普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUOJIAJI GUIHUA JIAOCAI PEITAO JIAOCAI

GAODENGSHUXUE
XITIQUANJIE ZHINAN

高等数学习题全解指南

朱士信 唐 烁 宁荣健 编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS
http://jc.cepp.com.cn

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUOJIAJI GUIHUA JIAOCAI PEITAO JIAOCAI

GAODENGSHUXUE
XITIQUANJIE ZHINAN

高等数学
习题全解指南

朱士信 唐 烁 宁荣健 编
潘 杰 主审

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材。本书是与朱士信、唐烁、宁荣健编写的《普通高等教育“十一五”国家级规划教材　高等数学》相配套的学习辅导书，书中内容包含了《高等数学》中全部习题的详细解答。

本书不仅可作为高等院校学生学习《高等数学》课程的参考书及讲授《高等数学》课程教师的教学参考书，也可作为准备报考高等学校理工科各专业研究生学生的复习参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题全解指南/朱士信，唐烁，宁荣健编．—北京：中国电力出版社，2008

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材

ISBN 978-7-5083-6914-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．①朱…②唐…③宁…　Ⅲ．高等数学—高等学校—解题　Ⅳ．O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 038690 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路 6 号　100044　http：//jc.cepp.com.cn）

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2008 年 4 月第一版　2008 年 4 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米　16 开本　19.75 印张　482 千字

定价 **28.00** 元

前　言

本书是与朱士信、唐烁、宁荣健编写的《普通高等教育"十一五"国家级规划教材　高等数学》相配套的学习辅导书，书中内容包含了《高等数学》中全部习题的详细解答。

对于学习《高等数学》课程的学生来说，不仅要掌握《高等数学》课程中的基本概念、基本理论、基本方法，而且要通过学习，培养熟练的运算能力、逻辑推理能力、抽象概括问题的能力及综合运用数学知识分析和解决问题的能力。要达到这样的目的，严格而充分的基本训练是必不可少的。著名数学家华罗庚在《高等数学引论》中关于习题有精辟的论述："习题的目的首先是熟练和巩固学习了的东西；其二是启发大家灵活运用，独立思考；其三是融会贯通，出些综合性的习题，把不同部门的数学沟通起来。"苏步青院士说他自己做过一万道微积分习题。由此可见习题在数学教学中的地位和作用是举足轻重的，也足以说明我们的前辈大师们为什么有如此深厚的数学功底。

编写本书的主旨，当然不是"越俎代庖"，更不会限制学生独立思考。所以希望读者一定要正确运用本书，只有在经过一番独立思考而不得其解或对自己的解答无法确定时，才去参考解答。否则对学习没有任何帮助，也违背我们编写本书的初衷。

我们需要强调的是，虽然书中内容包含了《普通高等教育"十一五"国家级规划教材　高等数学》中全部习题的详细解答，但对于大部分的习题，书中给出的解法并不是唯一的。事实上，教材中的很多习题都是可以有多种解法的，而我们给出的解法也不一定是最好的或是最简的。对于一些典型习题，希望读者能自己思考是否有多种解法，这将有助于对数学知识的融会贯通，提高自己的解题能力。

在本书的编写过程中，合肥工业大学数学系的赵征权、袁革、吴磊、刘植、熊莲花、王莉等老师提供了习题解答，也得到数学系的全体老师的大力支持。在此谨向他们及本书主审潘杰教授表示衷心的感谢。

限于作者的水平，书中给出的解答难免会有错误与缺陷，希望广大读者提出宝贵的批评和建议，以便今后再版时加以改进。

编　者

2008.3

目录

第一章　函　　数

第一节　函数的概念

1. 求下列各函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$；　　(2) $f(x)=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$；

(3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；　　(4) $\varphi(t)=\dfrac{1}{t}+\sqrt{1-t^2}$.

解　(1) 由$\begin{cases}x-1>0\\ \ln(x-1)\neq 0\end{cases}$得　定义域为$\{x\mid x>1 且 x\neq 2\}$；

(2) 由$-1\leqslant\dfrac{2x}{1+x}\leqslant 1$得　定义域为$\{x\mid -\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1\}$；

(3) 由$\begin{cases}\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0\\ 1-x\neq 0\end{cases}$得　定义域为$\{x\mid -1\leqslant x<1\}$；

(4) 由$\begin{cases}t\neq 0\\ 1-t^2\geqslant 0\end{cases}$得　定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$.

2. 设 $f(u)$ 的定义域是 $0<u\leqslant 1$，求下列函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；　　(2) $f(\sin x)$.

解　(1) 由 $0<x^2\leqslant 1$ 得　$f(x^2)$ 的定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$；

(2) 由 $0<\sin x\leqslant 1$ 得　$f(\sin x)$ 的定义域为 $2k\pi<x<(2k+1)\pi$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

3. 下列各对函数是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=$，$g(x)=\sin^2x+\cos^2x$.

解　(1) 不是同一个函数，因 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$；

(2) 不是同一个函数，因 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g(x)=-x\neq f(x)$；

(3) 是同一个函数.

4. (1) 设 $f(x+3)=2x^3-2x^2+5x-1$，求 $f(x)$；

(2) 设 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{3x-1}{3x+1}$，求 $f(x)$.

解　(1) 令 $x+3=t$ 则

$$f(t)=2(t-3)^3-2(t-3)^2+5(t-3)-1,$$

即

$$f(x)=2(x-3)^3-2(x-3)^2+5(x-3)-1;$$

(2) 令 $\frac{x}{x-1}=t$，即 $x=\frac{t}{t-1}$，则

$$f(t)=\frac{3\cdot\frac{t}{t-1}-1}{3\cdot\frac{t}{t-1}+1}=\frac{2t+1}{4t-1},$$

即
$$f(x)=\frac{2x+1}{4x-1}.$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$，求 $f[g(x)]$.

解 当 $|x|\neq 1$ 时，$|g(x)|>1$；当 $|x|=1$ 时，$|g(x)|=1$.
所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}0, & |g(x)|>1,\\ 1, & |g(x)|=1,\end{cases}$$

即

$$f[g(x)]=\begin{cases}0, & |x|\neq 1,\\ 1, & |x|=1.\end{cases}$$

第二节 函数的几种特性

1. 证明 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\forall x\in[-1,1]$ 有 $|f(x)|=\left|\frac{x}{x^2+1}\right|\leqslant\frac{1}{x^2+1}\leqslant 1$，当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，$\forall x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 有

$$|f(x)|=\left|\frac{x}{x^2+1}\right|\leqslant\left|\frac{x}{x^2}\right|\leqslant\frac{1}{|x|}\leqslant 1,$$

即

$$\forall x\in(-\infty,+\infty)\text{ 恒有 }|f(x)|\leqslant 1,$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

2. 证明 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

证 对任意 $M>0$，取 $x_0=\frac{1}{\sqrt{M+1}}\in(0,1)$，则

$$|f(x_0)|=\frac{1}{x_0^2}=M+1>M.$$

故 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

3. 证明两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

证 设 $f(x)$、$g(x)$ 均为偶函数，令 $F(x)=f(x)g(x)$，则

$$F(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = F(x),$$

所以两个偶函数的乘积是偶函数.

同理可证:两个奇函数的乘积是偶函数，一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

4. 讨论下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$;　　(2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$;

(3) $f(x) = x^3 - 3x^4 + x^6$;　　(4) $f(x) = x + \sin x$.

解 (1) 因为

$$f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = f(x),$$

所以 $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ 为偶函数;

(2) 因为

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x),$$

所以 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 为奇函数;

(3) 因为

$$f(-x) = (-x)^2 - 3(-x)^4 + (-x)^6 = x^2 - 3x^4 + x^6 = f(x),$$

所以 $f(x) = x^2 - 3x^4 + x^6$ 为偶函数;

(4) 因为

$$f(-x) = -x + \sin(-x) = -x - \sin x = -f(x),$$

所以 $f(x) = x + \sin x$ 为奇函数.

5. 设 $g(x)$ 与 $f(x)$ 分别为 $(-\infty, +\infty)$ 的单调增加函数与单调减少函数，令 $h(x) = g[f(x)]$，$\varphi(x) = f[g(x)]$，试讨论 $h(x)$ 与 $\varphi(x)$ 各自的单调性.

解 $\forall x_1 < x_2$，有 $f(x_2) < f(x_1)$

又因为 $g(x)$ 单调增加，所以 $g[f(x_2)] < g[f(x_1)]$，即 $h(x_2) > h(x_1)$，

所以 $h(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的单调减少函数.

同理可知 $\varphi(x)$ 亦为 $(-\infty, +\infty)$ 内的单调减少函数.

第三节 初 等 函 数

1. 利用 $y = \sin x$ 的图形，画出下列函数的图形:

(1) $y = \sin x + 1$;　　(2) $y = 2\sin x$.

解 (1) $y = \sin x + 1$ 的图形如图 1 - 1 所示;

(2) $y = 2\sin x$ 的图形如图 1 - 2 所示.

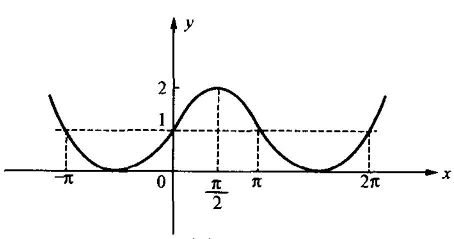

图 1 - 1

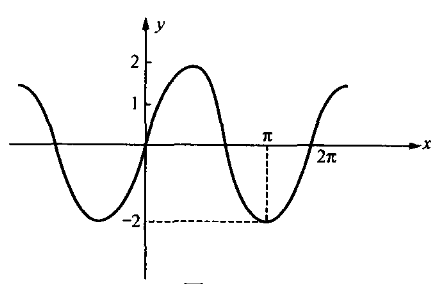

图 1 - 2

2. (1) 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$；

(2) 设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求 $f(\cos x)$.

解 (1) 因为

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

所以

$$f(x)=x^2-2;$$

(2) 因为

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right),$$

所以

$$f(\cos x)=1+(1-2\cos^2 x)=2\sin^2 x.$$

3. 若点(1,2)既在 $y=\sqrt{ax+b}$ 的图像上，又在其反函数的图像上，求 a，b 的值.

解 根据题意知：

$$\begin{cases}2=\sqrt{a+b},\\1=\sqrt{2a+b},\end{cases}$$

解得 $a=-3$，$b=7$.

4. 给定函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，令 $f_1(x)=-f(x)$；$f_2(x)=f(-x)$；$f_3(x)=-f(-x)$，说明函数 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$，$y=f_3(x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形的位置关系.

解 $y=f_1(x)$ 与 $y=f(x)$ 关于 x 轴对称；$y=f_2(x)$ 与 $y=f(x)$ 关于 y 轴对称；$y=f_3(x)$ 与 $y=f(x)$ 关于原点对称.

第四节 两个常用不等式

1. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数，称

$$\frac{n}{\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)}$$

为 $a_1,\cdots,a_n$ 的调和平均值，利用算术平均值与几何平均值的关系证明几何平均值与调和平均值的关系：

对任意 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有 $\sqrt[n]{a_1,a_2,\cdots,a_n}\geqslant\dfrac{n}{\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)}$.

证 因为

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{a_n}}\leqslant\frac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}{n},$$

又 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数.

所以

$$\sqrt[n]{a_1,a_2,\cdots,a_n}\geqslant\frac{n}{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)}.$$

2. 证明下列不等式：

(1) $|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$；

(2) $|x_1+x_2+\cdots+x_n+x|\geqslant|x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$.

证 (1) $|(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})+x_n|\leqslant|x_1+\cdots+x_{n-1}|+|x_n|\leqslant|x_1+\cdots+x_{n-2}|+|x_{n-1}|+|x_n|\leqslant\cdots\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$；

(2) 因为

$$|x|-|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x+x_1+x_2+\cdots+x_n|,$$

又

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|,$$

所以

$|x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)\leqslant|x|-|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1+x_2+\cdots+x_n+x|$，

即

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n+x|\geqslant|x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|).$$

总 复 习 题 一

1. 已知 $f(e^x-1)=x^2+1$，则 $f(x)$ 的定义域为________.

解 $f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$.

令 $e^x-1=t$，则 $x=\ln(t+1)$，

所以 $f(t)=\ln^2(t+1)+1$，即 $f(x)=\ln^2(x+1)+1$.

由 $x+1>0$ 得 $f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$.

2. 设函数 $y=\cos x$ 在$(-\pi,0)$内有定义，则其反函数为________.

解 其反函数为 $y=-\arccos x$ 或 $y=\arccos(-x)-\pi$.

因为 $y=\cos x=\cos(-x)$，$-x\in(0,\pi)$，

所以 $-x=\arccos y$，即 $y=-\arccos x$，

或 $y=\cos x=-\cos(\pi+x)$，$\pi+x\in(0,\pi)$，

所以 $\pi+x=\arccos(-y)$ 即 $y=\arccos(-x)-\pi$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$________.

解 $f[f(x)]=1$.

因为 当$x\in(-\infty,+\infty)$时，$|f(x)|\leqslant1$.

所以 $f[f(x)]=1$.

4. $f(x)=\begin{cases}\cos x-x, & -\pi\leqslant x\leqslant0,\\ \cos x+x, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 在其定义域内是( ).

(A) 无界函数. (B) 偶函数. (C) 单调函数. (D) 周期函数.

解 答案为 B.

由题设可知 $f(x)=\cos x+|x|,\ x\in[-\pi,\pi]$,

所以,答案应为 B.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 2x, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -2x, & x<0,\end{cases}$ 则 $x\leqslant 0$ 时, $f[g(x)]=($ $)$.

(A) $2x$. (B) x^2. (C) $4x^2$. (D) $-4x^2$.

解 答案为 C.

因为 当 $x\leqslant 0$ 时, $g(x)\geqslant 0$,

所以 $f[g(x)]=g^2(x)=(-2x)^2=4x^2$.

6. 设 $f(x)$ 是 x 的二次函数, 且 $f(0)=1$, $f(x+1)-f(x)=2x$, 求 $f(x)$.

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,

则 $f(0)=c=1$,

所以 $f(x)=ax^2+bx+1$,

又 $f(x+1)-f(x)=2x$,

所以 $a(x+1)^2+b(x+1)+1-ax^2-bx-1=2x$.

即 $2ax+a+b=2x$,

所以 $\begin{cases}2a=2,\\ a+b=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1,\end{cases}$

所以 $f(x)=x^2-x+1$.

7. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数, 且 $f(1)=a$, 又 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$.

(1) 用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$;

(2) a 为何值时, $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

解 (1) 因为 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$.

所以 $f(-1+2)-f(-1)=f(2)$, 又 $f(x)$ 为奇函数.

所以 $f(1)+f(1)=f(2)$, 即 $f(2)=2a$,

又 $f(3+2)-f(3)=f(5)-f(1)-f(2)=f(2)$,

所以 $f(5)=2f(2)+f(1)=5a$;

(2) 要使 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数必有

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $f(x+2)=f(x)$,

又 $f(x+2)-f(x)=f(2)$,

所以 $f(2)=0$, 即 $2a=0$,

所以 当 $a=0$ 时, $f(x+2)=f(x)$,

即 当 $a=0$ 时, $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

8. 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是单调递增的函数, 证明: 若 $f(x)<g(x)$, 则

$$f[f(x)]<g[g(x)],$$

证 若 $f(x)<g(x)$, 则

$$f[f(x)]<f[g(x)]<g[g(x)].$$

9. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[-l,l]$, 证明 $f(x)$ 可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

证 设 $g(x)$, $h(x)$ 分别为 $[-l,l]$ 上的奇函数与偶函数, 令 $f(x)=g(x)+h(x)$, 则

$f(-x)=g(-x)+h(-x)=-g(x)+h(x).$

由 $\begin{cases} f(x)=g(x)+h(x), \\ f(-x)=-g(x)+h(x), \end{cases}$

得 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, $h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$,

即 $f(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$,

又 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$为奇函数，$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$为偶函数，

所以 $f(x)$可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

第二章 极限与连续

第一节 数列的极限

1. 观察下列数列$\{x_n\}$的变化趋势，判断是否有极限？若有极限，写出其极限值.

(1) $x_n=\dfrac{1}{2^n+1}$；　(2) $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n^2}$；　(3) $x_n=(-1)^n-\dfrac{1}{n}$；

(4) $x_n=\cos\dfrac{\pi}{n}$；　(5) $x_n=2^{(-1)^n}$；　(6) $x_n=\lg\dfrac{1}{n}$.

解 (1) 有，0；　(2) 有，0；　(3) 无；　(4) 有，1；　(5) 无；　(6) 无.

2. 用数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\arctan n=0$.

证 (1) 由于

$$|x_n-a|=\left|\frac{3n-1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{4n+2}\leqslant\frac{5}{4n},$$

因此对于任意给定的正数 ε，要使得$|x_n-a|<\varepsilon$，只要$\dfrac{5}{4n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{5}{4\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{5}{4\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，总有$|x_n-a|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$；

(2) 由于

$$|x_n-a|=\left|\frac{1}{n}\arctan n-0\right|=\frac{1}{n}\arctan n\leqslant\frac{1}{n}\frac{\pi}{2},$$

因此对于任意给定的正数 ε，要使$|x_n-a|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n}\dfrac{\pi}{2}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{\pi}{2\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{\pi}{2\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，总有$|x_n-a|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\arctan n=0$.

3. 若 n 越大，$|x_n-a|$越接近于 0，则数列$\{x_n\}$的极限为 a，这种说法是否正确？举例说明.

解 不正确. 例如取 $x_n=2+\dfrac{1}{n}$，$a=1$.

4. 举例说明下列描述作为极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义是不是正确的：

(1) 对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n-a<\varepsilon$ 成立；

(2) 对任意的 $\varepsilon>0$，存在无限多个 x_n，使得$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.

解 (1) 不正确. 例如取 $x_n=\dfrac{1}{n}$，$a=1$；

(2) 不正确. 例如取 $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$，$a=0$.

5. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. 并举例说明其逆命题不成立.

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以对于任意给定的正数 ε，总存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.

由于 $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$，有 $||x_n|-|a||<\varepsilon$ 成立，所以$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

其逆命题不成立. 例如取 $x_n=(-1)^n$，显然$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$. 但$\{x_n\}$发散.

第二节 函数的极限

1. 根据极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+5}{3x}=2$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$；　　(4) $\lim\limits_{x\to2}x^2=4$（提示:限制 $1<x<3$).

证 (1) 由于$\left|\dfrac{6x+5}{3x}-2\right|=\left|\dfrac{5}{3x}\right|=\dfrac{5}{3|x|}$，

对于任意给定的正数 ε，要使得$\left|\dfrac{6x+5}{3x}-2\right|<\varepsilon$，只需$\dfrac{5}{3|x|}<\varepsilon$，即$|x|>\dfrac{5}{3\varepsilon}$.

故取 $X=\dfrac{5}{3\varepsilon}>0$，当$|x|>X$ 时，恒有$\left|\dfrac{6x+5}{3x}-2\right|<\varepsilon$ 成立，

所以
$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+5}{3x}=2;$$

(2) 由于$\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{|x|}$，

对于任意给定的正数 ε，要使得$\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$，只需$\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$，即$|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

故取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$，当$|x|>X$ 时，恒有$\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$ 成立，

所以
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0;$$

(3) 由于 $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|$，

对于任意给定的正数 ε，要使得$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$，只需$|x-1|<\varepsilon$. 故取 $\delta=\varepsilon>0$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，恒有$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$ 成立，

所以
$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2;$$

(4) 由于$|x^2-4|=|x+2||x-2|$，不妨限制 $1<x<3$，则
$$|x^2-4|=|x+2||x-2|<5|x-2|,$$
对于任意给定的正数 ε，要使得$|x^2-4|<\varepsilon$，只需 $5|x-2|<\varepsilon$，即

$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$. 故取 $\delta=\min\left[\dfrac{\varepsilon}{5},1\right]$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，恒有$|x^2-4|<\varepsilon$ 成立，

所以 $$\lim_{x\to 2}x^2=4.$$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x>0, \\ -1-x, & x\leqslant 0. \end{cases}$

(1) 作出函数 $f(x)$ 的图形;(2) 根据图形求出 $f(0^-)$, $f(0^+)$;(3) 问 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在吗?

解 (1) $f(x)$ 的图形如图 2-1 所示;

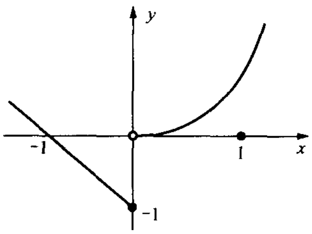

图 2-1

(2) 由图可看出 $f(0^-)=-1$, $f(0^+)=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

3. 设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$,

(1) 求 $f(0^-)$, $f(0^+)$, 并问 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在?

(2) 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$, 并问 $\lim\limits_{x\to \infty}f(x)$ 是否存在?

解 $f(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$

(1) $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$,

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$,

因为 $f(0^-)\neq f(0^+)$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在;

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}1=1$,

$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(-1)=-1$,

因为 $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\neq\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$, 所以 $\lim\limits_{x\to \infty}f(x)$ 不存在.

4. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\lg\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$.

证 对于任意给定的正数 ε, 要使得 $\left|\lg\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-0\right|<\varepsilon$, 只需 $\left|\lg\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right|<\varepsilon$,

即 $x>\dfrac{1}{10^{\varepsilon}-1}$ 或 $x<\dfrac{1}{10^{-\varepsilon}-1}(<0)$. 故取

$X=\max\left(\dfrac{1}{10^{\varepsilon}-1}, -\dfrac{1}{10^{-\varepsilon}-1}\right)>0$, 当 $|x|>X$ 时, 恒有 $\left|\lg\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-0\right|<\varepsilon$ 成立,

所以

$$\lim_{x\to\infty}\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)=0.$$

第三节 极 限 的 性 质

1. 下列各题的做法是否正确? 为什么?

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\dfrac{1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}=0\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n}{n^2}=0$.