V. 辛格（Singh）.

“数学除了锻炼敏锐的理解力，发展真理以外，它还有另一个训练全面考查科学系统的头脑的开发功能。”

——H.G. 格拉斯曼（Grassmann）.

“数学语言提供了表达精确思想的主要手段。”

——R.D. 长迈克尔（Carmichakl）.

“经验科学中多数深刻的定理都是借助数学概念陈述的。”

——C.G. 亨普尔（Hempel）.

“一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步。”

——K. 马克思（Marx）.

“一个国家的科学水平可以用它消耗的数学来度量。”

——A.N. 拉奥（Rao）

“要辩证而又唯物地了解自然，就必须熟悉数学。”

——F. 恩格斯（Engels）.

“要对自然的奥秘作更深入的探索，就必须同时地发展数学。”

——J.W.A. 杨（Young）

“数学既和几乎所有的人类活动有关，又对每一个真心感兴趣的人有益。”

——R.C. 巴克（Buck）

……

的确，数学在一切科学中的重要地位是不容置疑的。数学是人类进步的产物，同时也是衡量人类进步的刻度尺。

第二节　数学发展简史

前苏联科学院院士 A.H. 柯尔莫戈洛夫把数学发展的历史划分为四个主要时期：(1) 数学的产生；(2) 初等数学；(3) 变量数学的建立；(4) 现代数学。

第一个时期——数学的产生时期。可以把这个时期分为两个阶段：数学的史前史；最初的数学知识积累阶段。

数学的史前史。人类从“多”这个概念中分出“一”的概念，这被认为是人类经过最困难的阶段才作出的数的概念。曾经生活在巴西的保托库德部落就只用“一”和“多”两个词来表达数。南美洲的印第安人，为了表示数“二十”，就把手指和脚趾合在一起。随着手指计算、脚趾计算及手指关节的应用，逐渐引起了计算的调整，由最古老的二进位制记数法，发展到五进位制、十进位制、二十进位制、六十进位制等。原始社会随着对食物、武器作适当的分配也缓慢地形成了数的概念。人们已经抛弃了必须将物品拿在手中或置于脚边的做法。数学中发生了第一次抽象，把一些物品用另外某些彼此同类的物品或标记来代替，如用小石块、绳结、树枝、刻痕，根据彼此一一对应的原则进行这种计算。这是现代数学基础中的函数概念的一种原形。此外，在人们的生活需求普遍增长的同时，人类社会中紧密依赖于生活的要求也普遍增长，除数和计算外，还逐渐发展着思维和实践活动，对周围的物体及其形状的观察和各种测量方法的发展，促进了数学的另一个分支——几何学的产生。数学在这一时期的主要发展，是人类逐渐地产生了自然数的概念，计算的方法，并认识了最简单的几何形式。

最初的数学知识积累时期。**古代巴比伦的数学**。巴比伦人的 60 进位制，首先考虑到以 60 为基数较为方便，它是 2，3，4，5，6，10，12，15，20，30，60 的倍数，在很大程度上可以使计算简化。他们同时研究了数的开平方、一次方程、二次方程及数列、球面三角的概念，会求三角形与梯形的面积，棱柱与圆柱的体积。在天文领域中，发现了行星的存在，并研究了月亮的运动，确定了一个月亮月的时间为 30 天，12 个月亮月组成一年，用 7 天一个星期作为测量时间的较小单位。**古代埃及的数学**。他们研究了分数的运算及有关等差数列和等比数列的问题。埃及人已经知道求基本几何图形的面积和体积的精确方法，在计算时会运用不准确的关系式。**古代中国的数学**。中国的文化是世界上最古老的文化之一。公元前几千年中国人就已经很好地了解了天体的位置。中国很久以来就有文字印刷技术，中国人发明了指南针、造纸、瓷器，使用了自流井。中国很早就开始积累了数学知识，出现了数的写法。《九章算术》是非常古老而有趣的数学文献之一。在《九章算术》里有数列、开平方、开立方等代数问题，有三角形、四边形、圆和半圆及面积表达式，棱柱、棱锥、圆锥体积的问题。在人类文化发展的初期，中国的数学远远领先于巴比伦和埃及。

第二个时期——初等数学（常量理论的发展时期）。在公元前几千年，一些东方国家已经把数学知识汇集成丰富的宝库。数学是由于实际的需要，在劳动过程中产生的，人们在劳动时必然会建立数和空间形式的概念。发展农业，修筑灌溉工程、宫殿、教堂、金字塔，扩大商业和税收业务，航海的发展，所有这一切都推动着数学的发展。这个时期中，古希腊和它的移民区出现了一系列哲学数学的学派，致使古希腊在数学发展进程中取得了辉皇成就。以泰勒斯（约公元前 624 ~ 547）为代表的爱奥尼亚哲学学派，得出数是若干个 1 之和的算术基本定义，并得出两个三角形全等的判定定理，叫做泰勒斯定理。毕达哥拉斯学派。毕达哥拉斯（约公元前 580 ~ 500）是个哲学家，以他为首的该学派发展了几何算术与几何代数，例如以几何思想来简化乘法公式："两个量的和的平方"，"两个量的差的平方"。该学派确立了论证数学方法的最重要方式之一——规定在数学中必须坚持严格证明，这就给数学增添了特殊的科学意义。毕达哥拉斯最重要的发现之一是证明了直角三角形两条直角边与斜边之间关系的定理，即著名的"毕达哥拉斯定理"。雅典学派。柏拉图（公元前 427 ~ 347）认为，不知道数学的人，不可能接受哲学知识。因此当进入希腊国家科学院时就可看到题词："不知道几何学的人不准入内。"这样，在雅典学派里数学占有重要的地位。该学派作出了许多几何定义，如点、线、面的定义，研究了棱柱、棱锥、圆柱、圆锥，还研究了椭圆、双曲线和抛物线。对古代三大几何难题（用圆规和直尺无法解决的问题）（1）立方倍积，（2）三等分任意角（这两个问题直到 1837 年才由法国数学家 P. 万采尔作出了严格证明）（3）化圆为方（直到 1882 年才由德国数学家 F. 林德曼得到证实），给予了很大的关注。另一个领导人物亚里士多德（公元前 384 ~ 322）是柏拉图的学生，是演绎逻辑的创造者。他根据演绎逻辑作出了许多数学证明。此外，亚里士多德建立起物理现象的理论，也帮助了数学的发展。他首次开始采用字母作为未知量的符号。亚历山大学派中欧几里德（约公元前 300 年）是最伟大的数学家。他最伟大的数学著作《几何原本》，共有十三卷，其中对几何问题作出了严格的逻辑性的叙述。这种叙述是借助于演绎法，包含把假定作为基础的某些不要求证明的定义和真理，而进一步的原理则用严格的证明导出。这些证明或者是根据真理，或者是根据由真理得出的原理。这是人类史上第一次使数学成为系统的科学的尝试，成为几千年来培养无数代人逻辑思维能力的几何教科书经典。同时期另一个伟大数学家阿基米德（约公元前 287—212），除了几何学外，还专心于天文学和力学。在天文学方面，他制作了独创的仪器——天象仪模型，发明了测量太阳的视角直径的仪器。他的著作有《论平板的平衡或者它的重心》，《论抛物线求积法》，《论球与圆柱》，《圆的度量》，《论螺线》，《论锥型体与球型体》，《砂粒计算》，《论方法》，《论浮体》，《引理》。

总之，从整体上考察，应该承认希腊人在初等数学的发展道路上取得了很大的成就。当然，中世纪时期的印度人在代数和三角学方面也获得了相当大的成就。印度借助于引进十进位制的数字和确立数字的位值制，得以调整数的写法。为了指明缺位的单位，零的使用得到推广，以致在改进数的写法和简化数的运算上，也发挥了很大作用。他们的学者解出了一次方程和二次方程。印度人在几何方面最出色的表现是在婆罗摩及多的著作中。根据所给的边和外接圆半径，求三角形的面积；作三角形，使它的边、外接圆半径和面积都是有理数；根据圆内接四边形的边，计算它的对角线、面积、高，以及与这个四边形有关的某些另外的线段。在 7 世纪到 15 世纪，中亚和近东民族的数学有了长足的发展，同时，

西欧数学领域也有了独立的发展。从 15 世纪中期到 16 世纪末期，即所谓的文艺复兴时期，欧洲中部一系列国家的科学和艺术的发展出现了一个高潮。15 世纪德国数学家的主要代表人物约翰·缪勒（1436～1476）发表了数学著作《简述托勒密巨著》，《论不同类型三角形的五本书》。16 世纪上半叶德国最优秀数学家米哈依尔·史提非（1486～1567）于 1544 发表论文《整数算术》，引进了负数和负数运算，引进了求自然数幂的二项展开式的系数、指数方程的解法，还引进了代数运算方法的某些符号。意大利天才的画家、雕塑家、建筑师、机械专家和数学家列奥纳多·达·芬奇（1452～1519）对数学的评价很高。这位艺术家和科学家说："任何人的研究，没有经过数学的证明，就不能认为是真正的科学。"16 世纪末，法国一位数学家弗朗西瓦·韦达（1540～1603）的著作《分析法引论》改进了代数符号，发展了解方程的理论，在几何中扩大了应用代数的范围，开始在代数中使用三角，促进了三角学的发展。另外的许多数学家在初等数学发展时期做出了很大贡献，此处不做详述。

数学发展的第三个时期——建立变量数学的时期。这个时期（17～19 世纪），以无穷小量理论为基础的变量进入了数学。无穷小量的产生和数学新分支解析几何、微积分和概率论的建立，成为这个时期的主要成果。17 世纪法国大数学家皮埃尔·费马（1601～1665）是职业律师，他把空余时间投入了数学的研究。由于费马具有天赋的才能和研究数学问题时所必须具有的顽强精神，所以他在极不相同的领域内都获得了丰硕的成果。最著名的是"费马大定理"，即不可能有满足 $x^n + y^n = z^n$，$xyz \neq 0$，$n > 2$ 的正整数 x，y，z，n 存在（英国数学家 A. 怀尔斯生于 1953 年，在 1995 年证明了这个 350 多年未获证明的一大难题）。费马发展的组合论是他在代数方面的主要贡献。他与同时代法国著名哲学家、数学家和物理学家帕斯卡，根据组合的原理，为数学的新理论概率论打下了基础。费马在数学分析方面的著作《求最大值和最小值的方法》体现了在分析方面的卓越成就。列涅·笛卡尔（1596～1650）是法国伟大的哲学家、物理学家、数学家和生理学家，他把物质运动的概念作为自然科学的哲学基础后，把运动也带进了数学。数学中的转折主要是由笛卡尔的数学著作《几何学》引起的。运动进入数学的同时把变量也引入了数学，这就改变了数学的性质。笛卡尔给出了由字母符号组成的代数和解析几何的原理，即通过引进坐标系，使得能用方程表示几何形状和解析的依赖关系的方法。17 世纪末期英国的数学水平相当高，其突出代表之一是约翰·瓦里士（1616—1703）。他写了很多数学著作，其中有《无穷小算术》，《论摆线》，《代数论文》，《普及数学，或完整的算术课程》。特别是《无穷小算术》里引入了变量极限的概念。英国另一位物理学家、数学家艾萨克·牛顿（1643—1727）的著作《自然哲学的数学原理》，《利用无穷项方程的分析学》，《曲线求积论》及论文《流数术和无穷级数方法及其对几何曲线的应用》，叙述了数学分析的方法。同时代另一位杰出数学家戈特弗里德·莱布尼兹（1646～1716），用自己的方法与牛顿的方法获得同样的结果，发表在两本著作《潜在的几何与分析不可分和无限》和《一种求极大值与极小值和切线的新方法》中，叙述了微分学的基本原理，以求函数的无限小增量的题目为出发点，得出函数取得这种增量是自变量无限小变化的结果。莱布尼兹把这个函数的增量叫做微分，并用字母 d 表示。从求以曲线为界的图形面积出发得到积分的概念，并引入了积分的符号 $\int$。至此，牛顿与莱布尼兹的著作建立和完成了微积分学。本时期数学的发展进程中，有

许多杰出数学家在推动着数学向前发展。如（德）卡尔·高斯（1777～1855）是微分几何的奠基人，（德）乔治·黎曼（1826～1866）是拓扑学的奠基人，（法）埃瓦里斯特·伽罗瓦（1811～1832）建立了用代数方程确定不可解性分类的理论。

第四个时期——现代数学发展时期。从数学发展的特征看，现代数学在数学主要分支——几何学、代数和分析中发生了深刻变化。还在19世纪上半叶，H. 罗巴切夫斯基和J. 鲍耶就已经建立了新的非欧几何学，其思想是别开生面的和出乎意料的。从这个时期开始，几何学开始了新的发展，改变了“什么叫做几何学”的概念，它的对象和使用范围开始迅速扩大。在19世纪中期，德国数学家黎曼提出了几何学家能够研究的“空间”的种类有无限多的一般思想，并指出它们可能的真实涵义。从几何学只研究物质世界的空间形式的欧几里得几何学框架中，分离出一些独立分支，新的空间——罗巴切夫斯基空间、射影空间、高维欧几里得空间、黎曼空间、拓扑空间等等，都是几何学的研究对象。所有这些新的概念都找到了自己的应用。

代数在19世纪同样也出现了根本变化。如果说以往的代数其符号仅代表数，那么现代的代数扩大了自己的范围，大大超过了一般性质的数量概念，在形式上保持着以往仅用数那样进行运算。现代代数以向量及其不同种类的移动等等进行运算，因此代数范围扩充了，它的运算对象也扩大。而代数范畴的扩充，还是从伽罗瓦时代开始的。现在发展起来的方法被用在各种不同的学科中，如几何学、分析数学、物理学、化学结晶学等。群论和线性代数是现代代数的重要分支。群论是从最简单的对称学说中产生出来的，它在自己的发展中得到实际运用，特别是运用代数方程和微分方程的理论。挪威数学家索福斯·李（1842～1899）把群的理论推广到微分方程的积分问题中。线性代数的整个理论依赖于形如$\Phi(x)=ax+b$的函数概念。从这个概念出发得出了整个运算系统，并在科学和技术中奠定了形成实际应用的基础。

在分析数学发生的深刻变革中，德国数学家莫里兹·康托（1845～1919）创立的《集合论》对数学许多分支的发展产生了深刻影响，集合论成为实变函数论、代数拓扑、群论、泛函分析等理论的基础。在分析数学里发展出新的分支，这些新分支一般统称为现代分析。特别是现代分析应归功于法国数学家埃米尔·波莱尔（1871～1956）、安里·勒贝格（1877～1941）和使实变函数论思想广泛发展的苏联数学家H.H. 鲁金（1883～1952）所作的研究，以及苏联数学家C.H. 别恩斯坦（1880～1968）在函数构造论方面取得的成绩。

数学发展的动力来源于人类对客观世界改造的需要，其中包括了数学猜想和数学问题对人类智慧的挑战。能够为20世纪的数学发展指出方向，并起到积极的推动作用的希尔伯特的23个数学问题就是这样。希尔伯特是德国著名数学家，也是20世纪最伟大的数学家之一，当他在1900年第二届国际数学家大会上作了题为《数学问题》的著名演讲，并提出了他的23个数学问题之后，立刻在整个数学界引起了轰动。许多数学家很快就投身于解决希尔伯特问题的努力中去。他们以能解决希尔伯特问题为莫大的荣耀。在研究过程中产生了丰富的数学新思想和新理论，证明了希尔伯特问题在数学史上特有的地位和价值。23个问题及现状简介如下：

问题1. 连续统假设。

这是康托在1878年提出的一个著名猜想：在可数集基数和实数集基数之间再没有别的基数，即不存在集合X使得$|Z|<|X|<|R|$。这个猜想被称为连续统假设。从现有

的集合论公理体系，不能证明它是错误的，也不能证明它是正确的。

问题 2. 算术公理系统的无矛盾性。

欧氏几何的无矛盾性可以归结为算术公理的无矛盾性，但如何证明算术公理系统的无矛盾性？该问题至今尚未解决。

问题 3. 两个等底等高的四面体具有相同体积。

这个问题的确切含义是：存在两个等底等高的四面体，它们不可能各自分解成有限个小四面体使得这两组四面体彼此为全等的小四面体。该问题于提出 23 问题的当年，由希尔伯特的学生德恩给出了肯定的证明。

问题 4. 两点间以直线为距离最短线的问题。

该问题至今仍未获得完全解决。

问题 5. 局部欧氏群一定是李群吗?

1952 年由格里森·蒙哥马利和齐宾共同给出肯定的解答。

问题 6. 物理学的公理化。

能否对物理学各分支都进行公理化，未能完全解决。

问题 7. 某些数的无理性与超越性。

至今未完全解决。

问题 8. 素数分布问题，尤其是黎曼猜想、哥德巴赫猜想和孪生素数等问题。

我国数学家陈景润有重大进展，这些问题至今尚未解决。

问题 9. 一般互反律在任意数域中的证明。

该问题 1921 年由日本数学家高木贞治及 1927 年由德国数学家阿廷分别独立解决。

问题 10. 丢番图方程可解性的判别。

即能否通过有限步骤来判定一个不定方程是否存在有理整数解。前苏联数学家马蒂塞尔维奇给出否定解决。

问题 11. 系数为任意代数数的二次型。

该问题基本解决。

问题 12. 类域的构成问题。

即把阿贝尔域上的克罗内克定理推广到任意代数有理域上去。该问题尚未彻底解决。

问题 13. 仅用二元函数解一般 7 次代数方程的不可能性。

该问题尚未完全解决。

问题 14. 证明某类完全函数系的有限性。

1959 年日本数学家永田雅宜用反例给出否定解决。

问题 15. 舒伯特计数演算的严格基础。

这样的严格基础至今尚未建立。

问题 16. 代数曲线和曲面的拓扑研究。

我国数学家有重大贡献。

问题 17. 半正定形式的平方和表示。

如果一个实系数多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 对任意数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都恒大于或等于 0，问 f 能否写成有理函数的平方和？该问题于 1927 年由阿廷肯定地解决。

问题 18. 用全等多面体来构造空间。

至今尚未完全解决。

问题 19. 正则变分问题的解是否总是解析函数?

一般情形下，至今尚未解决。

问题 20. 一般边值问题。

该问题已发展为偏微分方程的边值理论。

问题 21. 具有给定奇点和单值群的线性微分方程解的存在性证明。

该问题已由希尔伯特于 1905 年，勒尔于 1957 年，德林于 1970 年解决。

问题 22. 用自守函数将解析函数单值化。

该问题在一般情形下，尚未解决。

问题 23. 变分学方法和进一步发展。

该问题在 20 世纪有了很大发展。

数学发展到今天，广泛地为各门自然科学及社会科学提供各种思想方法和运算工具。现在与数学有关的课程世界上公认的有 382 门，而每门课又有若干的研究方向和分支。同时，数学也在随着人类社会前进的足迹不断地发展，为每个数学工作者提供了广阔的学习和研究天地。

第二章　函数、极限与连续

第一节　函数复习

一、区间与邻域

设实数集为 R，a、$b\in R$，$a<b$，则**有限区间**定义如下：

闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$（如图 1-1-1）；

开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$（如图 1-1-2）；

半开半闭区间 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$（如图 1-1-3）；

半闭半开区间 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$（如图 1-1-4）。

下列区间统称为**无穷区间**：

$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$（如图 1-1-5）；

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$（如图 1-1-6）；

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$（如图 1-1-7）；

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$（如图 1-1-8）；

$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in R\}=R$（如图 1-1-9）。

其中记号"∞""$-\infty$""$+\infty$"分别称为无穷大、负无穷大、正无穷大，它们都不是定数，是取不到的数。

设 $a\in R$，$\delta>0$，称集合 $\{x\,\big|\,|x-a|<\delta\}$ 为**点 a 的 δ 邻域**，记作

$$\cup(a,\delta)=\{x\,\big|\,|x-a|<\delta\},$$

a **叫做邻域中心**，δ **叫做邻域半径**。即包含 a 点的一个开区间，去绝对值符号得

$$\cup(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)。$$

在 $\cup(a,\delta)$ 中去掉中心点 a，得点集 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$，叫做**点 a 的去心邻域**，也可表示为

$$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)。$$

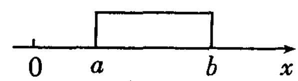

图 1-1-1

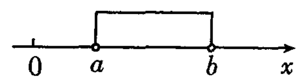

图 1-1-2

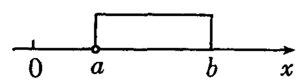

图 1-1-3

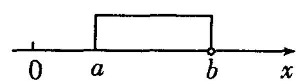

图 1-1-4

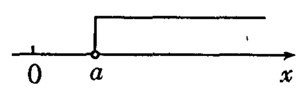

图 1-1-5

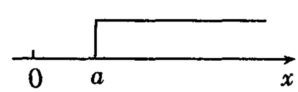

图 1-1-6

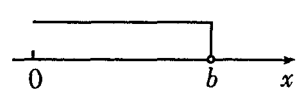

图 1-1-7

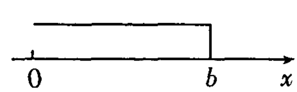

图 1-1-8

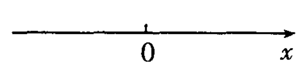

图 1-1-9

二、函数的概念

在自然界中和科学技术领域里，我们经常会遇到各种各样的量。一些量在整个变化过程中保持固定数值不变，这种量叫做

常量；有些量在整个变化过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫做**变量**。习惯上用 a、b、c 等表示常量，用 x、y、z 等表示变量。

【定义 1】 设在同一个过程中有两个变量 x 与 y，已知 x 的变化域是集 X，如果对于变量 x 在 X 中的每一个值，依照某一对应关系，变量 y 都有惟一的一个值与之对应，我们就说变量 y 是变量 x 的**函数**；这时 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**。记作

$$y=f(x),\ x\in X$$

集合 X 称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**；全体函数值的集合 $Y=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**。

例 1 圆的面积 S 是圆的半径 r 的函数，函数关系是

$$S=\pi r^2$$

函数定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(0,+\infty)$。

例 2 $y=\sqrt{\sin x-2}$

对任何实数 x，都没有按给定关系与之对应的实值 y。函数定义域是空集，因此例 2 不是实函数关系。

例 3 研究 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数关系。

$y=x$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的函数关系。

$y=\dfrac{x^2}{x}$，当 $x=0$ 时没有确定的 y 值与之对应，因此它不是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的函数关系。而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 的函数关系。

因而 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是定义域不同的两个不同函数。

例 4 讨论 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数关系。

$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 都是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的函数关系，但是其对应关系不同。$y=x$ 的值域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $y=\sqrt{x^2}$ 的值域是 $[0,+\infty)$，故两函数是定义域相同、对应关系与值域不同的两个不同函数。

三、函数的几种简单性质

1. 函数的奇偶性

【定义 2】 设函数 $y=f(x)$ 在对称于原点的区间上有定义，即 $x\in X$，则 $-x\in X$，如果对任意 $x\in X$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是 X 上的**奇函数**。如果对任意 $x\in X$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是 X 上的**偶函数**。

由定义可知，**奇函数的图形关于原点对称；偶函数的图形关于 y 轴对称。两个偶函数或两个奇函数的乘积是偶函数；偶函数与奇函数的乘积是奇函数。**

例 5 判别下列函数的奇偶性：

(1) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

(2) $y=x^3+1$

解 (1)该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，因为

$$f(-x)=\ln[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$$
$$=\ln\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}+x)}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

所以 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$是奇函数。

解 (2) 该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，因为

$f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1$,而

$f(x)=x^3+1$

$-f(x)=-(x^3+1)$,则

$f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$,所以

$y=x^3+1$ 非偶函数也非奇函数。

2. 函数的周期性

【定义 3】 如果对于函数 $y=f(x)$，存在正的常数 T，使得$f(x)=f(x+T)$恒成立，则称此函数为**周期函数**。满足这个等式的最小正数 T，称为函数的**周期**。

例 6 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；

$y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数。

3. 函数的单调性

【定义 4】 如果函数 $y=f(x)$对区间(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2，

当 $x_1<x_2$ 时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在区间(a,b)内是**单调增加**的(或称**单调递增**)；

当 $x_1<x_2$ 时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在区间(a,b)内是**单调减少**的(或称**单调递减**)。

单调增加函数的图形是沿 x 轴正向上升的；单调减少函数的图形是沿 x 轴正向下降的。

例 7 判断函数 $y=2x^2+1$ 的单调性。

解 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$；对任意的 x_1、x_2 有

$f(x_1)-f(x_2)=(2x_1^2+1)-(2x_2^2+1)=2(x_1^2-x_2^2)$；

当$x_1,x_2\in(-\infty,0]$时，若 $x_1<x_2$,则 $x_1^2>x_2^2$，于是

$f(x_1)-f(x_2)=2(x_1^2-x_2^2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以 $y=2x^2+1$ 在$(-\infty,0]$上是单调减少的。

当$x_1,x_2\in[0,+\infty)$时，若 $x_1<x_2$，则 $x_1^2<x_2^2$，于是

$f(x_1)-f(x_2)=2(x_1^2-x_2^2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $y=2x^2+1$ 在$[0,+\infty)$上是单调增加的。

因此 $y=2x^2+1$ 在$(-\infty,+\infty)$不是单调函数。

例 8 证明函数 $y=x^n$ 在$(1,+\infty)$上是单调增加的。