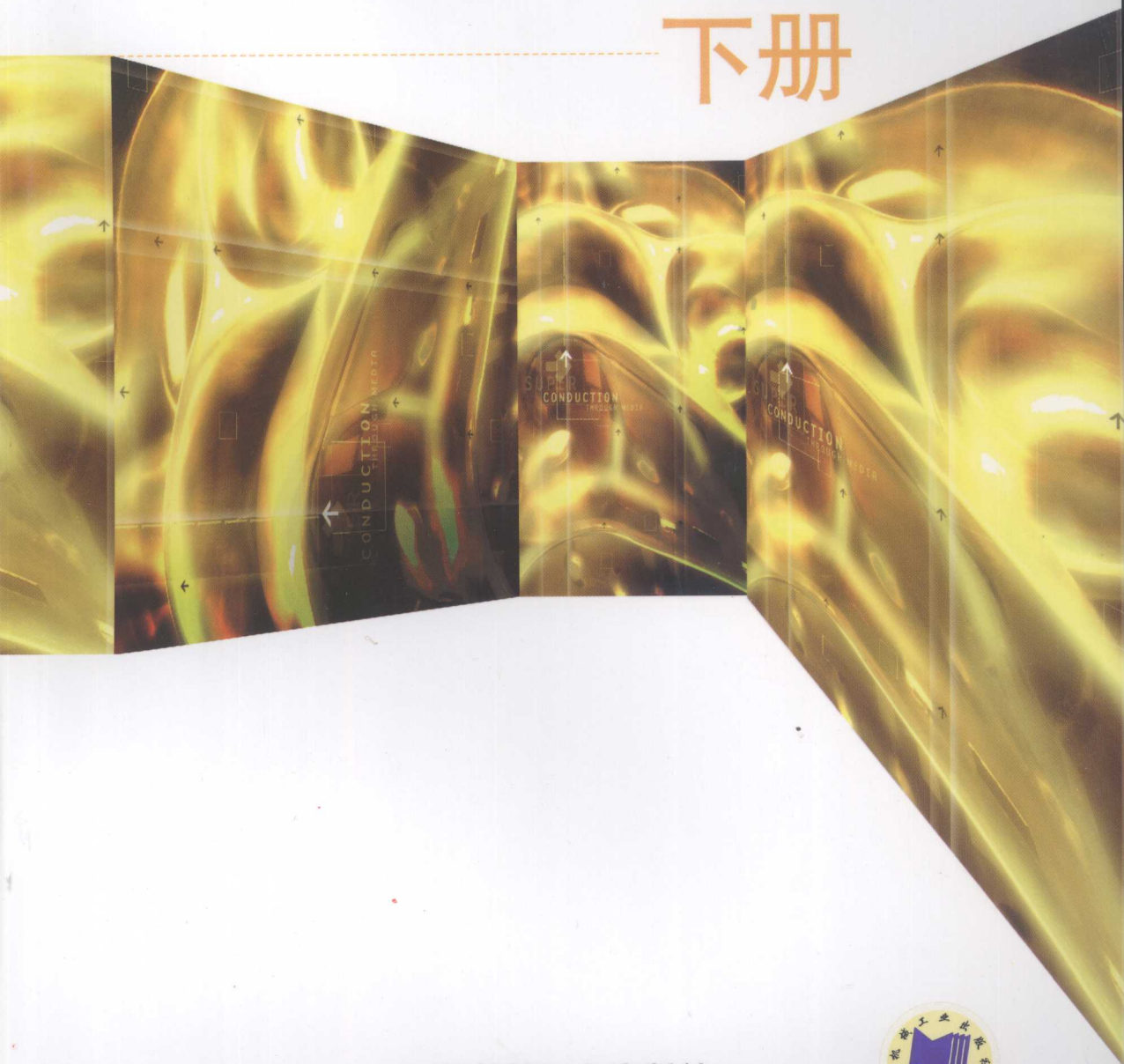


21世纪独立学院系列规划教材

高等数学

赵显曾◎主编

下册



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



21 世纪独立学院系列规划教材

高等数学

下 册

赵显曾 主编



机械工业出版社

本书为培养应用型本科人材的独立学院的高等数学教材，具有结构严谨、深入浅出、重点突出、难点分散等特点。

全书共 10 章，分上、下两册，上册包括极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、一元函数积分学、微分方程 5 章，下册包括无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分 5 章。

本书可作为大学本科学理工类各专业高等数学课程的教材或教学参考书，也可供数学爱好者自学。

主编 曾显佳

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学. 下册/赵显曾主编. —北京: 机械工业出版社, 2008.1

(21 世纪独立学院系列规划教材)

ISBN 978-7-111-22954-4

I. 高… II. 赵… III. 高等数学—高等学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 186574 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 郑 丹 郑 玫 责任编辑: 郑 玫

责任校对: 李秋荣 责任印制: 杨 曦

北京机工印刷厂印刷 (北京双新装订有限公司装订)

2008 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

169mm×239mm · 8 印张 · 306 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-22954-4

定价: 23.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

销售服务热线电话: (010) 68326294

购书热线电话: (010) 88379639 88379641 88379643

编辑热线电话: (010) 88379711

封面无防伪标均为盗版

前 言

高等数学是大学理工类和经管类本科各专业的一门重要的基础课，它不仅为许多后续课程提供必要的数学工具，而且在培养学生的理性思维方面起着无可替代的作用。

多年来，编者曾为各种不同层次、不同要求的专业类编写出版了多种高等数学教材。近年来高等教育蓬勃发展，出现了一批重在培养本科层次应用型人才的院校，这些院校所使用的高等数学教材多是适用于重点大学的教材，然而本科应用型人才既有别于重点高校培养的研究型人才，又不同于高职高专培养的技能型人才，其对数学的要求是什么？如何在高等数学的教学中体现？基于这些问题，编者试图编写一套适合独立学院使用的高等数学教材。

本教材是根据编者在长期教学过程中积累的经验和第一手材料编写而成的。我们希望本教材做到体系结构严谨，阐述深入浅出，注意与中学数学教学的衔接；突出重点、分散难点、强调“三基”；用诱导和启发的方法介绍一些新概念、新方法；例题讲解详实，通过解题思路和解题方法的分析，指出学生中的常见疑问，帮助学生提高分析问题和解决问题的能力，增强参与感。

本教材共 10 章，分上、下两册，上册包括极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、一元函数积分学、微分方程 5 章；下册包括无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分和曲面积分 5 章。

本教材第 1、5、9 章由赵显曾编写，第 2、6 章由张国维编写，第 3、7、8 章由宋柏生编写，第 4、10 章由钱荣编写。全书由宋柏生、赵显曾负责统稿，王文蔚教授负责审稿。

本书配有免费电子课件，欢迎选用本书作教材的教师索取，电子邮箱：cmpzm@163.com。

由于编者水平有限，书中不当之处在所难免，为使本教材日臻完

善，适应培养本科层次应用型人才之需，恳请同行专家与读者批评指正。

编者

2007年1月于东南大学成贤学院

目 录

前言

第 6 章 无穷级数	1
6.1 数项级数的概念与性质	1
6.1.1 数项级数的概念	1
6.1.2 级数收敛的必要条件	4
6.1.3 数项级数的基本性质	4
习题一	7
6.2 数项级数的判敛法	8
6.2.1 正项级数及其判敛法	8
6.2.2 变号级数及其判敛法	16
习题二	20
6.3 幂级数	21
6.3.1 函数项级数的基本概念	21
6.3.2 幂级数的收敛域和运算	22
习题三	30
6.4 函数展开为幂级数	31
6.4.1 泰勒级数	31
6.4.2 函数展开为幂级数的方法	33
习题四	38
6.5 幂级数的应用举例	39
6.5.1 近似计算	39
6.5.2 微分方程的级数解法	41
6.5.3 欧拉公式	42
习题五	43
6.6 傅里叶级数	43
6.6.1 三角函数系的正交性	44
6.6.2 函数展开为傅里叶级数	44
习题六	50
6.7 正弦级数和余弦级数	51
6.7.1 奇函数和偶函数的傅里叶级数	51

6.7.2 函数展开成正弦级数或余弦级数	52
习题七	54
6.8 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数	55
习题八	59
第 6 章小结	59
第 7 章 向量代数与空间解析几何	61
7.1 空间直角坐标系	61
7.1.1 空间中点的直角坐标	61
7.1.2 两点间的距离	62
7.2 向量及其坐标表示	63
7.2.1 向量的概念	63
7.2.2 向量的线性运算	64
7.2.3 向量在轴上的投影	65
7.2.4 向量的坐标表示	66
习题一	70
7.3 向量的数量积、向量积、混合积	71
7.3.1 两向量的数量积	71
7.3.2 两向量的向量积	72
7.3.3 向量的混合积	75
习题二	77
7.4 平面方程	78
7.4.1 平面的方程	78
7.4.2 有关平面的一些问题	81
习题三	83
7.5 直线方程	84
7.5.1 直线的方程	84
7.5.2 有关直线与平面的一些问题	

题	87	习题六	135
习题四	89	8.7 多元函数微分学在几何上	
7.6 曲面与空间曲线	90	的应用	136
7.6.1 球面与柱面	90	8.7.1 空间曲线的切线与法平	
7.6.2 空间曲线	92	面	136
7.6.3 锥面与旋转曲面	94	8.7.2 曲面的切平面与法线	138
7.6.4 几个常见的二次曲面	96	习题七	140
习题五	98	8.8 多元函数的极值	140
第7章小结	99	8.8.1 极值	140
第8章 多元函数及其微分法	101	8.8.2 最大值和最小值	143
8.1 多元函数的概念	101	8.8.3 条件极值	144
8.1.1 预备知识	101	习题八	147
8.1.2 多元函数的概念	102	第8章小结	147
8.1.3 二元函数的几何意义	103	第9章 重积分	149
习题一	104	9.1 二重积分的概念和性质	149
8.2 多元函数的极限与连续	104	9.1.1 两个实例	149
8.2.1 多元函数的极限	104	9.1.2 二重积分的概念	150
8.2.2 多元函数的连续性	106	9.1.3 二重积分的性质	151
习题二	107	习题一	152
8.3 偏导数	107	9.2 二重积分的计算	153
8.3.1 偏导数概念	107	9.2.1 用直角坐标计算二重积	
8.3.2 偏导数的几何意义	110	分	153
8.3.3 高阶偏导数	110	9.2.2 用极坐标计算二重积分	158
习题三	113	习题二	164
8.4 全微分及其应用	114	9.3 三重积分	166
8.4.1 全微分	114	9.3.1 三重积分的概念	166
8.4.2 全微分在近似计算中的应		9.3.2 用直角坐标计算三重积	
用	118	分	168
习题四	118	9.3.3 用柱面坐标计算三重积	
8.5 方向导数与梯度	119	分	170
8.5.1 方向导数	119	9.3.4 用球面坐标计算三重积	
8.5.2 梯度	121	分	173
习题五	122	习题三	175
8.6 复合函数和隐函数微分		9.4 重积分的应用	177
法	123	9.4.1 曲面的面积	177
8.6.1 复合函数微分法	123	9.4.2 重积分在物理学中的应用	
8.6.2 隐函数微分法	130	举例	179

习题四	182	10.4 格林公式及其应用	200
第 9 章小结	183	10.4.1 格林公式	200
第 10 章 曲线积分和曲面积分	185	10.4.2 平面曲线积分与路径无关 的条件	204
10.1 第一型曲线积分	185	习题四	208
10.1.1 第一型曲线积分的概 念	185	10.5 第二型曲面积分	210
10.1.2 第一型曲线积分的性 质	186	10.5.1 曲面侧的概念	210
10.1.3 第一型曲线积分的计 算	186	10.5.2 第二型曲面积分的概 念	210
习题一	188	10.5.3 第二型曲面积分的性 质	212
10.2 第一型曲面积分	189	10.5.4 第二型曲面积分的计 算	212
10.2.1 第一型曲面积分的概 念	189	10.5.5 两类曲面积分的关系	215
10.2.2 第一型曲面积分的性 质	190	习题五	216
10.2.3 第一型曲面积分的计 算	190	10.6 高斯公式与散度	217
习题二	193	10.6.1 高斯公式	217
10.3 第二型曲线积分	193	10.6.2 向量场的散度	221
10.3.1 第二型曲线积分的概 念	194	习题六	224
10.3.2 第二型曲线积分的性 质	196	10.7 斯托克斯公式与旋度简 介	225
10.3.3 第二型曲线积分的计 算	196	10.7.1 斯托克斯公式	225
习题三	199	10.7.2 向量场的旋度	227
		习题七	228
		第 10 章小结	229
		部分习题参考答案	230
		参考文献	245

第6章 无穷级数

无穷级数是高等数学的重要组成部分,它是表示函数、进行数值计算以及解微分方程的有力工具.本章首先介绍数项级数的基本概念和基本知识,然后讨论函数项级数,着重讨论如何将函数展开成幂级数与傅里叶级数的问题.

6.1 数项级数的概念与性质

6.1.1 数项级数的概念

定义 1 设 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ 是一个给定的无穷数列,则称形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

为数项无穷级数,简称数项级数或级数,其中 u_n 称为级数的一般项或通项.

级数涉及无穷多个数的相加问题,它不同于有限个数的求和,但可以通过“有限”来认识“无限”.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项之和

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

称为该级数的前 n 项部分和,简称部分和.令 $n=1, 2, \dots$, 构成部分和数列

$$\{S_n\}: S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

因此,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与其部分和数列 $\{S_n\}$ 成一一对应.

定义 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限存在,即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则称

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,并称 S 为级数的和,记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在,则称

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

由定义 2 可知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性等价于部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛性.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S , 则部分和 S_n 是 S 的近似值, 它们之间的差

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为级数的余项. 用 S_n 代替 S 所产生的误差是 $|r_n|$.

例 1 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解 由于通项

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

因此部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

从而有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 其和 $S=1$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

例 2 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ 的敛散性.

解 由于通项

$$u_n = \ln \frac{n}{n+1} = \ln n - \ln(n+1),$$

因此部分和

$$S_n = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + [\ln n - \ln(n+1)] = -\ln(n+1),$$

从而有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [-\ln(n+1)] = -\infty,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ 发散.

例 3 讨论等比级数 (又称几何级数) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ($a \neq 0$) 的敛散性.

解 部分和

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} \frac{a(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases}$$

当 $|q| < 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, 此时级数收敛, 其

和为 $\frac{a}{1-q}$;

当 $|q| > 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, 此时级数发散;

当 $q=1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty$, 此时级数发散;

当 $q=-1$ 时, 级数为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots,$$

由于部分和 $S_n = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 此时级数发散.

综上所述: 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ($a \neq 0$) 当 $|q| < 1$ 时收敛, 其和为 $\frac{a}{1-q}$;

当 $|q| \geq 1$ 时发散.

例4 证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散.

证 假若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 收敛于 S , 设它的部分和数列为 $\{S_n\}$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S,$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = S - S = 0.$$

但另一方面, 由于

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ 项}} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) \neq 0,$$

这与假设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 收敛矛盾, 故调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 必定发散.

6.1.2 级数收敛的必要条件

定理 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

证 设收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, 由于通项 u_n 与部分和 S_n 有关系式

$$u_n = S_n - S_{n-1},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

定理 1 的等价命题是: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

注意 级数的一般项趋于零只是级数收敛的必要条件而不是充分条件. 例

如, 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 虽然 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 但它却是发散的.

例 5 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}.$$

解 (1) 通项 $u_n = \frac{n}{2n-1}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ 发散.

$$(2) \text{ 通项 } u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+1)^n} = \frac{n^n \cdot \sqrt[n]{n}}{n^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}, \text{ 由于}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}$ 发散.

6.1.3 数项级数的基本性质

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和为 S , 则对任意常数 k , 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 也收

敛, 且其和为 kS .

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和分别为 S_n 与 σ_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. 由于

$$\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = kS_n,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} kS_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = kS.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛, 且其和为 kS .

由性质 1 不难推出: 若 k 为非零常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 具有相同的敛散性.

性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 其和分别为 S 与 T , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 且其和为 $S \pm T$.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 的部分和分别为 S_n , σ_n 与 w_n . 由于

$$\begin{aligned} w_n &= (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = S_n \pm \sigma_n, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S \pm T,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛, 且其和为 $S \pm T$.

性质 2 也表述成为两个收敛级数可以逐项相加或逐项相减.

推论 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 发散.

(证明留给读者)

注意 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 不一定发散. 例

如, $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)$ 都发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)]$ 却是收敛的.

性质 3 在级数的前面添加或去掉有限项, 不会改变级数的敛散性.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 增加前 m 项而得到, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 去掉前 m 项而得到. 设这两个级数的部分和分别为 T_n 与 S_n , 则当 $n > m$ 时, 有

$$T_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_m + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-m} = T_m + S_{n-m}.$$

因为 T_m 是常数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-m} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, 所以由上式知 $\{T_n\}$ 与 $\{S_n\}$ 具有相同的敛散性, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 有相同的敛散性, 即在级数的前面添加或去掉有限项, 不会改变级数的敛散性.

性质 4 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则不改变它的各项次序任意添加括号后所成的级数仍收敛, 且其和不变.

证 不妨设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S , 在不改变它的各项次序的条件下, 按照某一规律加括号后所成的级数为

$$u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + u_5 + u_6) + \cdots.$$

用 σ_m 表示加括号后所成的级数的前 m 项之和, 用 S_n 表示级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项之和, 于是有

$$\sigma_1 = S_1, \sigma_2 = S_3, \sigma_3 = S_6, \cdots, \sigma_m = S_n, \cdots.$$

显然 $m \leq n$, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $n \rightarrow \infty$, 从而

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

因此性质 4 成立.

性质 4 说明任何收敛级数都具有结合律. 由性质 4 的逆否命题可知: 如果加括号后的级数发散, 则原级数也发散.

注意 性质 4 的逆命题不一定成立, 即加括号后所成的级数收敛, 而原级数未必收敛. 例如: 级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots$$

收敛于零, 但去括号后所得级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

却是发散的.

例 6 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n(n+1)} - (-1)^n \left(\frac{3}{4} \right)^n \right]; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+100} + \frac{2}{3^n} \right).$$

解 (1) 由例 1 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 根据性质 1 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ 也收敛.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n$ 为公比 $q = -\frac{3}{4}$ 的等比级数, 由于 $|q| = \frac{3}{4} < 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n$ 收敛. 所以根据性质 2 可知, $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n(n+1)} - (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n \right]$ 收敛.

(2) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+100}$ 是调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 去掉前面 100 项而成的级数, 且调和级数发散, 所以根据性质 3 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+100}$ 发散.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ 为公比 $q = \frac{1}{3}$ 的等比级数, $|q| = \frac{1}{3} < 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ 收敛. 因此, 由性质 2 的推论可知, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+100} + \frac{2}{3^n} \right)$ 发散.

习 题 一

1. 根据级数收敛和发散的定议, 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

2. 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{e^n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n};$$

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{n};$$

$$(5) \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} + \cdots.$$

3. 判断下列命题是否正确? 若正确, 则给予证明; 若不正确, 请举出反例.

$$(1) \text{ 若 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛, } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) \text{ 发散;}$$

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛;

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 并设 $u_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 必收敛;

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 并设 $u_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 必发散.

4. 证明: 若数列 $\{nu_n\}$ 收敛, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n-1})$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

6.2 数项级数的判敛法

判别级数的敛散性是级数理论中的首要问题. 如果级数是收敛的, 就可对它进行某些运算, 并设法求出它的和或和的近似值. 但在一般情况下, 直接根据级数收敛、发散的定义来判别级数的敛散性, 往往是很困难的, 甚至行不通, 因此需要寻求判别级数敛散性的一些简便有效的方法. 遵循“由特殊到一般”的原则, 我们先从最简单的级数, 即正项级数着手来讨论级数的判敛法.

6.2.1 正项级数及其判敛法

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的每一项 $u_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 则称之为正项级数. 显然, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 单调增加, 即 $S_n \leq S_{n+1}$. 于是, 若 $\{S_n\}$ 有界, 则根据单调有界原理知, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 必存在, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 反之, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则 $\{S_n\}$ 必有界. 从而得到下列定理.

定理 1 (有界性判别法) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

定理 1 的重要性不在于利用它来判别正项级数的敛散性, 而在于它是证明下面许多判敛法的基础.

定理 2 (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $u_n \leq v_n$ ($n =$

$1, 2, \dots)$,

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证 (1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 S_n 与 σ_n . 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则由定理 1 的必要性知 $\{\sigma_n\}$ 有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $\sigma_n \leq M$ ($n \in \mathbf{N}_+$). 由于 $u_n \leq v_n$ ($n=1, 2, \dots$), 故 $S_n \leq \sigma_n \leq M$ ($n \in \mathbf{N}_+$). 因此 $\{S_n\}$ 有界, 由定理 1 的充分性知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 用反证法. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则由 (1) 知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 这与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散矛盾, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

考虑到级数的每一项同乘以不为零的常数 k , 以及去掉级数前面的有限项不会改变级数的敛散性, 可得如下推论:

推论 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $u_n \leq kv_n$ ($k > 0, N \in \mathbf{N}_+, n \geq N$),

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

例 1 讨论 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p \in \mathbf{R}$) 的敛散性.

解 (1) 当 $p \leq 1$ 时, $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ ($n=1, 2, \dots$), 而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由比较判别法可知 p 级数发散.

(2) 当 $p > 1$ 时, 对于 $n-1 \leq x \leq n$, 有 $\frac{1}{x^p} \geq \frac{1}{n^p}$, 所以

$$\frac{1}{n^p} = \int_{n-1}^n \frac{1}{n^p} dx \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx \quad (n=2, 3, \dots).$$