

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUOJIAJI GUIHUA JIAOCAI PEITAO JIAOCAI

GAODENGSHUXUE
XITIQUANJIE ZHINAN

高等数学 习题全解指南

朱士信 唐 烁 宁荣健 编



中国电力出版社
<http://jc.cepp.com.cn>

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUOJIAJI GUIHUA JIAOCAI PEITAO JIAOCAI

013/409A

2008

GAODENGSHUXUE
XITIQUANJIE ZHINAN

高等数学 习题全解指南

朱士信 唐 烁 宁荣健 编
潘 杰 主审



中国电力出版社
<http://jc.cepp.com.cn>

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材。本书是与朱士信、唐烁、宁荣健编写的《普通高等教育“十一五”国家级规划教材 高等数学》相配套的学习辅导书，书中内容包含了《高等数学》中全部习题的详细解答。

本书不仅可作为高等院校学生学习《高等数学》课程的参考书及讲授《高等数学》课程教师的教学参考书，也可作为准备报考高等学校理工科各专业研究生学生的复习参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学习题全解指南/朱士信, 唐烁, 宁荣健编. —北京:
中国电力出版社, 2008

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材

ISBN 978-7-5083-6914-3

I. 高… II. ①朱…②唐…③宁… III. 高等数学—高等学校—解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 038690 号

中国电力出版社出版、发行

(北京三里河路 6 号 100044 <http://jc.cepp.com.cn>)

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2008 年 4 月第一版 2008 年 4 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 19.75 印张 482 千字

定价 28.00 元

敬告读者

本书封面贴有防伪标签，加热后中心图案消失
本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换

版 权 专 有 翻 印 必 究

前 言

本书是与朱士信、唐烁、宁荣健编写的《普通高等教育“十一五”国家级规划教材 高等数学》相配套的学习辅导书，书中内容包含了《高等数学》中全部习题的详细解答。

对于学习《高等数学》课程的学生来说，不仅要掌握《高等数学》课程中的基本概念、基本理论、基本方法，而且要通过学习，培养熟练的运算能力、逻辑推理能力、抽象概括问题的能力及综合运用数学知识分析和解决问题的能力。要达到这样的目的，严格而充分的基本训练是必不可少的。著名数学家华罗庚在《高等数学引论》中关于习题有精辟的论述：“习题的目的首先是熟练和巩固学习了的东西；其二是启发大家灵活运用，独立思考；其三是融会贯通，出些综合性的习题，把不同部门的数学沟通起来。”苏步青院士说他自己做过一万道微积分习题。由此可见习题在数学教学中的地位 and 作用是举足轻重的，也足以说明我们的前辈大师们为什么有如此深厚的数学功底。

编写本书的主旨，当然不是“越俎代庖”，更不会限制学生独立思考。所以希望读者一定要正确运用本书，只有在经过一番独立思考而不得其解或对自己的解答无法确定时，才去参考解答。否则对学习没有任何帮助，也违背我们编写本书的初衷。

我们需要强调的是，虽然书中内容包含了《普通高等教育“十一五”国家级规划教材 高等数学》中全部习题的详细解答，但对于大部分的习题，书中给出的解法并不是唯一的。事实上，教材中的很多习题都是可以有多种解法的，而我们给出的解法也不一定是最好的或是最简的。对于一些典型习题，希望读者能自己思考是否有多种解法，这将有助于对数学知识的融会贯通，提高自己的解题能力。

在本书的编写过程中，合肥工业大学数学系的赵征权、袁革、吴磊、刘植、熊莲花、王莉等老师提供了习题解答，也得到数学系的全体老师的大力支持。在此谨向他们及本书主审潘杰教授表示衷心的感谢。

限于作者的水平，书中给出的解答难免会有错误与缺陷，希望广大读者提出宝贵的批评和建议，以便今后再版时加以改进。

编 者

2008.3

目 录

前 言

第一章 函数	1
第一节 函数的概念	1
第二节 函数的几种特性	2
第三节 初等函数	3
第四节 两个常用不等式	4
总复习题一	5
第二章 极限与连续	8
第一节 数列的极限	8
第二节 函数的极限	9
第三节 极限的性质	10
第四节 无穷小、无穷大	11
第五节 极限的存在准则	13
第六节 连续函数及其性质	16
总复习题二	19
第三章 导数与微分	26
第一节 导数的概念	26
第二节 求导的运算法则	29
第三节 高阶导数	31
第四节 隐函数与参变量函数的求导方法	34
第五节 函数的微分	37
总复习题三	39
第四章 导数的应用	46
第一节 微分中值定理	46
第二节 洛必达 (L'Hospital) 法则	49
第三节 Taylor 中值定理	53
第四节 函数的单调性与极值	55
第五节 函数的凹凸性与曲线的拐点	62
第六节 曲线整体形状的研究	64
第七节 导数在不等式证明中的应用	67
总复习题四	69
第五章 不定积分与定积分	78
第一节 定积分的概念及性质	78
第二节 微积分基本公式	80

第三节	不定积分的概念与性质	82
第四节	换元积分法	83
第五节	分部积分法	91
第六节	有理函数的积分及应用	94
第七节	广义积分	99
	总复习题五	103
第六章	定积分的应用	112
第二节	定积分在几何学中的应用	112
第三节	定积分在物理学中的应用	116
	总复习题六	117
第七章	常微分方程式	122
第一节	常微分方程的基本概念	122
第二节	一阶微分方程的常见类型及解法	123
第三节	二阶线性微分方程理论及解法	131
第四节	其他若干类型的高阶微分方程及解法	137
	总复习题七	140
第八章	向量代数与空间解析几何	146
第一节	向量及其线性运算	146
第二节	向量的乘积	147
第三节	空间曲面	149
第四节	空间曲线	153
	总复习题八	156
第九章	多元函数微分学	163
第一节	多元函数的概念	163
第二节	二元函数的极限与连续	165
第三节	偏导数	167
第四节	全微分	172
第五节	多元复合函数的求导法则	174
第六节	隐函数的微分法	179
第七节	方向导数和梯度	183
第八节	二元函数的 Taylor 公式	186
第九节	多元函数的极值	187
第十节	多元函数微分学的几何应用	193
	总复习题九	198
第十章	重积分	204
第一节	二重积分的概念与性质	204
第二节	二重积分的计算	206
第三节	三重积分的概念及性质	218
第四节	三重积分的计算	219

第五节 重积分的应用	222
总复习题十	225
第十一章 曲线积分	232
第一节 对弧长的曲线积分	232
第二节 对坐标的曲线积分	236
第三节 格林 (Green) 公式	238
第四节 平面曲线积分与积分路径无关的条件	242
第五节 曲线积分的应用	244
总复习题十一	247
第十二章 曲面积分	254
第一节 对面积的曲面积分	254
第二节 对坐标的曲面积分	257
第三节 Gauss 公式及其应用	260
第四节 Stokes 公式及其应用	262
总复习题十二	263
第十三章 无穷级数	270
第一节 常数项级数的概念及其性质	270
第二节 正项级数及其审敛法	271
第三节 绝对收敛与条件收敛	275
第四节 幂级数	278
第五节 函数的幂级数展开式	283
第六节 幂级数的应用	287
第七节 Fourier 级数	289
总复习题十三	297

第一章 函 数

第一节 函数的概念

1. 求下列各函数的定义域:

$$(1) f(x) = \frac{1}{\ln(x-1)};$$

$$(2) f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x};$$

$$(3) f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$(4) \varphi(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1-t^2}.$$

解 (1) 由 $\begin{cases} x-1 > 0 \\ \ln(x-1) \neq 0 \end{cases}$ 得 定义域为 $\{x \mid x > 1 \text{ 且 } x \neq 2\}$;

(2) 由 $-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1$ 得 定义域为 $\{x \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 1\}$;

(3) 由 $\begin{cases} \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases}$ 得 定义域为 $\{x \mid -1 \leq x < 1\}$;

(4) 由 $\begin{cases} t \neq 0 \\ 1-t^2 \geq 0 \end{cases}$ 得 定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

2. 设 $f(u)$ 的定义域是 $0 < u \leq 1$, 求下列函数的定义域:

$$(1) f(x^2);$$

$$(2) f(\sin x).$$

解 (1) 由 $0 < x^2 \leq 1$ 得 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$;

(2) 由 $0 < \sin x \leq 1$ 得 $f(\sin x)$ 的定义域为 $2k\pi < x < (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

3. 下列各对函数是否表示同一函数? 为什么?

$$(1) f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, g(x) = x+1;$$

$$(2) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(3) f(x) =, g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

解 (1) 不是同一个函数, 因 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

(2) 不是同一个函数, 因 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $g(x) = -x \neq f(x)$;

(3) 是同一个函数.

4. (1) 设 $f(x+3) = 2x^3 - 2x^2 + 5x - 1$, 求 $f(x)$;

(2) 设 $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{3x-1}{3x+1}$, 求 $f(x)$.

解 (1) 令 $x+3 = t$ 则

$$f(t) = 2(t-3)^3 - 2(t-3)^2 + 5(t-3) - 1,$$

即

$$f(x) = 2(x-3)^3 - 2(x-3)^2 + 5(x-3) - 1;$$

(2) 令 $\frac{x}{x-1} = t$, 即 $x = \frac{t}{t-1}$, 则

$$f(t) = \frac{3 \cdot \frac{t}{t-1} - 1}{3 \cdot \frac{t}{t-1} + 1} = \frac{2t+1}{4t-1},$$

即
$$f(x) = \frac{2x+1}{4x-1}.$$

5. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| \leq 1 \\ 2, & |x| > 1 \end{cases}$, 求 $f[g(x)]$.

解 当 $|x| \neq 1$ 时, $|g(x)| > 1$; 当 $|x| = 1$ 时, $|g(x)| = 1$.

所以

$$f[g(x)] = \begin{cases} 0, & |g(x)| > 1, \\ 1, & |g(x)| = 1, \end{cases}$$

即

$$f[g(x)] = \begin{cases} 0, & |x| \neq 1, \\ 1, & |x| = 1. \end{cases}$$

第二节 函数的几种特性

1. 证明 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

证 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $\forall x \in [-1, 1]$ 有 $|f(x)| = \left| \frac{x}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1$, 当 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 时, $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 有

$$|f(x)| = \left| \frac{x}{x^2+1} \right| \leq \left| \frac{x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{|x|} \leq 1,$$

即

$$\forall x \in (-\infty, +\infty) \text{ 恒有 } |f(x)| \leq 1,$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

2. 证明 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

证 对任意 $M > 0$, 取 $x_0 = \frac{1}{\sqrt{M+1}} \in (0, 1)$, 则

$$|f(x_0)| = \frac{1}{x_0^2} = M+1 > M.$$

故 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

3. 证明两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

证 设 $f(x), g(x)$ 均为偶函数, 令 $F(x) = f(x)g(x)$, 则

$$F(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = F(x),$$

所以两个偶函数的乘积是偶函数.

同理可证:两个奇函数的乘积是偶函数,一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

4. 讨论下列函数的奇偶性:

- (1) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$; (2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$;
 (3) $f(x) = x^3 - 3x^4 + x^6$; (4) $f(x) = x + \sin x$.

解 (1) 因为

$$f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = f(x),$$

所以 $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ 为偶函数;

(2) 因为

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x),$$

所以 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 为奇函数;

(3) 因为

$$f(-x) = (-x)^2 - 3(-x)^4 + (-x)^6 = x^2 - 3x^4 + x^6 = f(x),$$

所以 $f(x) = x^2 - 3x^4 + x^6$ 为偶函数;

(4) 因为

$$f(-x) = -x + \sin(-x) = -x - \sin x = -f(x),$$

所以 $f(x) = x + \sin x$ 为奇函数.

5. 设 $g(x)$ 与 $f(x)$ 分别为 $(-\infty, +\infty)$ 的单调增加函数与单调减少函数, 令 $h(x) = g[f(x)]$, $\varphi(x) = f[g(x)]$, 试讨论 $h(x)$ 与 $\varphi(x)$ 各自的单调性.

解 $\forall x_1 < x_2$, 有 $f(x_2) < f(x_1)$

又因为 $g(x)$ 单调增加, 所以 $g[f(x_2)] < g[f(x_1)]$, 即 $h(x_2) > h(x_1)$,

所以 $h(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的单调减少函数.

同理可知 $\varphi(x)$ 亦为 $(-\infty, +\infty)$ 内的单调减少函数.

第三节 初 等 函 数

1. 利用 $y = \sin x$ 的图形, 画出下列函数的图形:

- (1) $y = \sin x + 1$; (2) $y = 2\sin x$.

解 (1) $y = \sin x + 1$ 的图形如图 1-1 所示;

(2) $y = 2\sin x$ 的图形如图 1-2 所示.

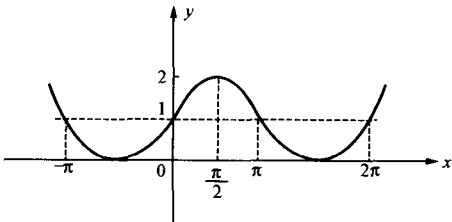


图 1-1

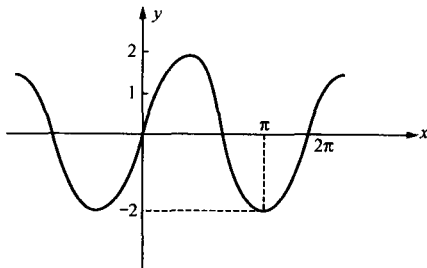


图 1-2

2. (1) 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$;

(2) 设 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$, 求 $f(\cos x)$.

解 (1) 因为

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2,$$

所以

$$f(x) = x^2 - 2;$$

(2) 因为

$$f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right),$$

所以

$$f(\cos x) = 1 + (1 - 2\cos^2 x) = 2\sin^2 x.$$

3. 若点(1,2)既在 $y = \sqrt{ax+b}$ 的图像上, 又在其反函数的图像上, 求 a, b 的值.

解 根据题意知:

$$\begin{cases} 2 = \sqrt{a+b}, \\ 1 = \sqrt{2a+b}, \end{cases}$$

解得 $a = -3, b = 7$.

4. 给定函数 $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$, 令 $f_1(x) = -f(x); f_2(x) = f(-x); f_3(x) = -f(-x)$, 说明函数 $y = f_1(x), y = f_2(x), y = f_3(x)$ 的图形与 $y = f(x)$ 的图形的位置关系.

解 $y = f_1(x)$ 与 $y = f(x)$ 关于 x 轴对称; $y = f_2(x)$ 与 $y = f(x)$ 关于 y 轴对称; $y = f_3(x)$ 与 $y = f(x)$ 关于原点对称.

第四节 两个常用不等式

1. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个正数, 称

$$\frac{n}{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)}$$

为 a_1, \dots, a_n 的调和平均值, 利用算术平均值与几何平均值的关系证明几何平均值与调和平均值的关系:

对任意 n 个正数 a_1, a_2, \dots, a_n 有 $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)}$.

证 因为

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n},$$

又 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个正数.

所以

$$\sqrt[n]{a_1, a_2, \dots, a_n} \geq \frac{n}{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)}.$$

2. 证明下列不等式:

$$(1) |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|;$$

$$(2) |x_1 + x_2 + \dots + x_n + x| \geq |x| - (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|).$$

证 (1) $|(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + x_n| \leq |x_1 + \dots + x_{n-1}| + |x_n| \leq |x_1 + \dots + x_{n-2}| + |x_{n-1}| + |x_n| \leq \dots \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|;$

(2) 因为

$$|x| - |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x + x_1 + x_2 + \dots + x_n|,$$

又

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|,$$

所以

$$|x| - (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) \leq |x| - |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1 + x_2 + \dots + x_n + x|,$$

即

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n + x| \geq |x| - (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|).$$

总 复 习 题 一

1. 已知 $f(e^x - 1) = x^2 + 1$, 则 $f(x)$ 的定义域为 _____.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$.

令 $e^x - 1 = t$, 则 $x = \ln(t + 1)$,

所以 $f(t) = \ln^2(t + 1) + 1$, 即 $f(x) = \ln^2(x + 1) + 1$.

由 $x + 1 > 0$ 得 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$.

2. 设函数 $y = \cos x$ 在 $(-\pi, 0)$ 内有定义, 则其反函数为 _____.

解 其反函数为 $y = -\arccos x$ 或 $y = \arccos(-x) - \pi$.

因为 $y = \cos x = \cos(-x)$, $-x \in (0, \pi)$,

所以 $-x = \arccos y$, 即 $y = -\arccos x$,

或 $y = \cos x = -\cos(\pi + x)$, $\pi + x \in (0, \pi)$,

所以 $\pi + x = \arccos(-y)$ 即 $y = \arccos(-x) - \pi$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则函数 $f[f(x)] =$ _____.

解 $f[f(x)] = 1$.

因为 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, $|f(x)| \leq 1$.

所以 $f[f(x)] = 1$.

4. $f(x) = \begin{cases} \cos x - x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \cos x + x, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$ 在其定义域内是 ().

(A) 无界函数.

(B) 偶函数.

(C) 单调函数.

(D) 周期函数.

解 答案为 B.

由题设可知 $f(x) = \cos x + |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$,

所以, 答案应为 B.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 2x, & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -2x, & x < 0, \end{cases}$ 则 $x \leq 0$ 时, $f[g(x)] = (\quad)$.

(A) $2x$. (B) x^2 . (C) $4x^2$. (D) $-4x^2$.

解 答案为 C.

因为 当 $x \leq 0$ 时, $g(x) \geq 0$,

所以 $f[g(x)] = g^2(x) = (-2x)^2 = 4x^2$.

6. 设 $f(x)$ 是 x 的二次函数, 且 $f(0) = 1$, $f(x+1) - f(x) = 2x$, 求 $f(x)$.

解 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$,

则 $f(0) = c = 1$,

所以 $f(x) = ax^2 + bx + 1$,

又 $f(x+1) - f(x) = 2x$,

所以 $a(x+1)^2 + b(x+1) + 1 - ax^2 - bx - 1 = 2x$.

即 $2ax + a + b = 2x$,

所以 $\begin{cases} 2a = 2, \\ a + b = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a = 1, \\ b = -1, \end{cases}$

所以 $f(x) = x^2 - x + 1$.

7. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的奇函数, 且 $f(1) = a$, 又 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x+2) - f(x) = f(2)$.

(1) 用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$;

(2) a 为何值时, $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

解 (1) 因为 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x+2) - f(x) = f(2)$.

所以 $f(-1+2) - f(-1) = f(2)$, 又 $f(x)$ 为奇函数.

所以 $f(1) + f(1) = f(2)$, 即 $f(2) = 2a$,

又 $f(3+2) - f(3) = f(5) - f(1) - f(2) = f(2)$,

所以 $f(5) = 2f(2) + f(1) = 5a$;

(2) 要使 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数必有

$\forall x \in (-\infty, +\infty)$, $f(x+2) = f(x)$,

又 $f(x+2) - f(x) = f(2)$,

所以 $f(2) = 0$, 即 $2a = 0$,

所以 当 $a = 0$ 时, $f(x+2) = f(x)$,

即 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

8. 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是单调递增的函数, 证明: 若 $f(x) < g(x)$, 则

$$f[f(x)] < g[g(x)],$$

证 若 $f(x) < g(x)$, 则

$$f[f(x)] < f[g(x)] < g[g(x)].$$

9. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[-l, l]$, 证明 $f(x)$ 可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

证 设 $g(x)$, $h(x)$ 分别为 $[-l, l]$ 上的奇函数与偶函数, 令 $f(x) = g(x) + h(x)$, 则

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = -g(x) + h(x).$$

$$\text{由 } \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x), \\ f(-x) = -g(x) + h(x), \end{cases}$$

$$\text{得 } g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

$$\text{即 } f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

$$\text{又 } \frac{f(x) - f(-x)}{2} \text{ 为奇函数, } \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ 为偶函数,}$$

所以 $f(x)$ 可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

第二章 极限与连续

第一节 数列的极限

1. 观察下列数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势, 判断是否有极限? 若有极限, 写出其极限值.

$$(1) x_n = \frac{1}{2^n + 1}; \quad (2) x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n^2}; \quad (3) x_n = (-1)^n - \frac{1}{n};$$

$$(4) x_n = \cos \frac{\pi}{n}; \quad (5) x_n = 2^{(-1)^n}; \quad (6) x_n = \lg \frac{1}{n}.$$

解 (1) 有, 0; (2) 有, 0; (3) 无; (4) 有, 1; (5) 无; (6) 无.

2. 用数列极限的定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \arctan n = 0.$$

证 (1) 由于

$$|x_n - a| = \left| \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{5}{4n+2} \leq \frac{5}{4n},$$

因此对于任意给定的正数 ϵ , 要使得 $|x_n - a| < \epsilon$, 只要 $\frac{5}{4n} < \epsilon$, 即 $n > \frac{5}{4\epsilon}$, 取 $N = \left[\frac{5}{4\epsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 总有 $|x_n - a| < \epsilon$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$;

(2) 由于

$$|x_n - a| = \left| \frac{1}{n} \arctan n - 0 \right| = \frac{1}{n} \arctan n \leq \frac{1}{n} \frac{\pi}{2},$$

因此对于任意给定的正数 ϵ , 要使 $|x_n - a| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{n} \frac{\pi}{2} < \epsilon$, 即 $n > \frac{\pi}{2\epsilon}$, 取 $N = \left[\frac{\pi}{2\epsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 总有 $|x_n - a| < \epsilon$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \arctan n = 0$.

3. 若 n 越大, $|x_n - a|$ 越接近于 0, 则数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a , 这种说法是否正确? 举例说明.

解 不正确. 例如取 $x_n = 2 + \frac{1}{n}$, $a = 1$.

4. 举例说明下列描述作为极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义是不是正确的:

(1) 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $x_n - a < \epsilon$ 成立;

(2) 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在无限多个 x_n , 使得 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立.

解 (1) 不正确. 例如取 $x_n = \frac{1}{n}$, $a = 1$;

(2) 不正确. 例如取 $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$, $a = 0$.

5. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$. 并举例说明其逆命题不成立.

证 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 所以对于任意给定的正数 ϵ , 总存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立.

由于 $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$, 有 $||x_n| - |a|| < \epsilon$ 成立, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.

其逆命题不成立. 例如取 $x_n = (-1)^n$, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 1$. 但 $\{x_n\}$ 发散.

第二节 函数的极限

1. 根据极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+5}{3x} = 2; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 \text{ (提示: 限制 } 1 < x < 3 \text{)}.$$

证 (1) 由于 $\left| \frac{6x+5}{3x} - 2 \right| = \left| \frac{5}{3x} \right| = \frac{5}{3|x|}$,

对于任意给定的正数 ϵ , 要使得 $\left| \frac{6x+5}{3x} - 2 \right| < \epsilon$, 只需 $\frac{5}{3|x|} < \epsilon$, 即 $|x| > \frac{5}{3\epsilon}$.

故取 $X = \frac{5}{3\epsilon} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $\left| \frac{6x+5}{3x} - 2 \right| < \epsilon$ 成立,

所以
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+5}{3x} = 2;$$

(2) 由于 $\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$,

对于任意给定的正数 ϵ , 要使得 $\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| < \epsilon$, 只需 $\frac{1}{|x|} < \epsilon$, 即 $|x| > \frac{1}{\epsilon}$.

故取 $X = \frac{1}{\epsilon} > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| < \epsilon$ 成立,

所以
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0;$$

(3) 由于 $\left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| = |x-1|$,

对于任意给定的正数 ϵ , 要使得 $\left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| < \epsilon$, 只需 $|x-1| < \epsilon$. 故取 $\delta = \epsilon > 0$, 当

$0 < |x-1| < \delta$ 时, 恒有 $\left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| < \epsilon$ 成立,

所以
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2;$$

(4) 由于 $|x^2-4| = |x+2||x-2|$, 不妨限制 $1 < x < 3$, 则

$$|x^2-4| = |x+2||x-2| < 5|x-2|,$$

对于任意给定的正数 ϵ , 要使得 $|x^2-4| < \epsilon$, 只需 $5|x-2| < \epsilon$, 即

$|x-2| < \frac{\epsilon}{5}$. 故取 $\delta = \min\left[\frac{\epsilon}{5}, 1\right]$, 当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, 恒有 $|x^2-4| < \epsilon$ 成立,

所以

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x > 0, \\ -1-x, & x \leq 0. \end{cases}$

(1) 作出函数 $f(x)$ 的图形; (2) 根据图形求出 $f(0^-)$, $f(0^+)$; (3) 问 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在吗?

解 (1) $f(x)$ 的图形如图 2-1 所示;

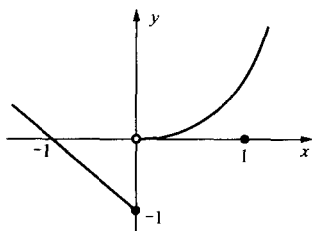


图 2-1

(2) 由图可看出 $f(0^-) = -1$, $f(0^+) = 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

3. 设 $f(x) = \frac{|x|}{x}$,

(1) 求 $f(0^-)$, $f(0^+)$, 并问 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 是否存在?

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, 并问 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 是否存在?

解 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$

(1) $f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$,

$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$,

因为 $f(0^-) \neq f(0^+)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1$,

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在.

4. 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$.

证 对于任意给定的正数 ϵ , 要使得 $\left| \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 0 \right| < \epsilon$, 只需 $\left| \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right| < \epsilon$,

即 $x > \frac{1}{10^\epsilon - 1}$ 或 $x < \frac{1}{10^{-\epsilon} - 1}$ (< 0). 故取

$X = \max\left(\frac{1}{10^\epsilon - 1}, -\frac{1}{10^{-\epsilon} - 1}\right) > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $\left| \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 0 \right| < \epsilon$ 成立,

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

第三节 极限的性质

1. 下列各题的做法是否正确? 为什么?

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \frac{1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-1} = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-1} = 0$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$.