高联考研

2006年 李永乐·李正元考研数学⑬

数学二

数学

【理工类】

最后冲刺 超越135分

主编 清华大学 李永乐
北京大学 李正元
北京大学 刘西垣

国家行政学院出版社

高联考研

李永乐·李正元考研数学⑬(2006年版)

数学最后冲刺
超越135分

【理工类·数学二】

主　编　清 华 大 学　李永乐
　　　　北 京 大 学　李正元
　　　　北 京 大 学　刘西垣

编　者　（以姓氏笔画为序）
　　　　北 京 大 学　刘西垣
　　　　北 京 大 学　李正元
　　　　清 华 大 学　李永乐
　　　　北 京 大 学　范培华
　　　　中国人民大学　袁荫棠
　　　　空军雷达学院　徐宝庆
　　　　　　　　　　　龚兆仁
　　　　　　　　　　　鹿立江

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学最后冲刺超越 135 分. 理工类．数学．2/李永乐等主编.
－北京:国家行政学院出版社,2005
ISBN 7-80140-435-1

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 李…　Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 121973 号

数学最后冲刺超越 135 分(2006 年版)
【理工类·数学二】
李永乐　李正元　刘西垣　主编
*
国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路 6 号
邮政编码:100089
发行部电话:88517082
新华书店经销
北京市朝阳印刷厂印刷
*
787×1092　1/16 开本　10 印张　240 千字
2005 年 10 月第 1 版　2005 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 7-80140-435-1/O·38　　定价:15.00 元

前 言

（一）

《**考研数学最后冲刺超越 135 分**》是《**考研数学复习全书**》、《**考研数学全真模拟经典 400 题**》的姊妹篇。已先期出版的《**考研数学复习全书**》为考生第阶段复习用书，主要使考生全面、系统地掌握考纲所要求的基本概念、基本定理、基本公式和基本方法；《**考研数学全真模拟经典 400 题**》为考生第二阶段训练用书，主要使考生更好地提高数学水平，检查第一阶段对数学基本概念、公式、定理及运算法则的复习效果，查漏补缺，积累临场经验。而对 2006 年考研数学的命题预测、常考题型的解题思路与方法的归纳总结、网络化的知识体系的梳理，则是本书即《**考研数学最后冲刺超越 135 分**》的宗旨和使命，也是本书的价值所在。

（二）

研究生考试科目调整后，数学科的权重在原来的基础上增加了 50%，占总分的 30%，因此数学科的地位更加重要；同时由于数学科本身的特点，数学科考试的标准差历年来都比较大，这一方面说明考生的数学水平差异较大，另一方面说明数学科的考试能将考生的差异充分的展示和呈现出来，因此考生的数学成绩对其总分有很大的影响，其考试所担负的遴选任务更加重要，其考试的选拔性质更加突出。

（三）

从历年考研数学试题可以看出，数学科考试注重能力的考查，试题提高了对解决问题的能力的要求，增加思考量，控制计算量，要求考生抓住问题的实质，对试题提供的信息进行分捡、组合、加工，寻找解决问题的方法。因此命题者在命制试题时，(1)**尽量避免刻板、繁难和偏怪的试题，避免死记硬背的内容和繁琐的计算**；(2)**设计不同解题思想层次的试题，使善于知识迁移和运用思维块简缩思维的考生能用敏捷的思维赢得时间，体现其创造能力的水平**。这样的试题，难有现成的方法和套路可以套用，思维水平要求高，不强调解题技巧，思维容量大，运算量较小，完成这样的试题需要有能力的培养，依靠“题海”战术是难以奏效的；(3)**很重视知识的整体性和综合性，在知识网络的交汇点上设计试题**，目的是倡导考生对所学内容能够融会贯通，理论联系实际，防止单纯机械记忆。值得注意的是，在强调选拔、强调能力考查的同时，切忌放松基础知识的复习，要知道考查考生对基础知识的掌握程度，是数学考试的重要目标之一。

从历年阅卷情况来看，相当多的考生主要存在以下问题：(1)对考试大纲中规定的基础知识、基本理论的掌握还存在某些欠缺，甚至有所偏废；(2)对所学知识的掌握缺乏整体性、条理性。

编者认为，考生在冲刺复习阶段很有必要仔细阅读这本《考研数学最后冲刺超越135分》。因为本书中所设计的试题和所要解决的问题是有针对性的，它或许能给考生带来意外的惊喜！

(四)

本书集中了北京大学李正元、北京大学刘西垣、清华大学李永乐、中国人民大学袁荫棠以及北京大学范培华、东北财经大学龚兆仁、空军雷达学院徐宝庆、天津财经学院鹿立江等老师的考研辅导体会，是集体智慧的结晶。

编写本书是一项新的尝试，需要在认真听取同行和读者意见的基础上不断加以改进和完善，欢迎广大同行和读者提出宝贵的意见。

最后预祝考生考研成功！

编者

2005.10

目 录

上篇 考前总结

第一部分 高等数学

第二部分　线性代数

下篇　考前预测

上篇　考前总结

编 者 的 话

复习备考已进入冲刺阶段，对于强调基础、能力、思维的数学考试来说，考生若想在冲刺阶段通过大量模拟训练来巩固前阶段复习效果，从而提高考试成绩，恐怕来不及了．笔者认为，在冲刺阶段，考生应归纳总结考研数学中常考题型的解题思路和解题方法，梳理各知识点的相互联系．

从近几年的试题可以看出，基本概念、基本方法和基本性质是考查的重点．由于数学考试一般涉及几个学科，涉及的知识点非常多，加之数学试题的特点，一份试卷中试题题量不可能过大，因此，作为研究生入学考试，注重考查能力，试题不可能面面俱到，节节有题，一般要求保证重点章节部分知识点被考查到，重点知识构成数学试题的主体．此外，考生要注意学科内在联系，包括各部分的纵向联系以及各部分知识之间的横向联系，相关知识的交汇点是命制大题的重点．

为方便考生，本书上篇“考前总结”以考研数学重点章节部分重点知识点为出发点，以考研数学常考题型为切入点，归纳总结各题型的解题思路或步骤、解题方法，并精编了带有预测性的经典试题进行详细地讲解，帮助考生对所学知识的掌握具有整体性、条理性，并形成一个有序的网络化的知识体系，以提高考生的认识和处理数形规律、逻辑关系及抽象模式的知识和能力，帮助考生实现超越135分的理想成绩．

第一部分　高等数学

专题 1　洛必达法则及其应用

【例 1.1】　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{1-\sqrt{1+x^2}}$.

【解】　本题是求"$\dfrac{0}{0}$"型未定式的极限,可直接利用洛必达法则,得

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-\sin x}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=-\lim_{x\to0}\sqrt{1+x^2}\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{x}.$$

由于　$\lim\limits_{x\to0}\sqrt{1+x^2}=1$,　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to0}(e^x+\sin x)=1$,

故　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{1-\sqrt{1+x^2}}=-1\cdot1=-1$.

评注　洛必达法则是求"$\dfrac{0}{0}$"型和"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式的重要工具.但在用洛必达法则解题时,为了避免复杂的计算,提高效率,减少错误,应尽可能综合运用以下方法:

(1) 函数的连续性与极限四则运算法则;

(2) 适当的恒等变形(如:分子或分母的有理化,三角恒等式,等);

(3) 利用已知极限和等价无穷小代换;

(4) 利用换元法(即复合函数求极限法则).

在本例中我们在将分子和分母分别求导数后,把极限等于 1 的因子 $\sqrt{1+x^2}$ 分离出来单独求极限的目的在于:突出函数中的"$\dfrac{0}{0}$"型未定式部分 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}$,从而简化了后面的计算.否则对"$\dfrac{0}{0}$"型未定式　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}(e^x-\cos x)}{x}$　再用洛必达法则时,分子的导数就比只计算 $(e^x-\cos x)$ 的导数要麻烦.

【例 1.2】　求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}$.

【分析】　本题是求"$\dfrac{0}{0}$"型未定式的极限.从分子和分母的表达式不难发现,若直接利用洛必达法则会碰到复杂的计算.为简化计算过程,应当在分子和分母中分别利用等价无穷小代换.

【解】　当 $x\to0$ 时,有　$e^x-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)$.

又因 $e^{x-\sin x}-1 \sim x-\sin x$，$\lim\limits_{x\to 0} e^{\sin x}=1$，于是，分子可用 $x-\sin x$ 代换.

当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{x(1-\cos x)}$ 是无穷小量，于是分母可作等价无穷小代换，即

$$1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)} \sim \frac{1}{2}x(1-\cos x) \sim \frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^3}{4},$$

即得 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\frac{x^3}{4}}=4\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2}{3}.$$

【例 1.3】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{2x})-\cos(xe^{-2x})}{x^3}$.

【解法一】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^{2x})-\cos(xe^{-2x})}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{xe^{2x}+xe^{-2x}}{2}\sin\frac{xe^{2x}-xe^{-2x}}{2}}{x^3}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{x^2(e^{2x}+e^{-2x})(e^{2x}-e^{-2x})}{4x^3}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}=-\lim_{x\to 0}2(e^{2x}+e^{-2x})=-4.$$

【解法二】 利用 $\cos x$ 的麦克劳林公式 $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\quad(x\to 0)$，可得

$$\cos(xe^{2x})=1-\frac{x^2e^{4x}}{2}+o(x^3)\quad(x\to 0),$$

$$\cos(xe^{-2x})=1-\frac{x^2e^{-4x}}{2}+o(x^3)\quad(x\to 0).$$

代入原式，即得 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-4x}-e^{4x}}{2x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^3)}{x^3}=-2\lim\limits_{x\to 0}(e^{-4x}+e^{4x})=-4.$

评注 ① 本题的极限是"$\frac{0}{0}$"型未定式，通常的作法是直接用洛必达法则计算．不过，有时会导致复杂的计算.

在【解法一】中，我们首先用和差化积公式将余弦函数之差化为正弦函数之积，这样就为利用当 $y\to 0$ 时的等价无穷小关系 $\sin y\sim y$ 创造了条件．从求解过程可见，一旦这样作了，以后再用洛必达法则求极限就变得十分简单了.

② 必须指出，尽管下面的作法也得到了相同的结果，但是这种作法并没有足够的理由，从而是不足取的： 当 $y\to 0$ 时，$1-\cos y\sim\frac{1}{2}y^2$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^{2x})-\cos(xe^{-2x})}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos(xe^{-2x})]-[1-\cos(xe^{2x})]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\frac{x^2e^{-4x}}{2}-\frac{x^2e^{4x}}{2}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-4x}-e^{4x}}{x}=-4.$$

原因在于，在和差中用等价无穷小代换时，必须考虑代换时产生的差异有多大的问题，而这正是函数的泰勒公式所能回答的问题．在【解法二】中我们应用带有皮亚诺型余项的麦克劳林公式得出在本题中代换后产生的差异是 $o(x^3)$，从而用严格的推理得出了正确的结果.

【例 1.4】 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$.

【分析】 尽管所求极限是"$\dfrac{0}{0}$"未定式,但直接用洛必达法则不仅不能奏效,而且所得新极限的形式更繁:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5}.$$

为了克服这里碰到的困难,可作换元 $t=\dfrac{1}{x}$,把指数函数化简.

【解】 令 $t=\dfrac{1}{x}$,则可得

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^{t^2}}\xlongequal{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2}{2te^{t^2}}=\frac{3}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}\xlongequal{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}\frac{3}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0.$$

评注 若把题目改为求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{31}}$,经换元化为求极限 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^{31}}{e^{t^2}}$,若直接用洛必达法则将导致多次求导,计算量仍然很大.为了进一步简化计算可利用极限的四则运算法则,化为极限的乘积形式:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^{31}}{e^{t^2}}=\left(\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{\frac{t^2}{31}}}\right)^{31}.$$

这时仅需对 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^{\frac{t^2}{31}}}$ 用一次洛必达则即可得出结论.当然把分母中 x 的幂次 31 改为任何更大的数,仍可用同样办法求极限.

【例 1.5】 求 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{\sin x}\right]$.

【分析】 所求极限为"$\infty-\infty$"型未定式,应首先通分化为"$\dfrac{0}{0}$"型未定式后,再用前面介绍的方法求极限.

【解】
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{\sin x}\right]&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{\sin x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x}\lim_{x\to0}\frac{(1+x)\cos x-1}{x}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left[\cos x-\frac{1-\cos x}{x}\right]=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

【例 1.6】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ex^{1+x}}{(1+x)^x}-x\right)$.

【解】 所求极限也是"$\infty-\infty$"型未定式,但现在无法经过通分化为"$\dfrac{0}{0}$"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型的未定

式，这时可从括号内提出无穷大因子 x，先化为"$0\cdot\infty$"型的未定式，最后再作换元 $y=\dfrac{1}{x}$，并化为"$\dfrac{0}{0}$"型未定式求极限.

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\mathrm{e}x^{x}}{(1+x)^{x}}-1\right)=\lim_{y\to0^{+}}\frac{\dfrac{\mathrm{e}}{(1+y)^{\frac{1}{y}}}-1}{y}=\lim_{y\to0^{+}}\frac{\mathrm{e}^{1-\frac{\ln(1+y)}{y}}-1}{y}$$

$$=\lim_{y\to0^{+}}\frac{1-\dfrac{\ln(1+y)}{y}}{y}=\lim_{y\to0^{+}}\frac{y-\ln(1+y)}{y^{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{y\to0^{+}}\frac{1-\dfrac{1}{1+y}}{y}=\frac{1}{2}\lim_{y\to0^{+}}\frac{1}{1+y}=\frac{1}{2}.$$

评注 在前面两个例子中分别介绍了处理"$\infty-\infty$"型未定式的两种基本方法（通分法和提取无穷大公因子法），在具体问题中应灵活运用适当的方法将"$\infty-\infty$"型未定式变形.

【例 1.7】 求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{4^{x}-3^{x}}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{4^{x}-3^{x}}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\left(\frac{4^{x}-3^{x}}{x}\right)}{x-1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{4^{x}-3^{x}}{x}-1}{x-1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to1}\frac{4^{x}-3^{x}-x}{x(x-1)}}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to1}\frac{4^{x}-3^{x}-x}{x-1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to1}(4^{x}\ln4-3^{x}\ln3-1)}=\mathrm{e}^{4\ln4-3\ln3-1}=\frac{4^{4}}{3^{3}\mathrm{e}}=\frac{256}{27\mathrm{e}}.$$

评注 本题的极限是"1^{∞}"型未定式，其一般形式为 $\lim\limits_{x\to\Box}f(x)^{g(x)}$，其中 $\lim\limits_{x\to\Box}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to\Box}g(x)=\infty$. 为求极限，首先将幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 化为指数型复合函数 $\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$，由于 $\lim\limits_{x\to\Box}\ln f(x)=0$，利用当 $y\to0$ 时的等价无穷小关系 $\ln(1+y)\sim y$ 可得：当 $x\to\Box$ 时，$\ln f(x)\sim f(x)-1$，于是

$$\lim_{x\to\Box}f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\Box}g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\Box}g(x)[f(x)-1]}.$$

从而，归结为求极限 $\lim\limits_{x\to\Box}g(x)[f(x)-1]$.

【例 1.8】 求 $\lim\limits_{x\to0^{+}}(\mathrm{e}^{x}-1-x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【解】 因 $\lim\limits_{x\to0^{+}}(\mathrm{e}^{x}-1-x)^{\frac{1}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^{+}}\frac{\ln(\mathrm{e}^{x}-1-x)}{\ln x}}$，又

$$\lim_{x\to0^{+}}\frac{\ln(\mathrm{e}^{x}-1-x)}{\ln x}\overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=\!=\!=}\lim_{x\to0^{+}}\frac{\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}-1-x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{x(\mathrm{e}^{x}-1)}{\mathrm{e}^{x}-1-x}$$

$$\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=\!=\!=}\lim_{x\to0^{+}}\frac{\mathrm{e}^{x}-1+x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-1}=1+\lim_{x\to0^{+}}\mathrm{e}^{x}\lim_{x\to0^{+}}\frac{x}{\mathrm{e}^{x}-1}=2,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1-x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^2.$

评注 若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)^{g(x)}$是“$\infty^0$”型或“$0^0$”型未定式，也可化为指数型复合函数的极限$e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\ln f(x)}$计算，其中$\lim\limits_{x\to\square}g(x)\ln f(x)$是“$0\cdot\infty$”型的未定式，又需化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式后再用洛必达法则等方法求极限.

【例 1.9】 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数，求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

【分析】 本例中的极限是“1^∞”型未定式，可按前面介绍的标准方法求极限.

【解】
$$I=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}-1}{x}}$$
$$=e^{\frac{1}{n}\lim\limits_{x\to 0}\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{x}}=e^{\frac{1}{n}\lim\limits_{x\to 0}[a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n]}$$
$$=e^{\frac{1}{n}[\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n]}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

【例 1.10】 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}$ 的表达式.

【解】 注意，由夹逼定理可得当 $0\leqslant a\leqslant 1,0\leqslant b\leqslant 1$ 时有
$$1\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n+b^n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n+b^n}=1.$$
于是，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时由 $\frac{x^2}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 得
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}=1.$$
当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，由 $\frac{x^2}{2}\leqslant x\Leftrightarrow 0<\frac{1}{x}<1,0<\frac{x}{2}\leqslant 1$ 得
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=x\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{x}{2}\right)^n+1}=x.$$
当 $x>2$ 时，由 $x<\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow 0<\frac{2}{x^2}<1,0<\frac{2}{x}<1$ 得
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\frac{x^2}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1}=\frac{x^2}{2}.$$
综合得
$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2,\\ \frac{x^2}{2}, & x>2\end{cases}=\max\{1,x,\frac{x^2}{2}\}.$$

评注　应用夹逼定理可把本例的结论推广到对 k 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的情形，并得到

$$I=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\},$$

$$J=\lim_{x\to+\infty}(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_k^x)^{\frac{1}{x}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}.$$

此外，也可通过转化为指数函数的方法求 J. 为了确定起见，可设 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k$，令 $\lambda_1=\dfrac{a_1}{a_k},\lambda_2=\dfrac{a_2}{a_k},\cdots,\lambda_{k-1}=\dfrac{a_{k-1}}{a_k}$，于是有 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{k-1}\leqslant 1$，且

$$\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_k^x)=x\ln a_k+\ln(1+\lambda_1^x+\lambda_2^x+\cdots+\lambda_{k-1}^x),$$

其中 $0<\ln(1+\lambda_1^x+\lambda_2^x+\cdots+\lambda_{k-1}^x)\leqslant\ln k$，故

$$J=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_{k-1}^x)}=e^{\ln a_k+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(1+\lambda_1^x+\lambda_2^x+\cdots+\lambda_{k-1}^x)}$$

$$=e^{\ln a_k}=a_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}.$$

【例 1.11】　求　$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n^2}\right)\right]^{n^2}$.

【分析】　求数列极限不可以直接用洛必达法则. 为了应用洛必达法则求本例中的极限，可引入函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\frac{1}{x}}$，而所求的数列极限是这个函数极限中变量 x 取数列 $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ 的特例.

【解】　考虑函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\frac{1}{x}}$，由洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\tan(\frac{\pi}{4}-x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\frac{\pi}{4}-x)-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)}}=e^{-2},$$

在上述极限中令 $x_n=\dfrac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$，即得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)\right]^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x_n\right)\right]^{\frac{1}{x_n}}=e^{-2}.$$

评注　利用函数极限及洛必达法则求数列极限的理论根据是：

(1) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则对 $\forall x_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，必有　$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则对 $\forall x_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 又存在 N，当 $n\geqslant N$ 时 $x_n\neq x_0$，必有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

在本例中应用了上述第 2 个结论. 也可以考虑函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{x}\right)\right]^x$ 且取 $x_n=n^2$，并应用第 1 个结论求本例中的极限.

【例 1.12】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3+x^2)\sin\dfrac{1}{x}-\cos x}{x^2[\ln(1+x)-\ln x]}$.

【解】 因 $|\cos x|\leqslant 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sin\dfrac{1}{x}\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sin t}{t^2}=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\ln(1+x)-\ln x]=\lim_{x\to+\infty}x^2\ln(1+\frac{1}{x})\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)}{t^2}=+\infty,$$

故所求极限是"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式,用分项求极限法可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3+x^2)\sin\dfrac{1}{x}-\cos x}{x^2[\ln(1+x)-\ln x]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{x}}{\ln(1+\dfrac{1}{x})}+\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sin\dfrac{1}{x}-\cos x}{x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})}=1+0=1.$$

(后一项的分子为有界变量,分母是无穷大量,故其极限为0).

评注 ① 对"$\dfrac{0}{0}$"和"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}$,洛必达法则表明若 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大量,均可得出

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

但是当 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且非无穷大量时,却不能断定仍有

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

本例正是这种不能直接用洛必达法则求极限的"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式. 事实上,将分子和分母分别求导得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{3+x^2}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}+\sin x}{2x\ln(1+\dfrac{1}{x})-\dfrac{x}{1+x}},$$

其中
$$\lim_{x\to+\infty}(2x\sin\frac{1}{x}-\frac{3+x^2}{x^2}\cos\frac{1}{x})=2-1=1\neq0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[2x\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{x}{1+x}\right]=2-1=1\neq0.$$

但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在,由此导致 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{3+x^2}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}+\sin x}{2x\ln(1+\dfrac{1}{x})-\dfrac{x}{1+x}}$

不存在且非无穷大量,即洛必达法则失效.

② 利用反证法不难得出:

若 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$,且 $\lim\limits_{x\to\square}g(x)$ 不存在又非无穷大量,则 $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)+g(x)]$ 也不存在且非无穷大量;

若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A\neq 0$，且$\lim\limits_{x\to\square}g(x)$不存在又非无穷大量，则$\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\cdot g(x)]$与$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{g(x)}{f(x)}$也都不存在且非无穷大量.

在 ① 中利用了这里的结果.

【例 1.13】 确定常数 a 的值，使极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\ln(1+ax)}{|x|}\right]$存在.

【分析】 注意$|x|$是以 $x=0$ 为分界点的分段函数，且$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，可见应分别求当$x\to 0$时的左、右极限.

【解】 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+ax)}{|x|}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+ax)}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$$

$$=a+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{3e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{2}{x}}+1}=a,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+ax)}{|x|}\right]=3-\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+ax)}{x}=3-a.$$

于是，所求极限存在 $\Leftrightarrow\quad a=3-a\quad\Leftrightarrow\quad a=\dfrac{3}{2}$.

评注 在本例中用到了极限存在的如下充分必要条件：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)\text{ 和 }\lim_{x\to x_0^-}f(x)\text{ 都存在且同为 }A.$$

【例 1.14】 确定常数 a 和 b 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$.

【解法一】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$

$\Leftrightarrow\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x^2}+b=4$

$\Leftrightarrow\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x^2}=4-b.$

由此可得 $b=4-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x^2}$ 和

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x^2}\cdot x$$

$$=(4-b)\cdot 0=0,$$

于是，利用等价无穷小代换即得

$$a=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{-2x+3x^2}{x}=2.$$

进而，由洛必达法则又有

$$b = 4 - \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - 2x + 3x^2) + 2x}{x^2} = 4 - \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-2 + 6x}{1 - 2x + 3x^2} + 2}{2x}$$

$$= 4 - \lim_{x \to 0} \frac{2x + 6x^2}{2x(1 - 2x + 3x^2)} = 3.$$

【解法二】 利用带皮亚诺型余项的麦克劳林公式.

由 $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$,可得

$$\ln(1 - 2x + 3x^2) = -2x + 3x^2 - \frac{1}{2}(-2x + 3x^2)^2 + o(x^2)$$
$$= -2x + x^2 + o(x^2),$$

代入即得 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 - 2x + 3x^2) + ax + bx^2}{x^2} = 4$

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(a - 2)x + (b + 1)x^2}{x^2} = 4$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a - 2 = 0 \\ b + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = 3. \end{cases}$

评注 【解法一】的基础是极限的四则运算法则与洛必达法则,关键在于从题设得出 a 和 b 满足的极限公式.【解法二】的基础是带有皮亚诺型余项的麦克劳林公式,要求熟悉有关的展开式的求法.

【例 1.15】 已知常数 $a > 0, bc \neq 0$,使得

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x^a \ln\left(1 + \frac{b}{x}\right) - x \right] = c,$$

求 a, b, c.

【解】 记

$$I(a,b) = \lim_{x \to +\infty} \left[x^a \ln\left(1 + \frac{b}{x}\right) - x \right] \xlongequal{\frac{1}{x} = t} \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{\ln(1 + bt)}{t^a} - \frac{1}{t} \right]$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left[\frac{\ln(1 + bt)}{t^{a-1}} - 1 \right].$$

由于 $b \neq 0$,计算可得

$$J(a,b) = \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{\ln(1 + bt)}{t^{a-1}} - 1 \right] = -1 + \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln(1 + bt)}{t^{a-1}}$$

$$= -1 + \lim_{t \to 0^+} t^{2-a} \frac{\ln(1 + bt)}{t} = -1 + b \lim_{t \to 0^+} t^{2-a}$$

$$= \begin{cases} -1, & 0 < a < 2, \\ b - 1, & a = 2, \\ \infty, & a > 2. \end{cases}$$

从而,当 $a \neq 2$ 时对任何 $b \neq 0$ 以及当 $a = 2$ 且 $b \neq 1$ 时都有 $I(a,b) = \infty$.

当 $a = 2$ 且 $b = 1$ 时,$I(a,b) = I(2,1)$ 是 $\frac{0}{0}$ 型未定式,利用洛必达法则可得