“十一五”国家重点图书出版规划项目

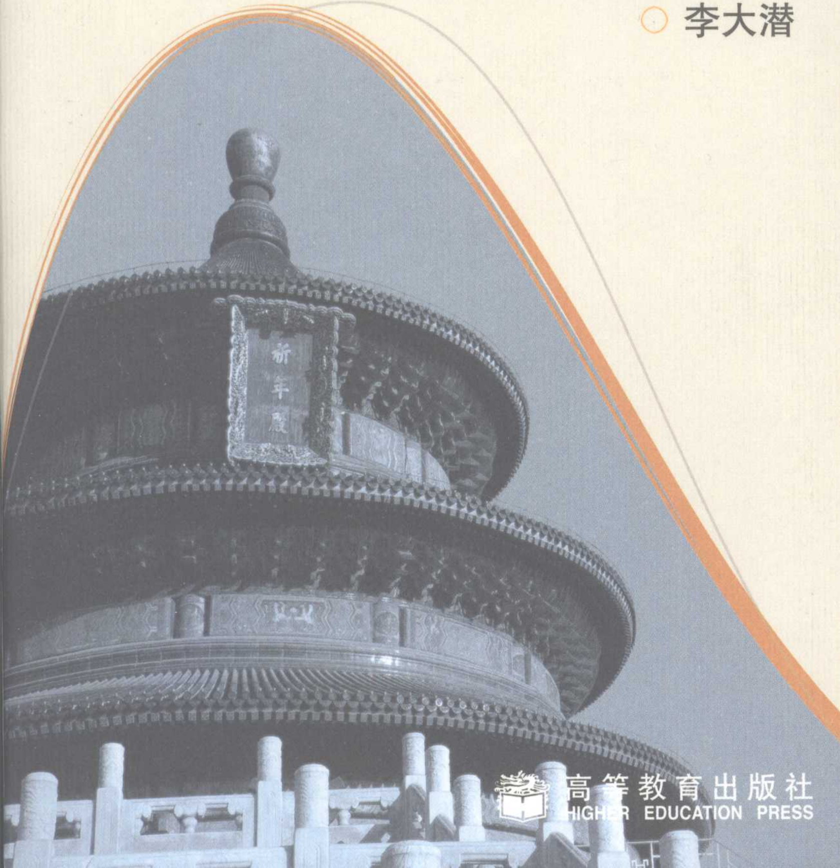
5

数学文化小丛书

李大潜 主编

黄金分割漫话

李大潜



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

“十一五”国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜 主编

黄金分割漫话

李大潜

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

黄金分割漫话/李大潜. —北京：高等教育出版社，2007.12

（数学文化小丛书/李大潜主编）

ISBN 978-7-04-022366-8

Ⅰ. 黄… Ⅱ. 李… Ⅲ. 几何学-黄金分割-普及读物 Ⅳ. O18-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 159460 号

策划编辑	李　蕊	责任编辑	崔梅萍
封面设计	王凌波	责任绘图	杜晓丹
版式设计	王艳红	责任校对	王效珍
责任印制	韩　刚		

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
总　　机	010－58581000	网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司		

开　　本	787×960　1/32	版　次	2007年12月第1版
印　　张	1.5	印　次	2007年12月第1次印刷
字　　数	23 000	定　价	5.00元

物料号　22366－00

李大潜

复旦大学数学科学学院教授，中国科学院院士，第三世界科学院院士，法国科学院外籍院士。曾任复旦大学研究生院院长、中国数学会副理事长、上海市科学技术协会副主席。现任中法应用数学研究所所长，教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会主任委员，中国工业与应用数学学会（CSIAM）理事长，国际工业与应用数学联合会（ICIAM）执行委员。

数学文化小丛书（第一辑）

数学文化小丛书编委会

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有

专长的学者执笔，抓住主要的线索和本质的内容，由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长，并相对独立，以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则，有的专题单独成册，有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书，走近数学、品味数学和理解数学，充分感受数学文化的魅力和作用，进一步打开视野，启迪心智，在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005年12月

郑重声明

目　　录

一、引　　言

本书所讲的黄金分割，并不是一件新鲜和时髦的东西，相反，其定义、基本性质及一些重要的应用，可以追溯到遥远的古代.

大家知道，**欧几里得**(Euclid)是公元前3世纪前后古希腊的数学家，以其所著的《几何原本》而闻名于世.

现在我们中学里学的几何学，本质上还是以《几何原本》为蓝本的.《几何原本》的手稿今已失传，现在看到的各种版本都是根据后人的修改本、注释本或翻译本重新整理出来的，但和《红楼梦》只传下来大半部手稿的情形不同，基本上仍保留了原来的内容和状态.

图1是该书英译本的一个封面.

图2是1607年**利玛窦**和**徐光启**合译的中译本的首页，原书的中文译名《几何原本》也由此一直沿用至今.

图3是最近出版的一个中译本的封面

这部伟大的经典著作是**欧几里得**根据当时已有的几何知识，从五条最基本的公设出发，通过严密的逻辑推理整理而成的，这是**欧几里得**的一个永垂不朽的贡献.

《几何原本》共十三卷, 其中有多处涉及黄金分割的内容. 在第六卷中讲比例时, 给出了如下的定义:

分一线段为二线段, 当整体线段比大线段等于大线段比小线段时, 则称此线段被分为**中外比**. (A straight line is said to have been cut in **extreme and mean ratio** when, as the whole line is to the greater segment, so is the greater to the less.)

这里指出: 黄金分割这一名称只是在它十分出名之后, 即到19世纪初期才出现的. 在《几何原本》中只是称为extreme and mean ratio(中译为“中外比”), 但这实际上是一回事.

接着, 在同一卷中, 给出了分已知线段为中外比的方法.

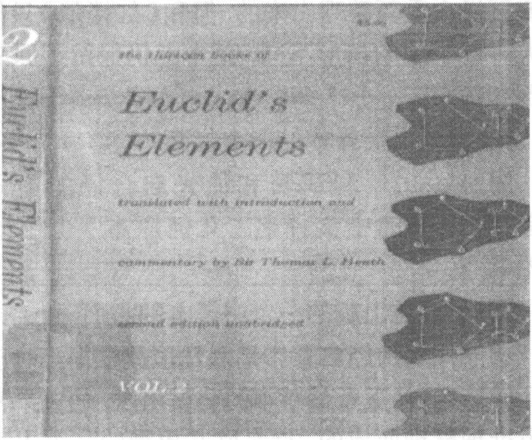


图 1

第八卷整个一卷在讲正十二面体及正二十面体的构成时，反复地利用了中外比及有关的性质(中译本共计39页).

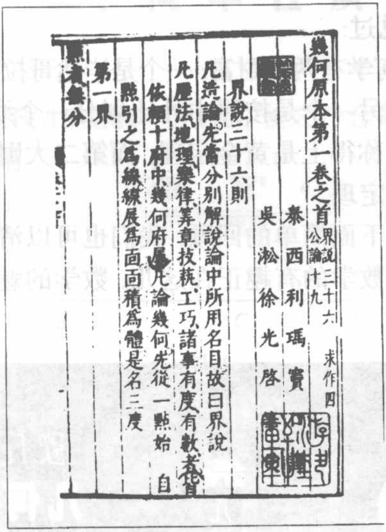

幾何原本第一卷之首 界說三十六 公論十九 求作四
泰西利瑪竇
吳淞徐光啓
界說三十六則
凡造論先當分別解說論中所用名目故曰界說
凡歷法地理樂律筭章技藝工巧諸事有度有數者皆
依賴十府中幾何府屬凡論幾何先從一點始 自
點引之爲線線展爲面面積爲體是名三度
第一界
點者無分

图 2

另外，在第二卷讲面积以及第四卷讲五边形的构成时也已经涉及中外比.

考虑到欧几里得只是系统地总结了当时几何学已有的成就，所以，有关黄金分割的概念和知识很可能在2500年前就已经有了.

这样古老的数学内容不仅没有被历史的演变和科学的进步所淘汰，相反，却永葆青春，并越来越引起人们的注意.

古希腊的数学家不必说了，中世纪的意大利

数学家**列昂纳多·斐波那契**(L. Fibonacci, 约1170—约1250), 文艺复兴时代的德国天文学家**约加恩·开普勒**(J.Kepler, 1571—1630)以及当代的一些著名科学家都对它十分关注, 并投入了大量的精力. **开普勒**说过:

“几何学有两大财富: 一个是毕达哥拉斯定理(勾股定理), 另一个是按照中外比划分一个线段. 第一大财富可称得上是黄金定理, 而第二大财富则可称之为珍珠定理.”

通过下面简单的回顾, 我们也可以清楚地看到这一点. 数学的有趣正在这儿, 数学的魅力也正在这儿.

图 3

二、简 单 性 质

在线段AB上取一分点C, 使之符合黄金分割的要求, 就有

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}. \tag{2.1}$$

图 4

不妨设

$$\overline{CB} = 1, \overline{AC} = \varphi. \tag{2.2}$$

φ就是(2.1)中的比值, 即**黄金分割率**, 亦称为**黄金分割**.

将(2.2)式代入(2.1)式, 就得到

$$\frac{\varphi+1}{\varphi} = \frac{\varphi}{1},$$

即

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0. \tag{2.3}$$

求解此二次方程, 并略去负根, 就得到黄金分割率的数值

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\,033\,988\,7\cdots, \tag{2.4}$$

它是一个无理数. 利用电子计算机, 可以很容易地算出它任意位数的值.

提出两个很简单的问题:

$$\varphi^2 = ?$$

$$\frac{1}{\varphi} = ?$$

答案也很简单:

$$\varphi^2 = 2.618\,033\,988\,7\cdots = \varphi + 1,$$

$$\frac{1}{\varphi} = 0.618\,033\,988\,7\cdots = \varphi - 1.$$

黄金分割率的这一惊奇的数字特性其实是(2.3)式的简单推论.

下面的命题说明φ有一个无穷根式的表示.

命题2.1 $\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$.

证 设上式右边为x, 就有

$$x = \sqrt{1+x}.$$

两端平方后就得到$x^2-x-1=0$,于是x是方程(2.3)的正根, 从而$x=\varphi$. □

下面的命题说明φ还有一个无穷连分数的表示.

命题2.2 $\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$.

证 令上式右边为x, 就有

$$x = 1 + \frac{1}{x},$$

从而x是方程(2.3)的正根, 故$x = \varphi$. □

命题2.2的这一结果在本文四中还将用到.