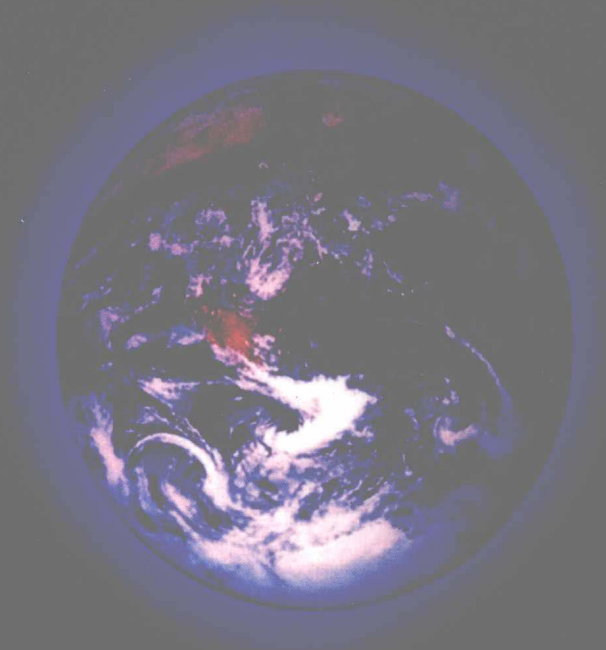




方俊院士文集



科学出版社

www.sciencep.com

方俊院士文集

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书汇集了方俊院士在国内外学术刊物上公开发表的论文及有关报告 41 篇,包含了他在地图学、地球形状与地球重力学、地球固体潮汐与自由振荡等方面的研究成果,概括了他在地图投影、天文重力水准、垂线偏差估算、潮汐改正以及由自由振荡研究地球内部结构等方面所作的重要贡献。

本书可供地球物理学、大地测量学等有关专业科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

方俊院士文集/方俊著. - 北京:科学出版社,2004 10
ISBN 7-03-014462-7

I.方… II.方… III.①方俊-文集②大地测量-文集③地球物理学-文集 IV.P-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 103955 号

责任编辑:高 嵘/封面设计:李 静

科 学 出 版 社 出 版

北京牛黄城根北街 16 号

邮政编码 100717

<http://www.sciencep.com>

武汉大学出版社印刷总厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

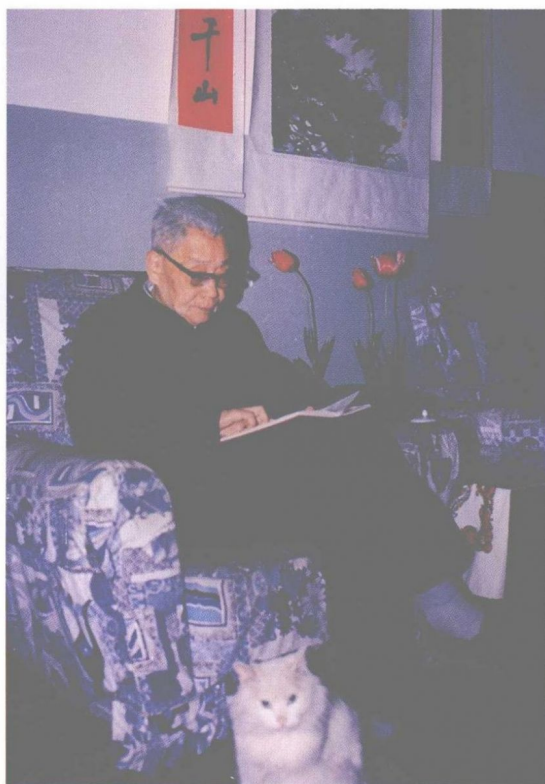
2004 年 10 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2004 年 10 月第一次印刷 印张:20 1/4 插页:1

印数:1-1 000 字数:469 000

定价:70.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



方俊院士在家中



方俊院士与夫人杨明士



方俊院士在工作



1937年，曾世英（中）与方俊（左）、李春昱（右）向美国波士顿博物馆来访人士证实，世界最高峰是珠穆朗玛峰。

纪念方俊院士百年诞辰

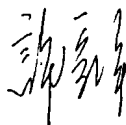
序

2004 年 10 月 26 日,是我国著名大地测量和地球物理学家,中国科学院测量与地球物理所的创立者方俊院士百年诞辰日。方俊院士生前对于我国大地测量和地球物理事业的发展,对于中国科学院测量与地球物理研究所的建立和成长,倾注了毕生的精力,作出了不可磨灭的杰出贡献。为了表达我们对他的崇高敬意,在他百年诞辰之际,我们出版了这本“方俊院士论文集”。

本书汇集了方俊院士在国内外学术刊物上公开发表的论文及有关报告 41 篇,包含了他在地图学、地球形状与地球重力学、地球固体潮汐与自由振荡等方面的研究成果,概括了他在地图投影、天文重力水准、垂线偏差估算、潮汐改正以及由自由振荡研究地球内部结构等方面所作的重要贡献。这些开拓性工作,为我国科学研究领域的发展奠定了基础,也使方俊院士在国内外享有崇高的声誉。为了便于读者了解方俊院士的工作及生平,本书还同时转载了中国现代科学家传记(第二集)所刊的“方俊院士”一文。

最近 20 年来,由于空间及现代测地技术的发展与进步,传统大地测量学及相关学科的研究处在巨大的变革与创新之中,重读方俊院士这些重要论文,使我们深感方俊院士所作科研工作的前瞻性、创造性和开拓性。我们相信,本书的出版也将对我国大地测量及相关领域的研究起到积极的推动作用。

由于时间仓促,文集收录有遗漏或不妥之处,请读者鉴谅。



2004 年 9 月

方俊院士

方俊,字君选。1904年10月26日生于广东广州。大地测量学、地球物理学。

方俊祖籍江苏武进,出身教育世家,祖父母早亡。父亲方遥,精通数学,早年随其叔父到广州创办高等学堂。家学的传统,给幼小的方俊以深刻的影响。辛亥革命后,方俊随父母回到江苏原籍。1912年就读于苏州第一师范学校附属小学。后随家北上,1919年进北京崇德中学。1923年考入唐山交通大学预科,毕业后,转读于该校土木工程系,一年后,因家道清贫中途辍学。在校期间,方俊勤奋好学,成绩优异,对数学兴趣尤浓。1926年,考入天津顺直水利委员会(1927年改名华北水利委员会)当练习生,在河北、山东及辽宁等地从事测量工作,历时4年。长期的野外工作,使他获得丰富的测量与制图知识;刻苦攻读,使他打下扎实的外语(英语、德语)和数学基础。

1930年,方俊经曾世英介绍,进入由丁文江、翁文灏领导的北京地质调查所,协助进行申报馆地图集的编纂工作。这是他一生中的重大转折点。1937年,由于翁文灏的赏识和推荐,方俊得到中华文化基金委员会的奖学金赴德国进修。在当时,这对于没有大学文凭的方俊来说,是一件非同寻常的事。方俊就读于德国耶拿地震研究所(实际是以地震学、重力学及地球物理勘探为主的地球物理研究所),师从著名的重力测量学家O. 迈斯尔(Meisser)教授学习地球重力学,从此确定了他一生研究大地测量和地球物理的方向。在德期间,他多次参观访问著名的蔡司光学仪器厂,获益良多。1938年底,由于纳粹政府歧视我国留学生,经济来源中断,他不得不辗转回国到重庆中央地质调查所,在李善邦主持的物探室工作,并兼职于中央大学地理系,讲授测量学与地图学。1941年,应聘为中央大学土木系教授,讲授大地测量学。1943年,出于对蒋介石任中央大学校长的不满,辞去教授职务,迁家宜宾,任中国地理研究所(由中国庚款委员会建立的一个研究机构)大地测量组副研究员及副主任,兼任同济大学测量系教授,讲授重力测量学——一门在中国首次开设的课程。在地理研究所,方俊主要致力于地图投影及地球重力学研究,发表多篇学术论文,并主编《测量》杂志(我国最早的一份测绘科技期刊)。抗日战争胜利后,方俊随同济大学迁回上海。1947年,接受申报馆委托,续编《中华民国新地图》,同时兼任同济大学教授。1950年,方俊调往南京,任中国科学院地理研究所研究员、大地测量组主任。在这期间,他组织参加黄河及淮河水利委员会的天文三角测量及中国科学院的西藏考察,开展我国的重力摆仪测量试验,创办《测绘学报》刊物。1954~1958年,他先后三次作为我国代表团成员参加苏联国家测绘会议,访问苏、匈、捷等国。1958年,在他的积极倡议下,中国科学院在武汉建立测量制图研究所。1961年,该所扩建为测量与地球物理研究所,方俊任所长(1983年任名誉所长)。在此期间,他促进了国家测绘局的成立,参与并领导我国重力基本网及天文重力水准网的建设,积极开展地球形状与地球重力学的研究,逐步形成一支阵容整齐的研究梯队。60年代后,方俊致力于人造卫星轨道的地球引力摄动研究,为空间科学提供测绘保障。1976年后,他转向固体潮及地球自由振荡的研究,为中国动力大地测量学的发展奠定了基础。1956年起,方俊作为我国第一批研究生导师,开始培养研究生;1981年又被批准为我国第一批博士生导师。

方俊于 1980 年当选为中国科学院学部委员。1978~1987 年,担任第五、六届全国政协委员。1958~1985 年,他被选为中国测绘学会第二、三届理事会副理事长,1980~1988 年,任中国地球物理学会第三届理事会副理事长。他还担任过中国天文学会和中国地理学会的理事。他多次出国访问,参加过厄特沃斯地球物理讨论会,第十七届国际大地测量与地球物理联合大会,第九届国际地球潮汐科学讨论会;访问过美国、澳大利亚、比利时等国。他曾担任国际地潮常设委员会委员。

方俊的早期研究工作是从地图学开始的。我国地图的产生源远流长,1718 年(康熙年间)完成的《皇清一统舆地全图》在当时国际上已达到很高的水平。但是按照近代科学原理来绘制地图却比较晚。30 年代初期当他进地质调查所编申报地图集时,国内还没有科学的地图学,出版的几种中国地图都是根据日本或其他国家的地图仿制而成的,连作为地图基础的格网如何画出都不懂,更谈不上准确性和科学性。方俊首先在我国把地图投影理论运用于地图编制工作,吸收美国海岸与陆地测量局的绘图经验,结合中国实际,设计了作为中国全图用的兰勃特正形投影和亚尔勃斯等面积投影系统。从此在我国地图编制中,正式采用了严格的科学投影方法。为了获得地图的基准,他到山西、河南、安徽和湖北等地进行实地经纬度测量,运用新的资料修正多幅图幅。1934 年,上海申报馆的《中华民国新地图》正式出版,初以 1:200 万比例尺分幅刊印,后改为 1:300 万的分省图,以适合教学使用。该图集是我国最早和较完整的一部地图集。这本地图的扉页上虽然没有署方俊的名字,但他出力最多。因此,翁文灏在该图第三版的序中特地写道:“故介绍此图的新版,实不能不归功于方俊先生而特致感谢之意也。”

抗日战争期间,方俊在地理研究所致力于大比例尺地形图的投影工作,把地图投影的研究推进了一步。当时我国的测量部门规定采用分带的兰勃脱正形投影。这种投影的换算(从椭球到平面或反之)需要使用 10 位三角函数或对数表,十分繁琐。为此,他研究发表了“应用于分带兰勃脱投影的级数改正式”以及“兰勃脱投影上的方向和距离改正”的论文,提出采用级数方法进行投影交换以提高计算速度,同时深入研究这种投影的误差。后来,他又把注意力集中到研究大地测量中广泛采用的高斯投影上,写作了“高斯-兰勃脱投影间的换算”。这些都是电子计算机出现前大地测量计算中十分重要的课题,三篇论著先后于 1948~1950 年在英国的《皇家测量评论》(Empire Survey Reviews)上发表。中华人民共和国成立后,鉴于兰勃脱投影的一系列缺陷,他又积极建议并推动将高斯投影用于国家基本地形图的编绘工作,发表了“横轴墨卡托投影与高斯-克吕格投影”等论文。

方俊在地图投影方面的成就,集中反映在他撰写的《地图投影学》上册(1954)和下册(1958)中。前者系统地总结地图学中的投影理论和方法,后者则着重论述大地测量学中使用的各种投影,特别是高斯正形投影问题。这两本汇集国内外地图投影成果的著作,迄今仍是我国这一专业的主要参考书。

地球形状及引力场研究是大地测量学和地球物理学的重要领域,它通过地面观测的重力异常值(物理量)和大地水准面起伏(几何量)之间的内在联系,把重力测量的手段运用到以研究地球形状和确定地面点坐标为主要内容的大地测量学中去,从而使地球重力学成为解决大地测量问题必不可少的一个分支。现在,这一理论及其应用价值,已为同行所普遍了解;但是,在 30 年代末、40 年代初,国际上才刚刚开始注意这一问题并付诸实践。方俊在德国耶拿地震研究所进修期间,十分敏锐地注意到这是一个极有发展前途的研究方向和前沿领域。为此,他专程去维也纳访问,请教维也纳天文台台长 F. 霍夫纳

(Hopfner) 教授并刻苦钻研著名大地测量学家 F. R. 黑尔默特 (Helmert) 的著作。回国之后,他便在我国首先开拓了这一领域的研究工作。当时科学研究工作困难重重,他只能从手头得到的 200 多个点的资料(这也是当时我国仅有的一些观测数据)着手,完成了“我国的地壳均衡问题”的论文,并在地质学术会上宣读,受到与会科学家的好评。之后,在战火纷飞的抗日战争年代,他又完成了“重力异常与垂线偏差”一文,在我国首次系统论述利用斯托克斯及维宁曼尼斯公式推算垂线偏差的问题,并处理了其所收集到的一批印度重力资料。在计算工具十分简陋落后的情况下,他采用自己设计的模板推算了喜马拉雅山脉南麓的两个点(Kalianpur 和 Kesri)之间的相对垂线偏差,并以之与大地测量联测结果相比较,得到十分满意的结果。此项工作不仅在当时国内是首次,在国际上也刚开始不久,文章很快就在 1946 年《美国地球物理学会会刊》(Transaction of America Geophysical Society)上发表,审稿人指出,这是在国际上提出这种研究的较早的论文。继之,他还完成了“中国的正常重力公式”一文。

解放前,我国的重力测量基础十分薄弱。从 1895 年法国人勒热(Lejeu)在上海徐家汇观象台测定第一个重力点起,到 1949 年止,全国的测量重力点仅有 200 多处,使用的仪器也很陈旧。解放后,方俊在主持中国科学院地理研究所大地测量组期间,首先着手的工作就是建立我国的重力基本网和一等网。他引进当时较先进的四摆仪,从 1953 年到 1955 年,亲自领导组织全国的重力测量。1956~1957 年,他与苏联科学院地球物理研究所 Ю. Д. 布朗热(Вуланже)教授合作,测量布设了全国基本点和一等点共 103 处,基本点联测精度比布朗热的成果提高了一个半数量级。这项工作使全国大部分地区最多每隔 500 千米就有一个基本点。该网一直沿用了 30 年,作为我国测绘、石油、地质、冶金和海洋等部门进行重力测量和勘探工作的基础。直到 1985 年,才新建更高精度的全国重力网。

天文重力水准是根据国家天文大地网平差的需要而施测的。这一方法所依据的理论是由苏联著名学者 М. С. 莫洛琴斯基(Молоденский)提出的,但就大面积使用来说,我国的天文重力水准网则是世界上最为完整的。方俊于 1957~1958 年间主持全国天文重力水准网的布设工作,提出沿全国一等三角锁布设两种精度的天文重力水准路线,即高精度与低精度路线的布点方案。值得指出的是,在天文重力水准处理工作中,他于 1959 年发表的以平均重大异常为基础的方格模板计算方法,较之经典的方法使用方便而且精度较高,所以当论文“天文重力水准计算的方格模板”的俄文译稿在《中国科学》上发表后,很快引起国际上的重视,先后被编入苏联、东欧及我国的教科书,被称为方俊方格模板法。事隔 20 年,即 1979 年他又设计了按单独天文点先行计算然后拼接的新方案,以避免大量的重复计算,从而用于电子计算机程序的编制。全国天文重力水准工作的完成,不但为大地测量数据的计算提供了可靠依据,同时也可利用它编制出准确的大地水准面图,从而把我国的局部坐标系与地心坐标系连接起来。同一期间,他还发表论文“顾及扁率一次项的地球表面形状问题”,运用椭球正交系,对扁率级斯托克斯问题提供一种新的解法,丰富了地球重力学的理论。

60 年代起,方俊的研究工作转向积极为我国的国防建设和空间科学服务。由于卫星和其他近地空间飞行器的运动都受到地球引力场的作用,而地球引力场的不规则性,使卫星的轨道产生了摄动。因此,对空间科学来说,地球引力场的研究是十分重要的。早在 1960 年他就开始了地球重力场对卫星轨道的摄动问题的研究。十年动乱期间,他虽然身处逆境,但仍然积极支持和指导“利用重力资料推算高程异常和垂线偏差”的研究课题,

为观测我国人造卫星的跟踪站提供了初步的地面坐标参数。1974年后,在钱学森的支持下,他进行了我国参考坐标系与地心系统转换问题的研究,这在当时国内尚未引进多普勒接收机等空间大地测量新技术的条件下是一项艰巨的任务。为此,他采用两种方法,即利用天文大地水准面的起伏及利用与日本系统的连接,估算出我国地心坐标转换参数,取得很好的效果并满足了急需。他还亲自领导重力垂线偏差的精度估计以及青藏地区高程异常的测定方案两项研究工作,其间提出的用地形均衡资料来内插高程异常的思想,已应用于全国天文大地网的平差中。1978年之后,他虽未直接参加,但仍悉心指导完成全国100千米分辨率的空间重力异常及其精度估计以及高空扰动位延拓两项工作。

作为上述工作的系统总结,方俊前后花费10余年时间,写成专著《重力测量与地球形状学》(上、下册)。该书介绍并总结了地球重力学方面的主要研究成果,为国内各方面所广泛引用。

在学术研究上,方俊总是根据国家经济建设和科技发展的需要,不断开拓新的研究领域。随着大地测量学应用于地球动力学问题的兴起,对地球的测量已由静态研究发展到动态研究。他密切注视国际上这一领域的进展,并以70岁高龄开始了地球固体潮的研究工作。1959年,根据中苏两国科学院的协议,要求在国际地球物理年期间,在兰州合作进行重力潮汐观测。虽然缺乏设备和经验,他还是毅然接受这一任务并克服重重困难,组织科研人员完成了实测工作。之后,在他的支持下成立了固体潮研究组,他还积极督促改善仪器设备条件。为了推动这项研究工作的开展,1978年他以74岁高龄,接受比利时皇家天文台的邀请,率队出国考察访问,和比利时P. 梅尔基奥尔(Melchior)教授合作,完成了9个站的重力潮汐观测,并共同发表“中国的固体潮观测”的论文,填补了我国在这一领域的空白。他的专著《固体潮》是我国第一部系统论述这门学科的著作,于1986年获中国科学院科技进步二等奖。1987年以后一直继续开拓地球自由振荡的研究,并以极大的毅力学习使用计算机,对各个简正模进行解算,发表“地球的自由振荡”(一、二)等论文,并指导学生从理论上对结合高低阶简正模信息反演地球内部构造作了有益的探索。

方俊先后发表论文70余篇,著作5部,译作2本,内容涉及地图学、地球重力学、地球形状、固体潮及地球自由振荡等许多领域。他在地图投影、天文重力水准、垂线偏差估算、潮汐改正等方面所作的重要贡献,促进了这些科学研究领域的拓展,也使他在国内外享有盛誉。

方俊为人耿直,光明磊落,待人真诚,深得同行和后辈的敬重和爱戴。他言传身教、甘当人梯,他的许多学生已经成为我国大地测量与地球重力学领域的中坚骨干,有的已经成为国内外著名学者。他感到欣慰的是,他的事业后继有人。方俊个人生活十分俭朴,读书是他唯一的嗜好。通过读书,跟踪学科的新发展。他那种工作到老、学习到老的精神,为年轻一代科学工作者树立了楷模。

—该文载于1992年中国现代科学家传记第二集中,作者是中国科学院院士许厚泽研究员

目 录

序.....	i
方俊院士.....	iii
荷雁两氏弹性摆.....	1
地下重力测量与地层密度.....	7
Gravity Anomalies and the Deflection of the Plumb Lines.....	8
On the Lambert Conformal Projection as Applied in China.....	13
Transformations between the Lambert Conformal and Gauss-Kruger (Transverse Mercator) Projections	21
Azimuth and Distance Corrections for the Geodetic Lines on the Lambert Conformal Projections	26
Gravity Formula for China (中国之重力公式)	35
潼关及托县经纬度的测定.....	38
认真地学习苏联的先进经验以提高我国测量业务水平.....	40
三十年来苏联在测量学上的成就.....	45
横轴墨卡托投影和高斯-克吕格投影.....	53
高斯-克吕格投影的换带问题.....	63
高斯-克吕格坐标表说明.....	72
发展我国测绘事业,为今后的经济建设创造更有利的条件.....	79
正形投影上的大地线方程、方向及距离改正.....	82
大地水准面.....	100
ПАЛЕТКА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО АСТРОНОМО-ГРАВИМЕТРИЧЕСКОМУ НИВЕЛИРОВАНИЮ.....	104
天文重力水准的计算模板.....	120
测量学总论.....	131
重力测量.....	135
天文重力水准的计算模板(续).....	138
简化的天文重力水准模板.....	145
山地天文重力水准的计算.....	148
应用人造卫星观测资料研究地球形状和地球重力场.....	158
顾及扁率一次项的地球表面形状问题.....	171
计算垂线偏差用的重力点的密度和分布问题.....	180
利用大地测量和重力测量作为监视地震活动的手段.....	186
推算我国天文大地测量坐标系统的原点问题.....	192
应用扭秤预报地震的可能性.....	196
卫星大地测量学的发展.....	205

应用重力资料推算西安点的高程异常及垂线偏差的误差估计·····	215
我国地球形状及重力场研究的进展·····	222
固体潮研究——它对地学、天文学和空间科学的关系·····	226
天文重力水准计算方案·····	237
固体潮对精密水准测量的影响·····	246
地球自由振荡·····	248
地球自由振荡(续)·····	264
勒夫数及负荷数·····	278
地球自由振荡线性反演中的参数核(I)·····	287
地球自由振荡线性反演的参数核(II)·····	292
近代地球形状学的发展及我国所作的贡献·····	300

荷雁两氏弹性摆

引言：在 18 世纪中叶，欧洲测量界皆从事于大地重力之测量。其动机为大地测量学上对于大地的形状及铅垂线偏差诸问题，若纯借陆地丈量方法，已无从解决，故欲从重力测量之结果，以为解决此等问题之辅助，百余年来，此项工作继续不断。最初在欧美大陆，非洲沿岸及亚洲之印度施测，共得重力点二千余。近年重力仪器制造精良，虽在海洋之中亦能施测；荷人 Vening Meinesz 氏曾将其特制之海上重力摆置于潜水艇中，在地中海、印度洋及荷属东印度沿海测量。其后又受美国政府委托，在太平洋及大西洋测得路线两条。此种结果说明大洋内重力之分布与陆地一般，故在重力测量上颇占重要地位。但上述问题，必俟地球上各地重力一一测得后方有解决之望。今已测之点虽甚多，仍有大部区域未经施测，此种未测区域之一即为中国。中国为东亚大国，纬度自北纬 16 度至 54 度，经度东西亘 63 度。以面积言，实占全球 1/50，全陆地之 1/14；就纬度言，尤占地球最重要之部分。若能将其主要地点一一加以测定，则必为解决此项问题之莫大辅助。惜国人对此鲜有注意，故在此广大区域上，重力分布情形迄未明了，岂非一大憾事。

1933 年徐家汇天文台台长雁月飞神父 (P. Lejay) 携荷雁两氏弹性摆来华 (此摆为法国 Holweck 及 Lejay 所制造，故名 Holweck-Lejay 弹性摆，今从北平研究院物理研究所原译名，称为荷雁两氏弹性摆)。雁氏于三年中先后在华北、华南及长江流域，共测得重力点 140 余。国内学术界对于雁氏工作闻名已久，而对荷雁两氏弹性摆，工作之迅速简单及仪器之轻巧便利尤为赞扬。但迄今尚未有介绍之文字出现，故于此种弹性摆之特性，尚有不少误会之处。笔者多年来从事于复摆之制造，对于弹性摆之原理，亦曾稍加研究，兹将此摆之原理及特点用简单文字介绍如下。

重力测量精度标准：近世重力测量之精度标准为 0.001m/sec^2 (1cm/sec^2 或称为 1dyn 或 1gal ，故 $0.001\text{cm/sec}^2=0.001\text{gal}=1\text{miligal}$ ，简作 1mgal)。应用普通复摆以测重力之相对值为：先在已知重力之甲地测量，观测其摆动周期 T 。再在未知重力之乙地施测，设甲地重力为 g ，两地之周期差为 ΔT ，则两地之重力差为：

$$\Delta g = \frac{2g}{T} \Delta T$$

普通复摆之周期约为 0.5 秒，而一般重力为 980cm/sec^2 。代入上式，得

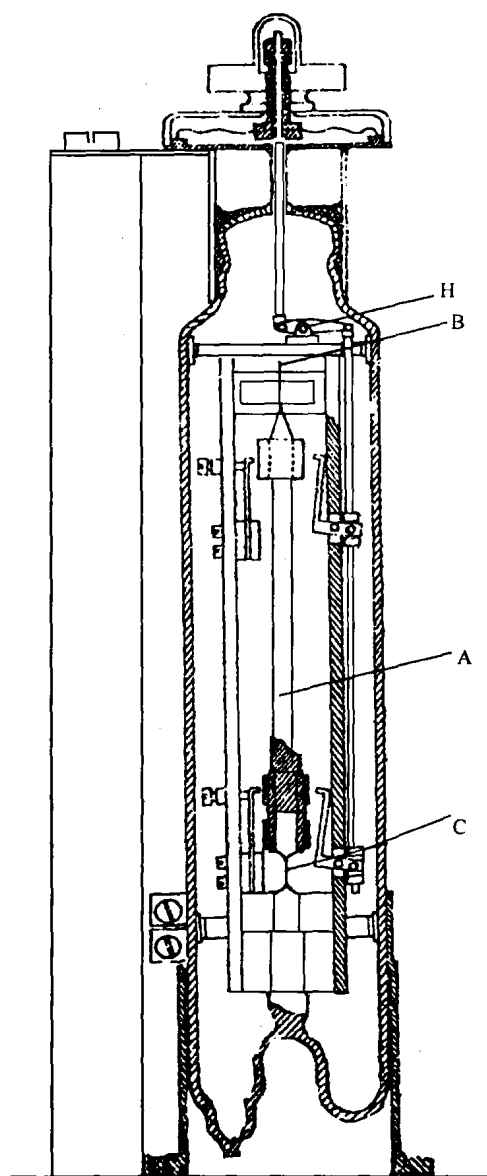
$$\Delta g = 3920 \Delta T$$

故若欲测重力 Δg 至精度 0.001cm/sec^2 ，则时间精度必须测至 $\Delta T = 0.001/3920 = 0.000\ 000\ 25 = 2.5 \times 10^{-7}$ ，即时间必须测至精度一千万分之 2.5 秒。此即复摆困难所在，必须作长久之观测及用极准确之时计以为辅助，方能达到此等精度。弹性摆则反是，其一般公式为：

$$\Delta g = \frac{1}{V^2} \frac{2g}{T} \Delta T$$

式中 V^2 称为扩大系数，视摆之性质而异。普通此数约等于 200~300 之间。弹性摆之周期约为 5 秒，故

$$\Delta g = 1.5 \Delta T \quad (\text{近似})$$



荷雁两氏弹性摆

A. 石英摆柱 B. 摆尖
C. 弹性片 H. 固定杠杆

图 1

因此,欲测 Δg 至精度 1mgal, 时间仅需精至 0.0007 秒或万分之七秒;故应用普通停表,在 15 分钟内即可测量一点,已为普通复摆所望尘莫及。且此仪器本身又极轻巧,更不需附带零件(例如精密之天文表及记录器等),故最宜于交通不便区域之用。

弹性摆之一般原理:若一球体支于一弹性之金属片上摆动,则其摆动现象与普通单摆一般无二。球体中心所经行路线为一圆弧,其半部为一常数,若以公式表示,则摆动半径 l 与弹性片长 L (如图 2 所示)之比例为:

$$\frac{l}{L} = \frac{\sin a - a \cos a}{a(1 - \cos a)}$$

式中 $a = \sqrt{\frac{mg}{E \cdot J}} \cdot L$, m 为球体之质量, g 为重力, 故 mg 即球体之重量; E 为弹性片之弹性率, J 为全摆之惰矩。 a 在前式中既为三角函数, 故可以角度表示之, 其值自 0 至 $\pi/2$ 。图 3 曲线示 l/L 与 a 之关系, 当 $a=\pi/2$ 时, $l/L=0.637$, 若 a 渐次递减, 则 l/L 渐渐增大, 但量甚微。自此图可知 a 角愈小, 则增加愈缓。当 $a=0$ 附近时, $l/L=0.667=2/3$, 此值与 $a=\pi/2$ 之值仅差 0.030 , 或为百分之 4.5 。因此, 吾人得一结论: 不论弹性摆之形式及性质如何, 其摆动方式与普通单摆无异, 其摆动半径可视为全长之 $2/3$ 。

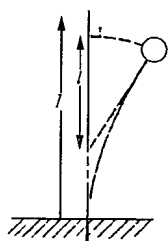


图 2

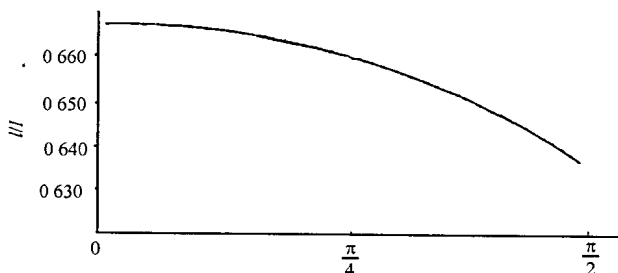


图 3

弹性摆之摆动周期为:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos a}{\cos a}}$$

或

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \sqrt{\frac{\tan a}{a} - 1}$$

此周期即为等长单摆之周期乘系数 $\sqrt{\frac{\tan a}{a} - 1}$ 。此系数视 a 之大小而异, 换言之, 此周期之大小须视摆之大小、形式及其所用材料而定。此系数称为扩大系数, 可以 V 代之。 V 愈大, 则摆之周期愈大。周期愈大, 则所定时间之精度为同等时, g 之精度愈大。反之, 若欲测一定精度之重力, 则扩大系数愈大, 时间之精度愈可忽略。

自以上公式得: $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta g}{2g} V^2$ 。即本文开始所举之公式。

若 $V=14$, 则 $V^2=200$ (近似), 故

$$\Delta g = \frac{1}{V^2} \frac{2g}{T} \Delta T = \frac{1}{100} \frac{g}{T} \Delta T$$

若摆长为 6 厘米, 则 $T=6$ 秒。故若欲测 Δg 至 1mgal 时, 时间之精度为万分之七秒。

a 与 V^2 之关系如图 4 所示, 曲线自 $a=0^\circ$ 至 80° 变化极微, 自 80° 起乃渐上升, 至 89° 乃急剧上升。今欲扩大系数为 14 或 $V^2=200$, 则 a 角已达 $89^\circ 48'$ 。根据 Euler 氏弹性片定理, 常 a 等于 $\frac{\pi}{2}$ (或 $\sqrt{\frac{mg}{E \cdot J}} \cdot L$ 之值等于 1.5708 时), 则弹性片已达折断之界限。若 $\sqrt{\frac{mg}{E \cdot J}} \cdot L$ 稍超过此数, 弹性片必自行折断。故欲使弹性摆之扩大系数扩大至合于实用时, 其弹性片实已频于折断之界限。若重力之增加略大, $\sqrt{\frac{mg}{E \cdot J}} \cdot L$ 亦必随之而增大, 则弹片必折断无疑。

球体弹性摆不能实用其故在此,故于制造弹性摆时此点必须加以改良。

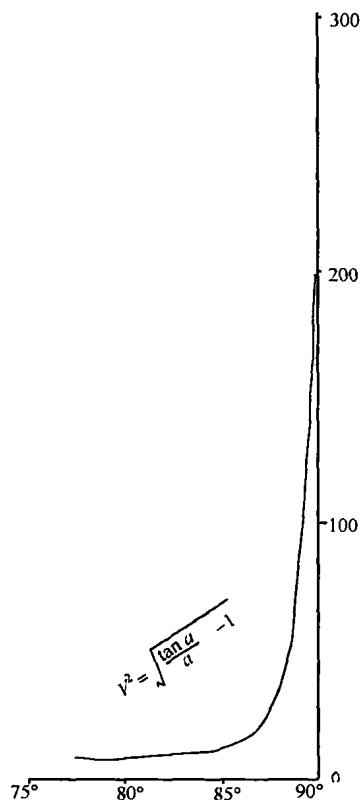


图 4

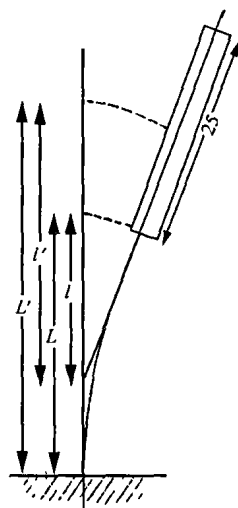


图 5

荷雁两氏弹性摆:欲克服上述困难,必须设法将摆之重量减小,使 $\sqrt{\frac{mg}{E \cdot J}} \cdot L$ 远在 $\frac{\pi}{2}$ 以下,同时扩大系数仍保持为大数。荷雁两氏方法有两点:第一,在弹片之上不用球体而以一圆柱代之。第二,应用极短之弹性片。

若用柱体以代球体,则摆之重心离弹性片之上端较球体者为远。设柱体之全长为 $2S$,弹性片之长度仍为 L ,则摆之重心摆动半径等于:

$$l' = l + S = l \left(1 + \frac{S}{l}\right)$$

但 $l = \frac{2}{3}L, l' = \frac{2}{3}L'$, 如图 5 所示。故

$$L' = L \left(1 + \frac{3S}{2L}\right)$$

$$a = \sqrt{\frac{mg}{EJ}} L' = \sqrt{\frac{mg}{EJ}} \left(1 + \frac{3S}{2L}\right) L$$

今若使 $\frac{S}{L}$ 大于 1, 则 a' 为 $\sqrt{\frac{mg}{EJ}} L$ 之倍数。因此当 $a = \frac{\pi}{2}$ 时, $\sqrt{\frac{mg}{EJ}} L$ 尚远在不折断界限

以下。今举例以明之:若应用一短弹性片,使 $\frac{S}{L} = 5$, 则