线性代数教程

高等学校教材

线性代数教程

赵德修
徐蕴珍　杨鹏飞
杨　云　何先平
主审　孙清华

华中理工大学出版社

(鄂)新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据

线性代数教程/赵德修等
武汉:华中理工大学出版社,1998 年 2 月
ISBN 7-5609-1709-7
I. 线…
Ⅱ. ①赵…②徐…③杨…④杨…⑤何…
Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材
Ⅳ. O151

线性代数教程

赵德修
徐蕴珍　杨鹏飞　杨云　何先平

责任编辑　李立鹏　林化夷

*

华中理工大学出版社出版发行
(武昌喻家山 邮编 430074)
新华书店湖北发行所经销
武汉市科普教育印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/32　印张:7.5 字数:160 000
1998 年 2 月第 1 版　1998 年 2 月第 1 次印刷
印数 1-5 000
ISBN 7-5609-1709-7/O・176
定价:7.00 元

内容提要

本书是根据1996年全国工科数学课程教学指导委员会制定的《线性代数》课程教学基本要求及作者的教学实践而编写的工科院校主动式教学法的试用教材.

内容包括:行列式;矩阵;线性方程组;二次型;特征值与特征向量.书中配备了相当数量的思考题及习题,书末附录中给出了部分习题的答案与提示;连加号 Σ 与连乘号 Π;特殊矩阵及其性质.

本书由浅入深,循序渐进,层次清晰,通俗易懂,便于自学.可作为工科高等院校教材或教学参考书.

前　言

本书遵照全国工科数学课程教学指导委员会于1996年制定的《线性代数》课程教学基本要求，结合我们在工科院校多年教学实践的基础上编写的.它适用于工科各专业的《线性代数》课程要求，课内学时为28－36的均可选用本教材.

线性代数是讨论代数学中线性关系经典理论的课程，它具有较强的抽象性与逻辑性，是高等学校工科本科各专业的一门重要的基础理论课.由于线性问题广泛存在于科学技术的各个领域，而某些非线性问题在一定条件下，可以转化为线性问题，因此本课程所介绍的方法广泛地应用于各个学科.尤其在计算机日益普及的今天，该课程的地位与作用更显得重要.

通过教学，使学生掌握该课程的基本理论与基本方法，培养解决实际问题的能力，并为学习相关课程及进一步扩大数学知识而奠定必要的数学基础.

本书是根据教学改革的要求而编写的主动式教学法的改革试用教材.其目的是在教师的指导和帮助下，充分调动大学生的学习主观能动性，以利于达到本课程的教学基本要求.

本书是中南地区部分院校在华中理工大学出版社的帮助和支持下编写的.主编单位是空军雷达学院.在编写与试用的过程中得到了空军雷达学院院长、教授郭锡林少将；副院长王英烈少将及数学教研室全体同志的热情帮助和支持；武汉纺织学院孙清华副教授主审了本书，谨在此对他们一并表示衷心的感谢！

由于水平有限，错误与不当之处在所难免，恳请读者及用本教材的教师批评指正.

编者

1998年1月于汉口

目　录

第一章　行列式

行列式是线性代数的基本工具之一，它是从解线性方程组而引出的.

在中学时，已经学习过二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1-1}$$

用消元法得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}; \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

当二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-2}$$

不等于零时，二元线性方程组(1-1)就有唯一的解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}; \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases} \tag{1-3}$$

其中 $D_j(j=1,2)$ 是用常数项 b_1,b_2 代替 D 中的第 j 列所得的二阶行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

引入了二阶行列式来表达二元线性方程组(1-1)的解的公式(1-3)，它形式简单，便于记忆，且鲜明地给出了二元线性方程组(1-1)的解与其系数和常数项的关系.

类似地，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1-4}$$

用消元法也可以得到仅含一个未知数 x_1 的方程，x_1 的系数用三阶行列式 D 表示，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1-5}$$

若此行列式不等于零时，则得未知数 x_1 的值

$$x_1 = \frac{D_1}{D};$$

同理可得

$$x_2 = \frac{D_2}{D}; \tag{1-6}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

其中 $D_j(j = 1,2,3)$ 是用常数项 b_1,b_2,b_3 代替 D 中的第 j 列所得的三阶行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

因此，对于三元线性方程组(1-4)，当其系数所组成的三阶行列式(1-5)不等于零时，它就有唯一的解，其解可以用(1-6)式简捷

地表示.

在自然科学与工程技术中,我们往往会碰到未知数的个数有几十、几百甚至成千上万个的线性方程组,一般地,对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \qquad\qquad\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1-7}$$

我们自然会问:关于它的解是否也有类似上述的结论呢?即是否也能定义所谓 n 阶行列式,当由(1-7)式的系数所组成的 n 阶行列式不等于零时,也可以用 n 阶行列式表达(1-7) 式的解呢?答案是肯定的.为此,本章三讲内容依次解决如下三个问题:

1° 怎样定义 n 阶行列式?

2° n 阶行列式有哪些性质?怎样计算 n 阶行列式?

3° 在什么条件下(1-7) 式有解?并能用 n 阶行列式表示?如何表示?

第一讲　n 阶行列式

为了定义 n 阶行列式,我们先来看三阶行列式(1-5) 是怎样构成的.

把(1-5)改写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{32} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (1\text{-}8)$$

(1-8)式的右端是三项的和，每一项恰恰是左端三阶行列式的第一行的一个元素与从该三阶行列式中删去 a_{1j} 所在的行和列以后所得的二阶行列式的乘积；每一项前面的符号由 a_{1j} 的行数和列数之和 $(1+j)$ 来决定，即每一项前面冠以符号 $(-1)^{1+j}$.

为方便计，我们规定在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中删去 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 所在的行和列的元素，余下的元素按原来的次序构成一个二阶行列式，称为**元素 a_{ij} 的余子式**. 记作 M_{ij}. 称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为**元素 a_{ij} 的代数余子式**. 记作 A_{ij}. 即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

例如：元素 a_{21} 的余子式和代数余子式分别是

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(1-8)式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \qquad (1\text{-}9)$$

这说明：三阶行列式可以表示成其第一行元素与对应于它们的代数余子式的乘积之和. 也就是说：三阶行列式可以由相应的三个二阶行列式来定义.

我们规定：一阶行列式为

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

对于二阶行列式也同样引进余子式和代数余子式的概念和记号，那么二阶行列式(1-2)也可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}. \tag{1-10}$$

类似地，定义四阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \tag{1-11}$$

我们从二、三、四阶行列式的展开式(1-10)、(1-9)、(1-11)中发现它们遵循着一个共同的规律——可以按第一行展开．因此，我们用递归法给出 n 阶行列式定义

定义 1　当 $n=1$ 时，规定一阶行列式为

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

当 $n>1$ 时，规定 n 阶行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}, \tag{1-12}$$

其中 A_{ij} 为**元素 a_{ij} 的代数余子式**，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

M_{ij} 称为**元素 a_{ij} 的余子式**.

(1-12) 式通常称为 n **阶行列式按第一行元素的展开式**.

在(1-12) 式中,$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的**主对角线**. 相应地,$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为**主对角元素**. 另一条对角线称为行列式的**副对角线**.

由定义一可以用数学归纳法证明:n 阶行列式是个数值,它是由其 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 中所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和;它总共有 $n!$ 项;其中带正号的项和带负号的项各占一半.

例 1 证明 n 阶下三角形行列式(当 $i<j$ 时 $a_{ij}=0$,即主对角线以上之元素皆为零).

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

解 对 n 作数学归纳法.

当 $n=2$ 时,结论显然成立.

假设结论对 $n-1$ 阶下三角形行列式成立,则

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$ 证毕.

特别地,对于 n 阶对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 2　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & * \\ a_n & & & \end{vmatrix},$$

其中副对角线以上元素皆为零,副对角线以下 * 处元素可为任意数.

解　依定义得

$$D_n=\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & * \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}a_1\begin{vmatrix} & & a_2 \\ & a_3 & \\ \iddots & & * \\ a_n & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}a_1D_{n-1}.$$

由此递推公式可得

$$D_n=(-1)^{n+1}a_1D_{n-1} = (-1)^{n-1}a_1D_{n-1}$$
$$= (-1)^{n-1}a_1(-1)^{n-2}a_2D_{n-2}$$

$$= \cdots = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

类似于定义一的讨论，参见习题 1-1 第 3,4 题，可以更一般地给出 n 阶行列式的定义.

定义 2 当 $n=1$ 时，规定一阶行列式为

$$D_1 = |a_{11}| = a_{11},$$

当 $n>1$ 时，规定 n 阶行列式为

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{1-13}$$

或

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \tag{1-14}$$

它们称为 n **阶行列式按第** i **行(第** j **列)元素的展开式**.

思考题 1-1

在复习本讲内容以后，就本讲所涉及的知识提出至少三个问题.并设法自己回答这些问题.以后各讲均要求这样做.不再累述(这些问题可以是概念的，理论的，方法的；也可以是与以前所学知识有关的；或是对本讲内容、方法、理论的进一步的思考与推广的…等等.要带着这些问题去研究教材，去找有关参考书或资料…提出自己的看法和解决办法).

你对所学知识提出的问题越多，自己解决的问题越多，说明你学习的越深入，能力越强.能力的获得将终生获益！

以下提出一些具体思考题：

1. 为什么要定义 n 阶行列式？

2. 怎样定义 n 阶行列式？除了本书所用的递归法定义外，还有其他的定义方法吗？

3. 为什么说 n 阶行列式本质上是代表一个数？

4. 数学归纳法是线性代数中常用的论证方法之一. 试说明数学归纳法的论证步骤和其适用范围？

5. 二、三阶行列式可以用对角线法则（也称为沙路法）来计算，试举例说明对于三阶以上的行列式，对角线法则不再适用.

习 题 1-1

A 组

1. 试计算下列行列式：

1) $\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}$ （空白处皆为零）；

2) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. 试证明：第一行元素皆为零的 n 阶行列式的值为零.

B 组

3. 验证：