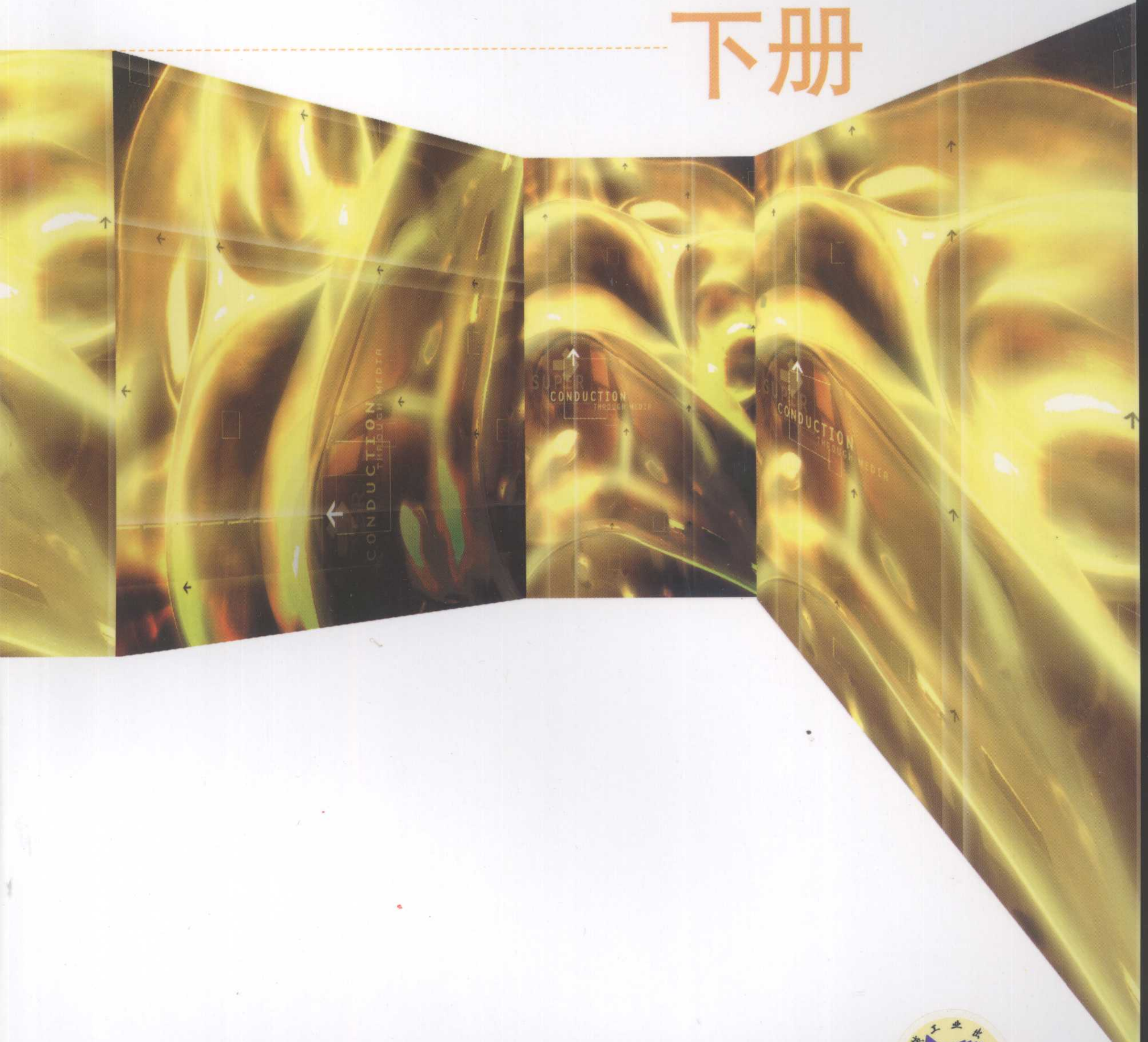
21世纪独立学院系列规划教材

高等数学

赵显曾◎主编

下册



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21世纪独立学院系列规划教材

高 等 数 学

下 册

赵显曾　主编

机 械 工 业 出 版 社

本书为培养应用型本科人材的独立学院的高等数学教材，具有结构严谨、深入浅出、重点突出、难点分散等特点.

全书共10章，分上、下两册，上册包括极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、一元函数积分学、微分方程5章，下册包括无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分5章.

本书可作为大学本科理工类各专业高等数学课程的教材或教学参考书，也可供数学爱好者自学。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/赵显曾主编．—北京：机械工业出版社，2008.1
（21世纪独立学院系列规划教材）
ISBN 978-7-111-22954-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．赵…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第186574号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：郑　丹　郑　玫　责任编辑：郑　玫
责任校对：李秋荣　责任印制：杨　曦
北京机工印刷厂印刷（北京双新装订有限公司装订）
2008年1月第1版第1次印刷
169mm×239mm・8印张・306千字
标准书号：ISBN 978-7-111-22954-4
定价：23.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639 88379641 88379643
编辑热线电话：（010）88379711

前　　言

高等数学是大学理工类和经管类本科各专业的一门重要的基础课，它不仅为许多后续课程提供必要的数学工具，而且在培养学生的理性思维方面起着无可替代的作用.

多年来，编者曾为各种不同层次、不同要求的专业类编写出版了多种高等数学教材. 近年来高等教育蓬勃发展，出现了一批重在培养本科层次应用型人才的院校，这些院校所使用的高等数学教材多是适用于重点大学的教材，然而本科应用型人才既有别于重点高校培养的研究型人才，又不同于高职高专培养的技能型人才，其对数学的要求是什么？如何在高等数学的教学中体现？基于这些问题，编者试图编写一套适合独立学院使用的高等数学教材.

本教材是根据编者在长期教学过程中积累的经验和第一手材料编写而成的。我们希望本教材做到体系结构严谨，阐述深入浅出，注意与中学数学教学的衔接；突出重点、分散难点、强调“三基”；用诱导和启发的方法介绍一些新概念、新方法；例题讲解详实，通过解题思路和解题方法的分析，指出学生中的常见疑问，帮助学生提高分析问题和解决问题的能力，增强参与感.

本教材共 10 章，分上、下两册，上册包括极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、一元函数积分学、微分方程 5 章；下册包括无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分和曲面积分 5 章.

本教材第 1、5、9 章由赵显曾编写，第 2、6 章由张国维编写，第 3、7、8 章由宋柏生编写，第 4、10 章由钱荣编写。全书由宋柏生、赵显曾负责统稿，王文蔚教授负责审稿.

本书配有免费电子课件，欢迎选用本书作教材的教师索取，电子邮箱：cmpzm @ 163. com.

由于编者水平有限，书中不当之处在所难免，为使本教材日臻完

善，适应培养本科层次应用型人才之需，恳请同行专家与读者批评指正.

编 者

2007年1月于东南大学成贤学院

目 录

第 6 章　无 穷 级 数

无穷级数是高等数学的重要组成部分，它是表示函数、进行数值计算以及解微分方程的有力工具. 本章首先介绍数项级数的基本概念和基本知识，然后讨论函数项级数，着重讨论如何将函数展开成幂级数与傅里叶级数的问题.

6.1　数项级数的概念与性质

6.1.1　数项级数的概念

定义 1　设 u_1，u_2，u_3，…，u_n，…是一个给定的无穷数列，则称形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

为**数项无穷级数**，简称**数项级数**或**级数**，其中 u_n 称为级数的**一般项**或**通项**.

级数涉及无穷多个数的相加问题，它不同于有限个数的求和，但可以通过“有限”来认识“无限”.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项之和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

称为该级数的前 n 项部分和，简称**部分和**. 令 $n=1$，2，…，构成部分和数列

$$\{S_n\}: S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots.$$

因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与其部分和数列 $\{S_n\}$ 成一一对应.

定义 2　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限存在，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**，并称 S 为级数的**和**，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**.

由定义 2 可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性等价于部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛性.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 S，则部分和 S_n 是 S 的近似值，它们之间的差

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为级数的**余项**. 用 S_n 代替 S 所产生的误差是 $|r_n|$.

例 1 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解 由于通项

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

因此部分和

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1},$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，其和 $S=1$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$.

例 2 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$ 的敛散性.

解 由于通项

$$u_n = \ln\frac{n}{n+1} = \ln n - \ln(n+1),$$

因此部分和

$$S_n = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + [\ln n - \ln(n+1)] = -\ln(n+1),$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}[-\ln(n+1)] = -\infty,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$ 发散.

例 3 讨论等比级数（又称几何级数）$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ （$a\neq 0$）的敛散性.

解　部分和

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases}$$

当 $|q|<1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$，此时级数收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$；

当 $|q|>1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，此时级数发散；

当 $q=1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$，此时级数发散；

当 $q=-1$ 时，级数为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots,$$

由于部分和 $S_n = \begin{cases} a, & n\text{ 为奇数} \\ 0, & n\text{ 为偶数} \end{cases}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，此时级数发散.

综上可知：等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}\quad (a\neq 0)$ 当 $|q|<1$ 时收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$；当 $|q|\geqslant 1$ 时发散.

例 4　证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \cdots$ 发散.

证　假若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 收敛于 S，设它的部分和数列为 $\{S_n\}$，则有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = S - S = 0.$$

但另一方面，由于

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\text{项}} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) \neq 0,$$

这与假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 收敛矛盾，故调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 必定发散.

6.1.2 级数收敛的必要条件

定理 1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

证 设收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$，由于通项 u_n 与部分和 S_n 有关系式

$$u_n = S_n - S_{n-1},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

定理 1 的等价命题是：若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

注意 级数的一般项趋于零只是级数收敛的必要条件而不是充分条件. 例如，调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，虽然 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，但它却是发散的.

例 5 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}$.

解 (1) 通项 $u_n = \frac{n}{2n-1}$，由于

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ 发散.

(2) 通项 $u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+1)^n} = \frac{n^n \cdot \sqrt[n]{n}}{n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} \neq 0,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}$ 发散.

6.1.3 数项级数的基本性质

性质 1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和为 S，则对任意常数 k，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k u_n$ 也收

敛，且其和为 kS.

证 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 的部分和分别为 S_n 与 σ_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. 由于

$$\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = kS_n,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}kS_n = k\lim_{n\to\infty}S_n = kS.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 收敛，且其和为 kS.

由性质 1 不难推出：若 k 为非零常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 具有相同的敛散性.

性质 2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，其和分别为 S 与 T，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $S\pm T$.

证 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 的部分和分别为 S_n，σ_n 与 w_n. 由于

$$\begin{aligned}w_n &= (u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)\\ &= (u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n) = S_n\pm\sigma_n,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}w_n = \lim_{n\to\infty}S_n \pm \lim_{n\to\infty}\sigma_n = S\pm T,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 收敛，且其和为 $S\pm T$.

性质 2 也表述成为两个收敛级数可以逐项相加或逐项相减.

推论 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 发散.（证明留给读者）

注意 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 不一定发散. 例如，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)$ 都发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[1+(-1)]$ 却是收敛的.

性质 3 在级数的前面添加或去掉有限项，不会改变级数的敛散性.

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 增加前 m 项而得到，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 去掉前 m 项而得到. 设这两个级数的部分和分别为 T_n 与 S_n，则当 $n>m$时，有

$$T_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_m + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-m} = T_m + S_{n-m}.$$

因为 T_m 是常数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-m}=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$，所以由上式知 $\{T_n\}$ 与 $\{S_n\}$ 具有相同的敛散性，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 有相同的敛散性，即在级数的前面添加或去掉有限项，不会改变级数的敛散性.

性质 4 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则不改变它的各项次序任意添加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变.

证 不妨设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 S，在不改变它的各项次序的条件下，按照某一规律加括号后所成的级数为

$$u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + u_5 + u_6) + \cdots.$$

用 σ_m 表示加括号后所成的级数的前 m 项之和，用 S_n 表示级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项之和，于是有

$$\sigma_1 = S_1,\ \sigma_2 = S_3,\ \sigma_3 = S_6,\ \cdots,\ \sigma_m = S_n,\ \cdots.$$

显然 $m\leqslant n$，当 $m\to\infty$时，$n\to\infty$，从而

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m = \lim_{n\to\infty}S_n = S.$$

因此性质 4 成立.

性质 4 说明任何收敛级数都具有结合律. 由性质 4 的逆否命题可知：如果加括号后的级数发散，则原级数也发散.

注意 性质 4 的逆命题不一定成立，即加括号后所成的级数收敛，而原级数未必收敛. 例如：级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于零，但去括号后所得级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

却是发散的.

例 6 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2}{n(n+1)}-(-1)^n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right]$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n+100}+\dfrac{2}{3^n}\right)$.

解　(1) 由例 1 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，根据性质 1 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$ 也收敛.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 为公比 $q=-\frac{3}{4}$ 的等比级数，由于 $|q|=\frac{3}{4}<1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 收敛. 所以根据性质 2 可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n(n+1)}-(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$ 收敛.

(2) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+100}$ 是调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 去掉前面 100 项而成的级数，且调和级数发散，所以根据性质 3 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+100}$ 发散.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ 为公比 $q=\frac{1}{3}$ 的等比级数，$|q|=\frac{1}{3}<1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ 收敛. 因此，由性质 2 的推论可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+100}+\frac{2}{3^n}\right)$ 发散.

习　题　一

1. 根据级数收敛和发散的定义，判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

2. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{e^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{2}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{n}$；

(5) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}+\cdots$.

3. 判断下列命题是否正确？若正确，则给予证明；若不正确，请举出反例.

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散；

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛；

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，并设 $u_n \neq 0 \quad (n=1,2,\cdots)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_n}$ 必收敛；

(4) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，并设 $u_n \neq 0 \quad (n=1,2,\cdots)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_n}$ 必发散.

4. 证明：若数列 $\{nu_n\}$ 收敛，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(u_n-u_{n-1})$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

6.2 数项级数的判敛法

判别级数的敛散性是级数理论中的首要问题. 如果级数是收敛的，就可对它进行某些运算，并设法求出它的和或和的近似值. 但在一般情况下，直接根据级数收敛、发散的定义来判别级数的敛散性，往往是很困难的，甚至行不通，因此需要寻求判别级数敛散性的一些简便有效的方法. 遵循“由特殊到一般”的原则，我们先从最简单的级数，即正项级数着手来讨论级数的判敛法.

6.2.1 正项级数及其判敛法

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的每一项 $u_n \geqslant 0 \quad (n=1,2,\cdots)$，则称之为**正项级数**. 显然，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 单调增加，即 $S_n \leqslant S_{n+1}$. 于是，若 $\{S_n\}$ 有界，则根据单调有界原理知，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 必存在，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 反之，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 S，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则 $\{S_n\}$ 必有界. 从而得到下列定理.

定理 1（有界性判别法） 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

定理 1 的重要性不在于利用它来判别正项级数的敛散性，而在于它是证明下面许多判敛法的基础.

定理 2（比较判别法） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \leqslant v_n(n=$

$1,2,\cdots$)，

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散.

证　(1) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的部分和分别为 S_n 与 σ_n. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则由定理 1 的必要性知 $\{\sigma_n\}$ 有界，即存在 $M>0$，使得 $\sigma_n \leqslant M$ $(n \in \mathbf{N}_+)$. 由于 $u_n \leqslant v_n$ $(n=1,2,\cdots)$，故 $S_n \leqslant \sigma_n \leqslant M$ $(n \in \mathbf{N}_+)$. 因此 $\{S_n\}$ 有界，由定理 1 的充分性知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(2) 用反证法. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则由 (1) 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散矛盾，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

考虑到级数的每一项同乘以不为零的常数 k，以及去掉级数前面的有限项不会改变级数的敛散性，可得如下推论：

推论　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \leqslant kv_n$ $(k>0, N \in \mathbf{N}_+, n \geqslant N)$，

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散.

例 1　讨论 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ $(p \in \mathbf{R})$ 的敛散性.

解　(1) 当 $p \leqslant 1$ 时，$\dfrac{1}{n^p} \geqslant \dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$，而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故由比较判别法可知 p 级数发散.

(2) 当 $p>1$ 时，对于 $n-1 \leqslant x \leqslant n$，有 $\dfrac{1}{x^p} \geqslant \dfrac{1}{n^p}$，所以

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}\mathrm{d}x \leqslant \int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x \ (n=2,3,\cdots).$$