普通高等教育"十一五"国家级规划教材

理论力学简明教程

管靖　刘文彪　主编

科学出版社
www.sciencep.com

031/154
2008

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

理论力学简明教程

管 靖 刘文彪 主编

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书为普通高等教育"十一五"国家级规划教材，是作者在多年教学经验的基础上，考虑到目前大众化教育的背景，以学生就业后实用为原则编写而成的. 本书采用现代分析力学的体系，突出了分析力学的优势. 全书主要内容包括质点运动学、质点动力学、刚体运动学、非惯性系中的质点力学、质点系动力学、拉格朗日动力学、哈密顿动力学、专题研讨（有心力、刚体定点运动），同时本书还把数学软件 Matlab 在理论力学中的应用作为附录，供需要的老师和学生学习使用.

本书适合于普通高等院校物理专业本科生学习理论力学课程使用，尤其适用于少学时的课程要求，也可供相关科研技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

理论力学简明教程/管靖，刘文彪主编. —北京：科学出版社，2008
（普通高等教育"十一五"国家级规划教材）
ISBN 978-7-03-021413-3

Ⅰ.理…　Ⅱ.①管…②刘…　Ⅲ.理论力学-高等学校-教材　Ⅳ.O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 036554 号

责任编辑：胡云志　唐保军／责任校对：陈丽珠
责任印制：张克忠／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

明辉印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2008 年 6 月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2008 年 6 月第一次印刷　印张：14 1/2
印数：1—4 000　字数：272 000

定价：22.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉）

前言

本书主要为普通师范院校物理专业编写，也可适用于一般院校的理论力学少学时课程. 教材编写力求简明，正文中有少量加 * 号的小字内容，如果教学时间不足，可由学生按自身情况选读.

在当前高等教育大众化的情况下，一般院校物理专业的多数学生通过学习普通物理力学并不能很好地掌握牛顿力学；而对师范院校的学生，学好牛顿力学正是将来能做一名好教师的关键所在. 因此，本教材以牛顿力学为主，使读者学习后能更好地胜任教师工作，分析力学则以能为后续课程作必要准备为原则进行简明的讲授.

本书定名为"简明教程"还想体现物理学中简约的思想. 比如，我们应学会尽量多的方法，有尽量好的数理功底，但解决问题时要以简约为原则，方法没有高低贵贱之分，哪个方法最简洁，用的数学少，物理图像清晰，哪个方法就最好.

为适应师范教育特点，第 5 章中包含了牛顿力学的刚体静力学内容，并较多地关注了对物理图像的讲解，对一些不很必须的繁难问题作了适度的简化.

考虑到绝大多数读者不会继续学习高等分析力学，所以在分析力学中采用了现代分析力学的体系，以哈密顿原理为公理，由此导出拉格朗日方程. 讲授中略去一些不必须的概念，避免首先抛出大量概念，使读者不知所措，反而掩盖了分析力学优势的做法.

一般物理专业的学生，学习分析力学主要是为后续理论物理课程做准备，在以后的学习和工作中很少会用分析力学去研究力学问题，对于非有势系的分析力学理论更是极少涉及. 实际上非有势系在物理中不常见，四种基本相互作用都是有势的，常规例题、习题中的恒力或恒力矩，其实也是有势的. 从后续课程及物理专业的学生将来学习、工作的需求考虑，分析力学只讨论有势系也就够用了. 所以本教材的主干只讲有势系，略去推广的哈密顿原理，把一般形式的拉格朗日方程列为选读内容，这样可使读者集中精力学习基本内容，而对其解决一般力学问题和将来的学习工作毫无影响. 由于既能体现分析力学的优势，而太复杂的问题又不多，所以虚功原理的应用部分也被列为选读内容.

非线性力学是重要的，师范院校的读者也应对此有一定了解. 但是如果不自己动手编程去研究几个简单问题，非线性力学是很难学懂的. 因此，本教材把介绍数学软件 Matlab 的应用和非线性力学初步合并在一起作为附录Ⅰ. 对于学习过计算机基础的学生，附录Ⅰ完全可以自学，如果有学习 C 语言的基础，那就更容易了.

如果学时允许，可以为学生安排一些上机时间.

学生的负担不宜过重，负担过重会导致肤浅. 如果教学时间比较充裕，笔者也不主张讲太多的内容，增加一些讨论课可能对学生更为有利.

教材既要简明又要体现现代化特征并非易事，笔者虽长期教授理论力学，毕竟水平有限，难免有不妥之处，敬候读者指正.

作　者

2008年于北京师范大学

试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbook.com

目 录

第 1 章　质点运动学

质点运动学是研究定量描述质点运动的方法，是学习质点动力学的基础.

1.1　质点运动的矢量描述与直角坐标描述

1.1.1　参考系和坐标系

由于运动的相对性，要描述物体的运动必须选取另一个物体作为标准，这个为研究物体运动被选作标准的物体称为**参考系**. 任何有一定大小且不变形的物体，或几个相对位置保持不变的物体，都可以作为参考系. 在运动学中，任何参考系的地位完全相同，不存在特殊的或优越的参考系.

为了定量地描述物体的运动，通常在参考系上建立适当的坐标系. 常用的三维空间坐标系有直角坐标系、柱坐标系和球坐标系. 对二维平面运动可采用平面直角坐标系和平面极坐标系.

在直角坐标系中**基矢**为沿 3 个坐标轴正方向的单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，如图 1.1 所示. 按惯例我们使用的坐标系全是右手正交系，其基矢满足如下关系：

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

若坐标系相对参考系固定不动，称该坐标系与参考系**固连**. 经常令坐标系与参考系固连，这时可用该坐标系来表征参考系.

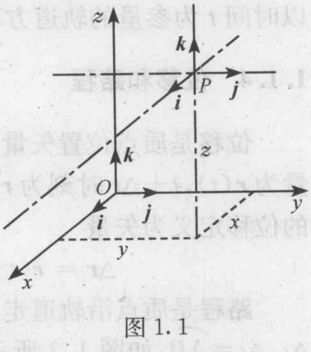

图 1.1

为了用分量形式描述质点运动，在参考系上建立坐标系不是唯一的方法，还可以利用质点运动轨道采用自然坐标描述，在分析力学中还可以更灵活地采用广义坐标.

1.1.2　自由度

确定力学系统位置所需要的独立坐标数称为系统的**自由度**，自由度记为 s. 当研究的力学系统是一个质点时，如果质点运动不受任何限制，需要三个独立坐标去确定它的位置，故自由度 $s=3$. 若质点被限制在曲面 $f(x,y,z)=0$ 上运动，则质点坐标 x、y、z 受曲面方程 $f(x,y,z)=0$ 的限制，仅有两个坐标是独立的，所以自由度 $s=2$. 当质点被限制沿某曲线运动时，自由度 $s=1$.

1.1.3　运动学方程和轨道

在图 1.2 中用直角坐标系 $Oxyz$ 代表参考系，可用质点 P 相对参考系上 O 点的**位置矢量**(**位矢**) $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$ 描述质点的位置($\boldsymbol{e}_r$ 为沿 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量). 随质点的运动，位矢 $\boldsymbol{r}$ 随时间变化，质点运动情况可用矢量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 描写. $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 称为**运动学方程**，它包含了质点运动的全部信息.

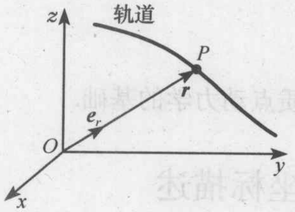

图 1.2

如果矢量 $\boldsymbol{A}$ 随时间变化，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$，把各时刻矢量 $\boldsymbol{A}$ 的矢尾聚集于一点，则其矢端随时间的演化而描出一条曲线，该曲线称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的**矢端曲线**.

质点运动的轨道即为位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的矢端曲线，所以若已知运动学方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，质点运动的轨道即被确定.

矢量描述不依赖于坐标系的选取，在矢量描述中坐标系仅起表征参考系的作用. 在直角坐标系 $Oxyz$ 中，有

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1.1.1}$$

运动学方程的分量形式为

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t)$$

由上式中消去时间 t，则得到轨道方程. 实际上，标量形式的运动学方程本身就是以时间 t 为参量的轨道方程.

1.1.4　位移和路程

位移是质点位置矢量的增量. 设 t 时刻质点位置矢量为 $\boldsymbol{r}(t)$，$t+\Delta t$ 时刻为 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$，在 Δt 时间内，质点的位移定义为矢量

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$$

路程是质点沿轨道走过的长度，为恒正标量，记为 Δs，$\Delta s=\overset{\frown}{AB}$，如图 1.3 所示. 应注意 $\Delta\boldsymbol{r}\neq\Delta s$ 且 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$；但当 $\Delta t\to 0$ 时，AB 间弦长与弧长相等，$|\Delta\boldsymbol{r}|\to\Delta s$，或记为 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$.

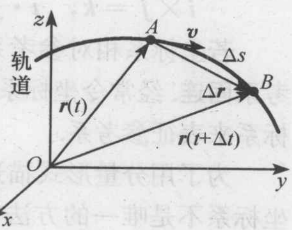

图 1.3

1.1.5　速度

瞬时速度矢量简称为**速度**，定义为位置矢量对时间的导数，即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}$$

在代表物理量的符号上方加“·”表示该物理量对时间的导数.

速度的方向沿轨道($\boldsymbol{r}$的矢端曲线)的切线指向运动的前方,它的大小为**速率** v

$$v=|\boldsymbol{v}|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t}=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dot{s}$$

在直角坐标系 $Oxyz$ 中,将式(1.1.1)对时间求导数,则

$$\boldsymbol{v}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}\tag{1.1.2}$$

1.1.6　加速度

瞬时加速度矢量简称为**加速度**,定义为速度对时间的导数,即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{\boldsymbol{r}}$$

在代表物理量的符号上方加"$\cdot\cdot$"表示该物理量对时间的二阶导数.

由图1.4(a)可知,加速度 $\boldsymbol{a}$ 一定指向质点运动轨道的凹侧.若将不同时刻的速度矢量的矢尾集中于一点,则可得出速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的矢端曲线,即速端曲线,如图1.4(b)所示.加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿速端曲线切线方向并指向 $\boldsymbol{v}$ 的矢端沿速端曲线运动的前方,加速度的大小 a 等于 $\boldsymbol{v}$ 的矢端沿速端曲线运动的速率.这种理解是严格的,并具有普遍意义.下面给出一个普遍结论,该结论是求矢量对时间导数的一种方法:任意矢量 $\boldsymbol{A}$ 对时间的导数 $\dot{\boldsymbol{A}}$ 的方向沿 $\boldsymbol{A}$ 的矢端曲线的切线,其指向与 $\boldsymbol{A}$ 的矢端沿矢端曲线的运动方向一致;$\dot{\boldsymbol{A}}$ 的大小即为 $\boldsymbol{A}$ 的矢端沿矢端曲线的运动速率.

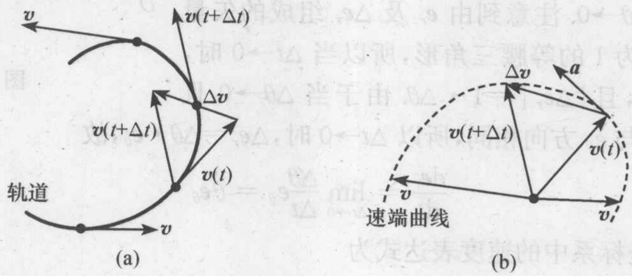

图1.4

在直角坐标系 $Oxyz$ 中,将式(1.1.2)对时间求导数,则

$$\boldsymbol{a}=\dot{v}_x\boldsymbol{i}+\dot{v}_y\boldsymbol{j}+\dot{v}_z\boldsymbol{k}=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}\tag{1.1.3}$$

1.2　质点运动的平面极坐标描述

当质点被限制在一个平面上运动时,自由度 $s=2$,可以采用平面极坐标系描述质点的运动.建立与参考系固连的极坐标系,如图1.5所示.坐标原点 O 称为**极点**,Ox 称为**极轴**.质点 P 的位置由坐标量 r 和 θ 确定,θ 称为**极角**,θ 角正方向(θ 增

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

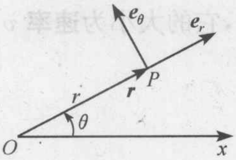

图 1.5

加方向)如图 1.5 所示. 平面极坐标系的基矢为**径向单位矢量** $\boldsymbol{e}_r$ 和**横向单位矢量** $\boldsymbol{e}_\theta$,称 $\boldsymbol{e}_r$ 的方向为**径向**,$\boldsymbol{e}_\theta$ 的方向为**横向**. $\boldsymbol{e}_r$ 沿 $\boldsymbol{r}$ 方向;$\boldsymbol{e}_\theta$ 与 $\boldsymbol{r}$ 垂直,其指向与极角 θ 的正方向一致;$\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_\theta = 0$(正交坐标系).

极坐标系中基矢 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 为极角 θ 的函数,$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_r(\theta)$,$\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\theta(\theta)$. 在极坐标描述中,把描述质点运动的矢量沿基矢 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向做正交分解;由于不同位置的 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 不同,所以必须沿质点所在位置的基矢**就地**进行正交分解.

在极坐标系中,质点的运动学方程为

$$\boldsymbol{r} = r(t)\boldsymbol{e}_r[\theta(t)] \tag{1.2.1}$$

标量形式为

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t) \tag{1.2.2}$$

上式中消去时间 t,则得到质点运动的轨道方程 $f(r,\theta) = 0$.

根据速度的定义,把式(1.2.1)对时间求导数,有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}$$

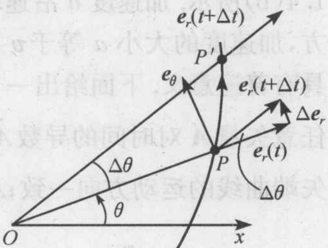

图 1.6

下面利用图 1.6,求单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 的时间导数,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{e}_r(t+\Delta t) - \boldsymbol{e}_r(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{e}_r}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时,$\Delta\theta \to 0$. 注意到由 $\boldsymbol{e}_r$ 及 $\Delta\boldsymbol{e}_r$ 组成的矢量三角形为腰长为 1 的等腰三角形,所以当 $\Delta t \to 0$ 时,$\Delta\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{e}_r$ 垂直,且 $|\Delta\boldsymbol{e}_r| = 1 \cdot \Delta\theta$. 由于当 $\Delta\theta \to 0$ 且 $\Delta\theta > 0$ 时,$\Delta\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向相同,所以 $\Delta t \to 0$ 时,$\Delta\boldsymbol{e}_r = \Delta\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta$,故

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\boldsymbol{e}_\theta = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

于是,得到极坐标系中的速度表达式为

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \tag{1.2.3}$$

$v_r = \dot{r}$ 称为**径向速度**,$v_\theta = r\dot{\theta}$ 称为**横向速度**.

根据加速度的定义,对式(1.2.3)求时间导数,得

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)$$

$$= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$$

完全可以仿照前文求 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r/\mathrm{d}t$ 的方法求 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta/\mathrm{d}t$,这项工作留给读者自己完成. 由于求矢量导数及单位矢量导数是本章的重点之一,下面改换一个方法求 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta/\mathrm{d}t$:$\boldsymbol{e}_\theta$ 为单位矢量,故 $\boldsymbol{e}_\theta$ 的矢端曲线为半径为 1 的单位圆,如图 1.7 所示. $\boldsymbol{e}_\theta$ 的矢端沿其矢端

曲线运动的速率为 $1\cdot\dot{\theta}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta/\mathrm{d}t$ 的方向沿矢端曲线切线，$\dot{\theta}>0$ 时，指向如图 1.7 所示，故可知

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=-\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$$

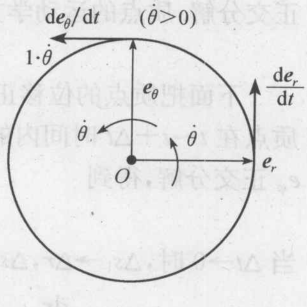

图 1.7

于是，得到极坐标系中加速度的表达式为

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \qquad (1.2.4)$$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$ 和 $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$ 分别称为**径向加速度**和**横向加速度**.

1.3　质点运动的柱坐标描述

柱坐标系可以看成是由 Oxy 平面内的极坐标系（坐标量为 ρ 和 θ）及 z 轴构成的三维空间坐标系. 质点位置由坐标量 ρ、θ 和 z 确定，柱坐标系的基矢为单位矢量 $\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{k}$，如图 1.8 所示，为右手正交系，基矢满足如下关系：

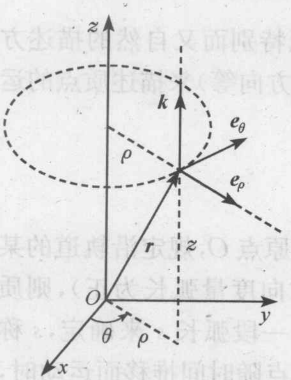

图 1.8

$$\boldsymbol{e}_\rho\times\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}_\rho=0$$

在与参考系固连的柱坐标系中，质点的运动学方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\rho(t)\boldsymbol{e}_\rho[\theta(t)]+z(t)\boldsymbol{k} \qquad (1.3.1)$$

速度和加速度的表达式分别为

$$\boldsymbol{v}=\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\rho\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\dot{z}\boldsymbol{k} \qquad (1.3.2)$$

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_\rho+(\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta+\ddot{z}\boldsymbol{k} \qquad (1.3.3)$$

式(1.3.2)及式(1.3.3)的推导请读者仿照 1.2 节自己完成.

1.4　质点运动的球坐标描述

球坐标系如图 1.9 所示，质点 P 的位置由坐标量 r、θ 和 φ 确定，θ 亦称为**极角**，φ 称为**方位角**. 球坐标系的基矢为 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$. $\boldsymbol{e}_r$ 沿位矢 $\boldsymbol{r}$ 的方向；$\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 与 $\boldsymbol{r}$ 垂直，指向与 θ 和 φ 角正方向一致；为右手正交系，其基矢满足如下关系：

$$\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_\varphi,\quad \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\varphi=\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_r=0$$

球坐标系中的基矢不是常矢量，因空间位置不同而变化，其中 $\boldsymbol{e}_r$ 为 θ 和 φ 的函数. 描述质点运动的矢量必须沿质点所处位置的基矢 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ **就地**进行

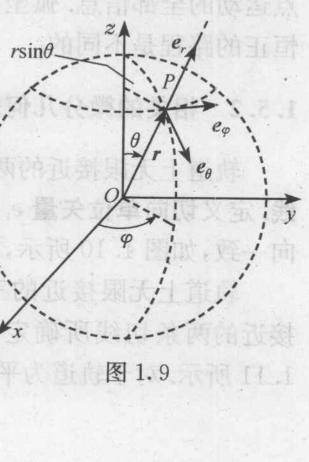

图 1.9

正交分解. 质点的运动学方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=r(t)\boldsymbol{e}_r[\theta(t),\varphi(t)] \tag{1.4.1}$$

下面把质点的位移正交分解，从速度的定义导出球坐标系中的速度表达式. 设质点在 $t\sim t+\Delta t$ 时间内的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$，将 $\Delta\boldsymbol{r}$ 沿 t 时刻质点所在位置的基矢 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 正交分解，得到

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta s_1\boldsymbol{e}_r+\Delta s_2\boldsymbol{e}_\theta+\Delta s_3\boldsymbol{e}_\varphi$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta s_1\to\Delta r$，$\Delta s_2\to r\Delta\theta$，$\Delta s_3\to r\sin\theta\cdot\Delta\varphi$，于是可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r\boldsymbol{e}_r+r\Delta\theta\boldsymbol{e}_\theta+r\sin\theta\cdot\Delta\varphi\boldsymbol{e}_\varphi}{\Delta t}\\&=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+r\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned} \tag{1.4.2}$$

1.5　质点运动的自然坐标描述

除去采用各种坐标系描述质点运动之外，还有一种既特别而又自然的描述方法，就是利用质点运动轨道本身的几何特性（如切线、法线方向等）来描述质点的运动，这种方法称为**自然坐标法**.

1.5.1　弧长方程

在已知质点运动轨道的情况下，在轨道上任取一点作原点 O，规定沿轨道的某一方向为弧长的正方向（依此方向度量弧长为正），则质点位置可由原点 O 到质点间的一段弧长 s 来确定，s 称为**弧坐标**，如图 1.10 所示. 当质点随时间推移而运动时，弧坐标 s 为时间 t 的函数，即

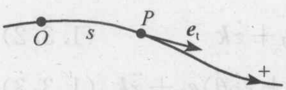

图 1.10

$$s=s(t) \tag{1.5.1}$$

上式称为**弧长方程**. 弧长方程和轨道方程一起与质点的运动学方程等价，包含着质点运动的全部信息. 弧坐标 s 为可正可负的标量，与恒正的路程是不同的.

1.5.2　相关的微分几何知识

轨道上无限接近的两个点所决定的直线称为**切线**. 定义**切向单位矢量** $\boldsymbol{e}_t$ 沿切线，其指向与弧长正方向一致，如图 1.10 所示，沿 $\boldsymbol{e}_t$ 的方向称为**切向**.

轨道上无限接近的三个点确定的平面，即无限接近的两条切线所确定的平面，称为**密切面**，如图 1.11 所示. 对于轨道为平面曲线的情况，密切面即为

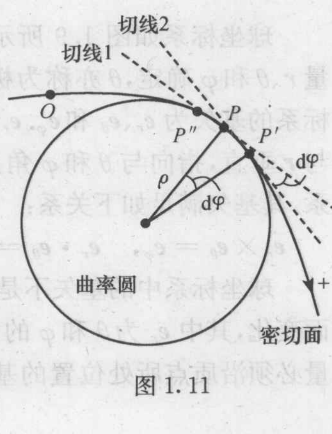

图 1.11

轨道所在平面. 当轨道为空间曲线时，曲线上各点的密切面空间取向不同，密切面取向的改变反映了曲线的**挠曲**情况.

轨道曲线上无限接近的三个点所决定的圆称为**曲率圆**，曲率圆在密切面内. 曲率圆的圆心称为**曲率中心**，曲率圆的半径 ρ 称为**曲率半径**，曲率半径的倒数 $\kappa=1/\rho$ 称为**曲率**，如图 1.11 所示. 设 $\overset{\frown}{PP'}=\mathrm{d}s$，显然 $\kappa=1/\rho=\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}s$. 密切面内切线方向的改变($\mathrm{d}\varphi$)反映了曲线**弯曲**的情况，所以曲率 κ 越大则曲线弯曲程度越大. 当轨道为平面曲线 $y=y(x)$ 时，可以利用数学分析中的公式，即

$$\kappa=\frac{1}{\rho}=\left|\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right| \tag{1.5.2}$$

求曲率 κ 及曲率半径 ρ.

过轨道上一点，与切线垂直的直线称为**法线**. 法线有无限多条，它们组成的平面称为**法平面**.

密切面内的法线称为**主法线**，定义**主法向单位矢量** $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 沿主法线指向曲率中心. 沿 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 的方向称**主法向**，$\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 指向轨道凹侧.

垂直于密切面的法线称为**副法线**. 定义**副法向单位矢量** $\boldsymbol{e}_\mathrm{b}$ 沿副法线，指向 $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}\times\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 的方向，有

$$\boldsymbol{e}_\mathrm{b}=\boldsymbol{e}_\mathrm{t}\times\boldsymbol{e}_\mathrm{n} \tag{1.5.3}$$

沿 $\boldsymbol{e}_\mathrm{b}$ 的方向为**副法向**.

单位矢量 $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$、$\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 和 $\boldsymbol{e}_\mathrm{b}$ 两两互相垂直，并成右手螺旋关系，如图 1.12 所示.

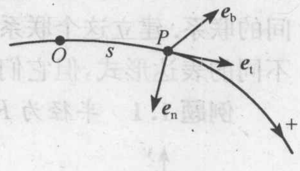

图 1.12

1.5.3　速度和加速度表达式

下面把质点的速度和加速度沿质点所在处的单位矢量 $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$、$\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 和 $\boldsymbol{e}_\mathrm{b}$ **就地**正交分解，进而导出质点的速度和加速度表达式.

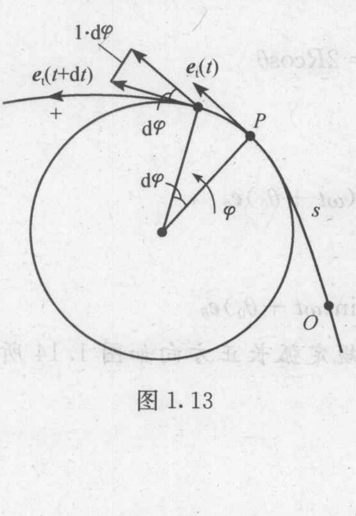

图 1.13

速度沿切线指向运动的前方，所以 $\boldsymbol{v}$ 不可能有主法向和副法向分量，即 $v_\mathrm{n}=v_\mathrm{b}=0$. 考虑到 $\dot{s}>0$ 时 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ 同向，故

$$\boldsymbol{v}=v_\mathrm{t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}=\dot{s}\boldsymbol{e}_\mathrm{t} \tag{1.5.4}$$

速度的大小 $v=|\boldsymbol{v}|=|v_\mathrm{t}|=|\dot{s}|$.

由加速度的定义及式(1.5.4)，则

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{s}\boldsymbol{e}_\mathrm{t})=\ddot{s}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}+\dot{s}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}$$

参见图 1.13，当 φ 的正向与弧长 s 正向一致时，

$\mathrm{d}s=\rho\mathrm{d}\varphi$,故 $\dot{\varphi}=\dot{s}/\rho=v_{\mathrm{t}}/\rho$. 所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}=\frac{1\cdot\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}=\frac{\dot{s}}{\rho}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$$

因此

$$\boldsymbol{a}=\ddot{s}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}+\frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \tag{1.5.5}$$

$a_{\mathrm{t}}=\dot{v}_{\mathrm{t}}=\ddot{s}$ 称为**切向加速度**,是由于速度 $\boldsymbol{v}=\dot{s}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$ 的大小改变而产生的. $a_{\mathrm{n}}=v^2/\rho=\dot{s}^2/\rho$ 称为**法向加速度**,是由于速度的方向改变而产生的. 由于 a_{n} 恒正,故 $\boldsymbol{a}$ 一定指向轨道凹侧,与 1.1 节中结论一致. 对于直线运动,由于 $\rho=\infty$,则 $a_{\mathrm{n}}=0$. $a_{\mathrm{b}}\equiv 0$说明对任何空间曲线运动,加速度 $\boldsymbol{a}$ 必在密切面内,这是加速度和密切面定义导致的必然结果.

在用自然坐标描述质点运动时,首先要注意原点 O 的选定和弧长正方向的规定,原点不一定是质点运动的初始位置,弧长正方向不一定是质点运动的方向. 在自然坐标描述中,需要已知质点运动的轨道,而对轨道的数学描述又需要一个坐标系,所以必须掌握自然坐标描述中物理量的表述与其他坐标系中物理量的表述之间的联系. 建立这个联系的基本依据是:速度$\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 在不同的描述方法中有不同的表达形式,但它们的大小和方向是唯一确定的.

例题 1.1　半径为 R 的铁圈上套一小环 P,直杆 OA 穿过小环 P 并绕铁圈上 O 点以匀角速度 ω 转动. 求小环 P 的运动学方程、轨道方程、速度和加速度.

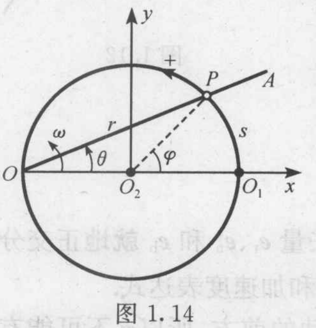

图 1.14

解　建立如图 1.14 所示极坐标系,设 $t=0$ 时 $\theta=\theta_0$,则运动学方程为

$$\begin{cases} r=2R\cos(\omega t+\theta_0) \\ \theta=\omega t+\theta_0 \end{cases}$$

轨道方程为

$$r=2R\cos\theta$$

速度和加速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta\\&=-2R\omega\sin(\omega t+\theta_0)\boldsymbol{e}_r+2R\omega\cos(\omega t+\theta_0)\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta\\&=-4R\omega^2\cos(\omega t+\theta_0)\boldsymbol{e}_r-4R\omega^2\sin(\omega t+\theta_0)\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned}$$

此例题也可用自然坐标法求解:以 O_1 为原点,规定弧长正方向如图 1.14 所示. 轨道已知,弧长方程为

$$s = 2R(\omega t + \theta_0)$$

速度和加速度为

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} = 2R\omega\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right)\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} = 4R\omega^2\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$$

本例题也可利用图 1.14 中直角坐标系 O_2xyz 求解，由读者自行完成.

请读者验证：①不同方法中$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{a}$ 的表达式不同，但它们对描述 P 点运动是等价的；②不同方法中$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{a}$ 的大小和方向是唯一确定的.

例题 1.1 是运动学正问题，即先写出运动学方程，通过求导数运算求出$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{a}$，一般比较简单. 还有一类运动学逆问题，是已知速度或加速度及初条件求运动学方程，使用的数学方法是积分或解微分方程，和正问题比较要复杂一些，但只要把握解题的方向也是不难解决的.

例题 1.2　已知一质点做平面运动，其速率为常量 c，位置矢量转动的角速度亦为常量 ω_0，试求质点的运动学方程及轨道方程. 设 $t=0$ 时，$r=0$，$\theta=0$.

解　由已知条件

$$\dot{\theta} = \omega_0 \tag{1}$$

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = c^2 \tag{2}$$

将式(1)化为 $\mathrm{d}\theta=\omega_0\,\mathrm{d}t$，积分并由 $t=0$ 时，$\theta=0$ 定积分常量，可得

$$\theta = \omega_0 t \tag{3}$$

将式(1)代入式(2)，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{c^2 - \omega_0^2 r^2}} = \pm\,\mathrm{d}t$$

积分并以 $t=0$ 时，$r=0$ 定积分常数，得

$$r = \pm\frac{c}{\omega_0}\sin\omega_0 t \tag{4}$$

式(3)和式(4)即为运动学方程，消去 t 得轨道方程

$$r = \pm\frac{c}{\omega_0}\sin\theta$$

轨道为两个圆，如图 1.15 所示.

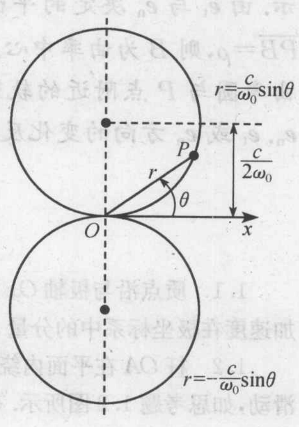

图 1.15

例题 1.3　已知质点运动学方程为 $x=R\cos\omega t$，$y=R\sin\omega t$，$z=\frac{h}{2\pi}\omega t$（R、ω 和 h 为常量），分析质点的运动，求切向、法向加速度及轨道的曲率半径.

解　质点轨道是半径为 R 的圆柱上的螺旋线，螺距为 h，如图 1.16 所示.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} \\ &= -R\omega\sin\omega t\boldsymbol{i} + R\omega\cos\omega t\boldsymbol{j} + \frac{h\omega}{2\pi}\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com