Gaokao Nandian Tupo Congshu

高考难点

突破丛书

林风 编著

难点不等于难题。感到难，是因为基本功不扎实。本书所讲、所练的正是攻克难点的基本功。

数学

福建教育出版社

Gaokao Nandian Tupo Congshu

高考难点

突破丛书

数学

林风 编著

福建教育出版社

高考难点突破丛书
数　学
林风　编著
*
福建教育出版社出版发行
（福州梦山路 27 号　邮编：350001
电话：0591－83726971　83733693
传真：83726980　网址：www. fep. com. cn）
莆田鸿立印刷包装有限公司印刷
（莆田市城厢区莆阳西路 958 号　邮编：351100）
开本 787 毫米×1092 毫米　1/16　印张 18.5　字数 417 千
2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5334-4849-3　定价：34.00 元

出版说明

在高三下半学期，在全面复习的基础上，考生应针对自己学习中的薄弱环节，有针对性地加强某些专项基础知识的掌握和基本能力的训练。如，一些易混概念的辨析；一些基本原理的灵活运用；一些基础知识的交叉联系；一些解题的重要策略……等等。这些能力的提高能帮助考生获取相当多的考分。

我们约请了一批长期执教高三毕业班，在高考辅导中成效卓著的教师针对考生在高考复习或历年高考答题中较多存在的薄弱环节，编写了这套“高考难点突破丛书”。

难点客观存在。看到“难点”二字就认为是“难题”，是认识上的误区。其实，大量的难点并不是难题。因为某些知识没有掌握，某些原理理解不透彻，某些基本技能训练不到位、不充分形成了一些薄弱环节，解题就有了障碍，也就产生了“难点”。历年高考中总有许多考生对一些其实很浅易的题目无法解答而失分，考后才发现失分的原因是一些基础知识掌握不牢固，一些基本能力有欠缺，而并非题目特别难。一些基本原理弄透彻了，基础知识掌握牢固了，解题方法把握住了，就完全可以“化难为易”。

因此，这套丛书立足于基础知识、基本技能（双基），紧密结合我省高考实际，总结了一批有典型意义的例题，精心选择、编拟了一批典型模拟试题，把知识按专题分要点，进行精要的梳理，在方法上进行简明的点拔提示，不作繁难的演绎解析，只进行简要精到的分析，适当的专项能力训练，以期让广大考生依据本丛书进行学习、训练后，大量减少难点，获取较高的考分。

编写时，以点带面，适当注意了知识和能力的系统性、连贯性、阶梯性，不遗漏考点。考生在学习时可以根据自己的实际情况有选择、有侧重地进行有关专题的学习、训练。

这套丛书共有语文、数学、英语、物理、化学、思想政治、历史、地理、生物九本。

我们对花费了大量精力编写本丛书，把自己辅导学生的经验和心得无私地奉献给广大考生的教师表示由衷的敬意。同时也希望广大师生对该丛书的不足提出意见、建议，以便我们在下一版修订时进一步提高、完善。

福建教育出版社

2007年12月

目录

任何数学分支，无论怎样抽象，总有一天可被应用于世界的各种现象.

——罗巴切夫斯基

专题一　集合与简易逻辑

集合是中学数学中最基本的概念之一，也是高中数学的起始内容，是现代数学的基本概念，学习的重点是：集合的概念、性质、表示法，集合的三种运算，集合间的关系. 学习的难点是：1. 如何准确地把握有关集合的概念的涵义及相互关系；2. 如何进行集合语言、图象语言与文字语言之间的相互转化；如何利用集合语言和集合思想求解有关的问题.

集合问题往往体现于集合的概念、运算、语言及简单的运算，集合作为工具广泛应用于函数、方程、不等式、三角函数及曲线、轨迹、排列组合、立体几何等知识中，是高考常考的考点. 简易逻辑着重培养学生的逻辑思维能力，在高考中集合、简易逻辑主要以选择题、填空题为主，难度多为中、低档，以集合、简易逻辑为背景的试题，具有构思巧妙、新颖独特、解法灵活，是高考数学中“出活题、考能力”的一个亮点.

简易逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科，学习的重点是：对“或、且、非”等逻辑联结词的理解，四种命题之间的关系及利用真值表判断复合命题的真假，充要条件的判断. 难点是命题的否定及充要条件的判断，对反证法的理解和运用.

(一)集　合

难点提示

1. 集合的基本概念与运算. 集合的概念、集合的性质、集合间的关系是高中数学的基础. 集合的内容概括为：“一始四系（原始概念和从属关系、包含关系、相等关系、运算关系）、三性三法（整体性、确定性、无序性和描述法、列表法、图象法）.”

典型题例剖析

【例 1】(1)设 $A=\{y\mid y=-x^2+3x-2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=x^2-x,x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$.

(2)设 $A=\{(x,y)\mid y=-x^2+3x-2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x^2-x,x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$.

剖析：注意(1)、(2)中集合的元素是指什么，具有什么性质.

解：(1)A、B 是两个二次函数的值域的集合，它们都可以化简.

$$A\cap B=\left\{y\,\middle|\,y=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4},x\in\mathbf{R}\right\}\cap\left\{y\,\middle|\,y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4},x\in\mathbf{R}\right\}$$

$=\left\{y\middle|y\leqslant\frac{1}{4}\right\}\cap\left\{y\middle|y\geqslant-\frac{1}{4}\right\}=\left\{y\middle|-\frac{1}{4}\leqslant y\leqslant\frac{1}{4}\right\}.$

(2)集合 A、B 是两个二元二次方程解集的集合(或理解为平面坐标系中的两条抛物线的点集),这两个集合不能化简.

$A\cap B=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}y=-x^2+3x-2\\y=x^2-x\end{cases}\right\}=\{(1,0)\}.$

集合问题的首要是要明确集合的元素是什么,(1)、(2)中的集合的元素一个是数 y,一个是点 (x,y),因此两个集合不要混为一谈. 集合涉及许多符号,要学会运用符号解决实际问题和数学问题,发展良好的数学符号感.

【例 2】含有三个实数的集合可表示为 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$,也可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$,求 $a^{2007}+b^{2008}$ 的值.

剖析:从集合相等的意义入手求出 a,b.

解:由集合中元素的确定性,得 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}=\{a^2,a+b,0\}$, ①

从而有 $0\in\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$,

$\because a\neq0$,$\therefore\frac{b}{a}=0$,即 $b=0$. 将 $b=0$ 代入①式,得 $\{a,0,1\}=\{a^2,a,0\}$,

进而有 $a^2=1$,$\therefore a=\pm1$,

如果 $a=1$ 与集合中元素的互异性不符,经检验 $a=-1$,$b=0$ 符合题意,

故 $a^{2007}+b^{2008}=(-1)^{2007}=-1$.

集合元素的互异性是集合的重要属性,在解含有字母参数的集合关系问题时,集合中元素的互异性常被忽视,从而导致解题失败,求解时容易误认为求出 $a=\pm1$ 就大功告成,令人遗憾. 特别提醒,对于含字母的集合问题要对结果进行检验.

【例 3】若集合 $A=\{x|x^2+ax+1=0,x\in\mathbf{R}\}$,集合 $B=\{1,2\}$,且 $A\subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

剖析:分别讨论 A 为空集、单元素集、双元素集.

解:(1)若 $A=\varnothing$,则 $\Delta=a^2-4<0$,解得 $-2<a<2$;

(2)若 $1\in A$,则 $1^2+a+1=0$,解得 $a=-2$,此时 $A=\{1\}$,适合题意;

(3)若 $2\in A$,则 $2^2+2a+1=0$,解得 $a=-\frac{5}{2}$,此时 $A=\left\{2,\frac{1}{2}\right\}$,不合题意;

(4)若 $1\in A,2\in A$,此时 $A=\left\{1,2,\frac{1}{2}\right\}$,显然不合题意.

综上所述,实数 a 的取值范围为 $[-2,2)$.

注意空集 $\varnothing$ 的特殊性,它不含有元素,是任一集合的子集,任一个非空集合的真子集. 在题目中若未指明集合非空时,要考虑到空集的可能性,如 $A\subseteq B$ 或 $A\cap B=\varnothing$ 时,有 $A=\varnothing$ 或 $A\neq\varnothing$ 两种可能,此时应分类讨论. 本题求解中最易遗漏的是 $A=\varnothing$ 时的讨论.

【例 4】如果集合 $M=\{a^2,a+1,-3\}$，$N=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$若 $M\cap N=\{-3\}$，则 a 的值是(　　).

A. -1　　　　B. 0　　　　C. 1　　　　D. 2

解：由题意 $a-3=-3$　①或 $2a-1=-3$　②

解①得 $a=0$，这时 $M\cap N=\{-3,1\}$不合题意，舍去.

解②得 $a=-1$，这时 $M\cap N=\{1,0,-3\}\cap\{-4,-3,2\}=\{-3\}$满足要求.

故本题应选 A.

集合元素的互异性是一个重要的性质，对于含字母参数的求解问题务必将求出字母参数的值代入检验是否满足集合元素的互异性和题设要求.

难点提示

2. 集合问题中数形结合方法的应用. 利用数形结合方法可以直观、简明地了解集合的性质、关系. 常用的图形有数轴、文氏图、坐标系、曲线的图象等.

典型题例剖析

【例 5】已知 $A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{1-y}{x+1}=3\right.\right\}$，$B=\{(x,y)\mid y=kx+3\}$并且 $A\cap B=\varnothing$，则 k 的值是______.

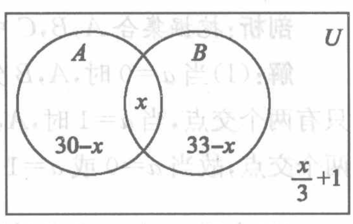
剖析：注意从集合 A，B 的几何意义出发求解.

解：由 A 得 $y=-3x-2$，则当 $k=-3$ 时，二直线平行，即 $A\cap B=\varnothing$. 又因为$(-1,1)\notin A$，故当$(-1,1)\in B$时，即 $1=-k+3$，$k=2$ 时，$A\cap B=\varnothing$. ∴应填 2 或 -3

观察集合元素特征联想相关的数学图形是解题的一种素质，本题"数"是一种外在的表现形式之一，"形"的关系才是问题的本质属性. 掌握有空集参与的集合运算的性质. 为了使集合的子、交、并、补等关系得到直观、形象的表示而利于运算，要十分重视数形结合、以形助数的解题方法的运用. 同时也要注意空集$\varnothing$与集合$\{0\}$的区别.

【例 6】向 50 名学生调查对 A、B 两事件的态度，有如下结果：赞成 A 的人数是全体的五分之三，其余的不赞成，赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人，其余的不赞成；另外，对 A、B 都不赞成的学生数比对 A、B 都赞成的学生数的三分之一多 1 人，问对 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人？

剖析：画出韦恩图，形象地表示出各数量关系间的联系.



解：赞成 A 的人数为 $50\times\dfrac{3}{5}=30$，赞成 B 的人数为 $30+3=33$，如右图，记 50 名学生组成的集合为 U，赞成事件 A 的学生全体为集合 A；赞成事件 B 的学生全体为集合 B.

设对事件 A、B 都赞成的学生人数为 x，则对 A、B 都不赞成的学生人数为$\dfrac{x}{3}+1$，赞成 A 而不赞成 B 的人数为 $30-x$，赞成 B 而不赞成 A 的人数为 $33-x$.

依题意$(30-x)+(33-x)+x+\left(\frac{x}{3}+1\right)=50$，解得$x=21$.

所以对A、B都赞成的同学有21人，都不赞成的有8人.

在集合问题中，有一些常用的方法如数轴法，韦恩图法等，需要考生切实掌握. 解答本题的关键是考生能由题目中的条件，想到用韦恩图直观地表示相关的量之间的关系. 集合的计数公式$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}A+\mathrm{card}B-\mathrm{card}(A\cap B)$

【例 7】已知集合$A=\{(x,y)\mid x^2+mx-y+2=0\}$和$B=\{(x,y)\mid x-y+1=0,0\leqslant x\leqslant 2\}$. 如果$A\cap B\neq\varnothing$，求实数$m$的取值范围.

剖析：注意问题可以转化为：抛物线：$x^2+mx-y+2=0$与线段$x-y+1=0(0\leqslant x\leqslant 2)$有公共点，求实数$m$的取值范围.

解：由$\begin{cases}x^2+mx-y+2=0,\\x-y+1=0.\end{cases}$得$x^2+(m-1)x+1=0$　　①

因为$A\cap B\neq\varnothing$，所以方程①在区间$[0,2]$上至少有一个实数解，

首先，由$\Delta=(m-1)^2-4\geqslant 0$，得$m\geqslant 3$或$m\leqslant -1$.

当$m\geqslant 3$时，由$x_1+x_2=-(m-1)<0$及$x_1x_2=1>0$知，方程①只有两个负根，不符要求.

当$m\leqslant -1$时，由$x_1+x_2=-(m-1)>0$及$x_1x_2=1>0$知，方程①只有两个互为倒数的正根，故必有一根在区间$(0,1]$内，从而方程①至少有一个根在区间$[0,2]$内.

综上所述，$m\in(-\infty,-1]$为所求.

如果目光总是停留在集合这一狭窄的知识范围内，攻关方法就难以找到. 事实上，集合符号在本题只起了一种“化妆品”的作用，如果注意到抛物线$x^2+mx-y+2=0$与线段$x-y+1=0(0\leqslant x\leqslant 2)$的公共点在线段上，应用数形结合使得解法别开生面. 本题也可以利用公共点内分线段的比λ的取值范围建立关于x的不等式来解. 另外，本题也可以分离变量法. 即由方程①可得$m-1=-\left(x+\frac{1}{x}\right)\leqslant -2$，故$m\leqslant -1$为所求.

【例 8】已知集合$A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，

(1)当a为何值时，$(A\cup B)\cap C$有两个元素；

(2)当a为何值时，$(A\cup B)\cap C$有三个元素.

剖析：挖掘集合A,B,C中元素的几何背景，数形结合转化为曲线的交点问题.

解：(1)当$a=0$时，A,B分别表示两条直线$y=1,x=1$这时两条直线与圆$x^2+y^2=1$只有两个交点，当$a=1$时，A,B表示两条重合的直线$x+y=1$，它显然与圆$x^2+y^2=1$只有两个交点，故当$a=0$或$a=1$时，$(A\cup B)\cap C$有两个元素，

(2)由于$ax+y=1$必过定点$(0,1)$，$x+ay=1$必过定点$(1,0)$，由$\begin{cases}ax+y=1\\x+ay=1\end{cases}$解得两条直线的交点坐标为$\left(\frac{1}{a+1},\frac{1}{a+1}\right)$代入圆$x^2+y^2=1$，得$a=-1\pm\sqrt{2}$时，即当$a=-1\pm\sqrt{2}$时，

$(A\cup B)\cap C$有三个元素.

本题解法的精妙之处在于巧妙转换视角，视集合为点的集合，将代数问题转化为图形关系问题，解法不落俗套. 作为一种解法当然也可以用代数求解，但过程过于复杂.

难点提示

3. 集合问题的综合题. 集合综合题的主要题型有：理解集合的意义，将问题化为不等式或函数求解；理解集合的意义，将问题转化为曲线之间的位置关系或函数最值求解.

集合问题与函数、方程、不等式等中学数学的知识都有密切的关系，它常用来表示不等式、方程的解[如交集、并集常用来表示不等式(组)、方程(组)的解]、函数的定义域、值域等. 学习中要正确运用集合的有关知识将问题进行转化，特别是数与形的转化、代数与几何的转化等.

典型题例剖析

【例 9】已知集合 $A=\{y\mid y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}$，$B=\left\{y\,\middle|\,y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2},0\leqslant x\leqslant 3\right\}$若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

剖析：对集合 A,B 的元素进行准确的判断和整理，转化为求解不等式和函数的值域等.

解：$\because a^2+1>a$，

$\therefore A=\{y\mid y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}=\{y\mid y>a^2+1$ 或 $y<a\}$，

又 $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2+2,0\leqslant x\leqslant 3$

$\therefore y_{\min}=f(1)=2,y_{\max}=f(3)=4$，$\therefore B=\{y\mid 2\leqslant y\leqslant 4\}$

若 $A\cap B=\varnothing$　则$\begin{cases}a\leqslant 2\\a^2+1\geqslant 4\end{cases}$　解得 $a\geqslant\sqrt{3}$或 $a\leqslant-\sqrt{3}$，

$\therefore\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2$ 或 $a\leqslant-\sqrt{3}$.

常将集合化简或转化为代数问题(如不等式问题等)，由题设可先确定集合 B，然后解集合 A 中的不等式，显然是可解的，最后根据 $A\cap B=\varnothing$列不等组求解. 转化与化归是数学解决问题的一般方法. 本题中 $y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)=[y-(a^2+1)](y-a)$充分利用十字相乘法进行因式分解，提高解题效率.

【例 10】已知集合 $A=\{x\mid x^2-(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，设 $B=\{$正实数$\}$，且 $A\cap B=\varnothing$求实数 p 的取值范围.

剖析：$A\cap B=\varnothing$即方程 $x^2-(p+2)x+1=0$ 没有正实根.

解：由 $A\cap B=\varnothing$，$\therefore A=\varnothing$或 $A\neq\varnothing$(此时 A 中无正实根).

当 $A=\varnothing$时，即方程 $x^2-(p+2)x+1=0$ 无实根. $\therefore\Delta=(p+2)^2-4<0$，解得$-4<p<0$. 当 $A\neq\varnothing$时，原方程 $x^2-(p+2)x+1=0$ 的有实根，x_1、x_2 均为非正数.

所以$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\x_1x_2\geqslant 0,\\x_1+x_2\leqslant 0.\end{cases}$　即$\begin{cases}(p+2)^2-4\geqslant 0,\\p+2\leqslant 0.\end{cases}$解得 $p\leqslant-4$，

综上知，p 的取值范围是$\{p|p<0\}$.

将集合语言转化为方程、不等式是本题求解的精髓."$A\cap B=\varnothing,\Leftrightarrow A=\varnothing$或$A\neq\varnothing$(此时 A 中无正实根)"是对原题的正确解读和转译，也是本题求解的疑难之处.

【例 11】(2004 年辽宁高考题)设全集$U=\mathbf{R}$,(1)解关于 x 的不等式$|x-1|+a-1>0(a\in\mathbf{R})$;(2)记 A 为(1)中不等式的解集，集合$B=\left\{x\,\middle|\,\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)=0\right\}$，若$(\complement_U A)\cap B$ 恰有 3 个元素，求 a 的取值范围.

剖析：先对集合 A,B 进行化简和整理，转化为熟悉的解不等式(组)问题.

解：(1)由$|x-1|+a-1>0$ 得$|x-1|>1-a$.

当 $a>1$ 时，解集是 $\mathbf{R}$;

当 $a\leqslant1$ 时，解集是$\{x|x<a$ 或 $x>2-a\}$.

(2)当 $a>1$ 时，$\complement_U A=\varnothing$;当 $a\leqslant1$ 时，$\complement_U A=\{x|a\leqslant x\leqslant2-a\}$.

因 $\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)=2\left[\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\pi x$.

由 $\sin\pi x=0$，得 $\pi x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\in\mathbf{Z}$，所以 $B=\mathbf{Z}$.

$\because$当 $a>1$ 时，$\complement_U A=\varnothing$;

$\therefore$这时$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，$\therefore$舍去.

当 $a\leqslant1$ 时，$\complement_U A=\{x|a\leqslant x\leqslant2-a\}$时，要使$(\complement_U A)\cap B$ 恰有 3 个元素，

a 必须满足$\begin{cases}a<1,\\2\leqslant2-a<3,\text{解得}-1<a\leqslant0.\\-1<a\leqslant0.\end{cases}$

(1)中含有参数和绝对值，因此需要进行分类讨论，从讨论 $a-1$ 的符号和脱绝对值符号是两条都可行的思路，从 a 入手更为简洁.解答(2)要分步解决，先求$\complement_U A$，再求$(\complement_U A)\cap B$ 思路就清晰了.

【例 12】设$A=\{(x,y)|y^2-x-1=0\}$,$B=\{(x,y)|4x^2+2x-2y+5=0\}$,$C=\{(x,y)|y=kx+b\}$，是否存在 k、$b\in\mathbf{N}$，使得$(A\cup B)\cap C=\varnothing$，证明此结论.

剖析：由集合 A 与集合 B 中的方程联立构成方程组，用判别式对根的情况进行限制，可得到 b、k 的范围，又因 b、$k\in\mathbf{N}$，进而可得值.

解：$\because(A\cup B)\cap C=\varnothing$，$\therefore A\cap C=\varnothing$且 $B\cap C=\varnothing$,

$\because\begin{cases}y^2=x+1\\y=kx+b\end{cases}\therefore k^2x^2+(2bk-1)x+b^2-1=0$

$\because A\cap C=\varnothing$，$\therefore\Delta_1=(2bk-1)^2-4k^2(b^2-1)<0$

$\therefore4k^2-4bk+1<0$，此不等式有解，其充要条件是 $16b^2-16>0$，即 $b^2>1$ ①

$\because\begin{cases}4x^2+2x-2y+5=0\\y=kx+b\end{cases}$，$\therefore4x^2+(2-2k)x+(5+2b)=0$

$\because B\cap C=\varnothing$，$\therefore \Delta_2=(1-k)^2-4(5-2b)<0$

$\therefore k^2-2k+8b-19<0$，从而 $8b<20$，即 $b<2.5$ ②

由①②及 $b\in \mathbf{N}$，得 $b=2$ 代入由 $\Delta_1<0$ 和 $\Delta_2<0$ 组成的不等式组，得 $\begin{cases}4k^2-8k+1<0,\\ k^2-2k-3<0\end{cases}$

$\therefore k=1$，故存在自然数 $k=1$，$b=2$，使得 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$.

本题主要考查考生对集合及其符号的分析转化能力，即能从集合符号上分辨出所考查的知识点，进而解决问题. 解决此题的闪光点是将条件 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$ 转化为 $A\cap C=\varnothing$ 且 $B\cap C=\varnothing$，这样难度就降低了. 此题难点在于考生对符号的不理解，对题目所给出的条件不能认清其实质内涵，因而可能感觉无从下手.

【例 13】设 $I=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2+4ax-4a+3=0\}$，$B=\{x\mid x^2+(a-1)x+a^2=0\}$，$C=\{x\mid x^2+2ax-2a=0\}$. 若 A、B、C 中至少有一个不是空集，求实数 a 的取值范围.

解：法一：对于 A：$x^2+4ax-4a+3=0$，当 $\Delta_1=(4a)^2-4(-4a+3)=4(4a^2+4a-3)=4(2a+3)(2a-1)\geqslant 0$，即 $a\leqslant -\dfrac{3}{2}$ 或 $a\geqslant \dfrac{1}{2}$…①时有实根，即 A 不是空集；

同理：$x^2+(a-1)x+a^2=0$，当 $\Delta_2=(a-1)^2-4a^2=-3a^2-2a+1=-(3a-1)(a+1)\geqslant 0$

即 $-1\leqslant a\leqslant \dfrac{1}{3}$…②时，$B$ 不是空集；

又方程 $x^2+2ax-2a=0$，当 $\Delta_3\geqslant (2a)^2-4(-2a)=4(a^2+2a)\geqslant 0$，

即 $a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 0$…③时，C 不是空集；

求①、②、③的并集，得

当 $a\leqslant -\dfrac{3}{2}$ 或 $a\geqslant -1$ 时，A、B、C 中至少有一个不是空集.

法二：若 A、B、C 全为空集，则 $\begin{cases}\Delta_1<0\\ \Delta_2<0\\ \Delta_3<0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}-\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{1}{2}\\ a<-1 \text{ 或 } a>\dfrac{1}{3},\\ -1>a>0\end{cases}$

$\therefore -\dfrac{3}{2}<a<-1$

求 $-\dfrac{3}{2}<a<-1$ 的补集，得 $a\leqslant -\dfrac{3}{2}$ 或 $a\geqslant -1$ 时，A、B、C 不全为空集，即当 $a\leqslant -\dfrac{3}{2}$ 或 $a\geqslant -1$ 时，A、B、C 中至少有一个不是空集.

只有正确理解了“至少”的内涵，才能进行有效的转化. 法一表明对 $\Delta_1\geqslant 0$、$\Delta_2\geqslant 0$、$\Delta_3\geqslant 0$ 得到的解集应求并集（容易错解为求交集），这是利用“至少”的意义求解，法二是利用“补集”思想求解，简明快捷，减少了运算量.

【例 14】设 $I=\{1,2,3,4\}$，A 与 B 是 I 的子集，若 $A\cap B=\{1,3\}$，则称 (A,B) 为一个“理想配集”，那么符合此条件的“理想配集”的个数是[规定 (A,B) 与 (B,A) 是两个不同的“理想

配集"]( ).

A. 4　　B. 8　　C. 9　　D. 16

剖析:理解"理想配集"的定义,从个例元素 2 展开讨论,其余就可以依此类推.

解:元素 1,3 既在 A 中,也在 B 中. 考虑元素 2,有 3 种可能:①$2\in A,2\notin B$;②$2\notin A,2\in B$;③$2\notin A,2\notin B$;再考虑 4,也有 3 种可能,故共有 9 种可能,选(C).

数学思想和方法是数学知识在更高层次上的抽象和概括,蕴涵在数学知识发生、发展和应用的过程中,迁移并广泛应用于相关的问题和学科中. 因此高考命题常常通过创设新的数学知识情景来考查考生对数学思想和方法理解和掌握的程度. 本题通过"理想配集"问题,要求考生能够将"理想配集"用排列组合的语言"翻译"过来,进行各种语言、符号的解读,转化是解答这类"即时定义"的数学问题的关键.

(二)四种命题与充要条件

难点提示

1. 关于四种命题的不同形式. 要正确写出命题的不同形式要注意两点,其一是要把原命题分解成"若 p 则 q"的形式,其二是会对常用关联词进行否定. 要熟悉一些常用词的否定,正面(否定)词语:都是(不都是);任意两个(某两个);所有的(某些);任意的(某个);至多 n 个(至少 $n+1$ 个);或(且).

充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既非充分又非必要条件的判定必须坚持"双向"考查的原则,也可以转化为判断原命题与其等价的逆否命题的真假.

典型题例剖析

【例 15】写出下述命题逆命题,否命题,逆否命题,并判断它们的真假.

(1)若 $a\leqslant 0$,则方程 $x^2-2x+a=0$ 有实根.

(2)乘积为奇数的两个整数都不是偶数.

解:如果一个命题不是"若 p 则 q"的形式,则应将它写成"若 p 则 q"的形式.

(1)逆命题:若方程 $x^2-2x+a=0$ 有实根,则 $a\leqslant 0$;

否命题:若 $a>0$,则方程 $x^2-2x+a=0$ 无实根;

逆否命题:若方程 $x^2-2x+a=0$ 无实根,则 $a>0$.

∵方程 $x^2-2x+a=0$ 有实根的充要条件是 $\Delta=4-4a\geqslant 0$,即 $a\leqslant 1$,而 $a\leqslant 0\Rightarrow a\leqslant 1$,

∴原命题与逆否命题为真命题;

∵方程 $x^2-2x+a=0$ 有实根$\Leftrightarrow a\leqslant 1$,而 $a\leqslant 1\not\Rightarrow a\leqslant 0$;

∴逆命题与否命题为假命题.

(2)原命题可写成:若两个整数的乘积为奇数,则它们都不是偶数;

逆命题:若两个整数都不是偶数,则这两个整数的乘积为奇数;

否命题:若两个整数的乘积不为奇数,则这两个整数至少有一个是偶数;

逆否命题：若两个整数中至少有一个是偶数，则这两个整数的乘积不为奇数.

上述四种形式的命题都是真命题.

学习命题的四种形式的难点是写出命题的否命题，需要同时否定命题的条件与结论，但对一些特殊的词句的否定需要积累经验，如上面第(2)小题中对“都不”的否定，是“至少有一个”.

【例 16】有甲、乙、丙、丁四位歌手参加比赛，其中有一位获奖. 有人走访了四位歌手，甲说：“我获奖了”，乙说：“甲未获奖，丙也未获奖”，丙说：“是甲或乙获奖”，丁说：“是乙获奖”，四位歌手的话中有两句是对的，请问哪位歌手获奖？

解：设获奖用 1 表示，未获奖用 0 表示，则这四人的话列出真值表如下：

	甲	乙	丙	丁
甲：甲获奖	1	0	0	0
乙：甲、丙未获奖	0	1	0	1
丙：甲或乙获奖	1	1	0	0
丁：乙获奖	0	1	0	0

由表可知，只有第一列成立，即甲、丙讲真话，乙、丁讲假话，从而甲获奖.

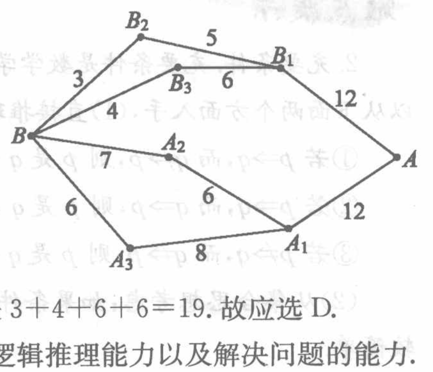
将文字问题转化为图表(真值表)形式是化抽象为直观的有效方法，如果只是简单地进行语言上的推理往往会思路模糊、判断错误. 学习数学要注意学以致用，切不可食“数”不化.

【例 17】如图所示，小圆点表示网络的结点，结点之间的连线表示它们有网络相连，连线标注的数字表示该段网络单位时间内可以通过的最大信息量. 现从结点 A 向结点 B 传递信息，信息可以分开沿不同的线路同时传递，则单位时间内传递的最大信息量是(　　).

A. 26　　　B. 24　　　C. 20　　　D. 19

剖析：注意理解单位时间内传递的最大信息量的实际意义和数学内涵. 若将其与道路的车流量相比照就容易找到解题方向了.

解：如图，由 A→B 有 4 条线路，每条线路单位时间内传递的最大信息量是：



(1) $A\to B_1\to B_2\to B$：　　3

(2) $A\to B_1\to B_3\to B$：　　4

(3) $A\to A_1\to A_2\to B$：　　6

(4) $A\to A_1\to A_3\to B$：　　6

故 4 条线路在单位时间内传递的最大信息量总共是 $3+4+6+6=19$. 故应选 D.

本题注意考查结合网络图形观察图形、分析问题和逻辑推理能力以及解决问题的能力. 在解题时，容易进入误区，得到 $A\to A_1\to A_2\to B$：$12+8+6=26$，误选 A，错因是没有看懂题中要求“从 A 向 B 单位时间内传递的最大信息量”的含义.

【例 18】(2003 年全国理科高考题)已知 $c>0$. 设 P：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，Q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，如果 P 和 Q 有且仅有一个正确，求 c 的取值范围.

解:函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减 $\Leftrightarrow 0<c<1$.

不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒大于 1.

$$x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c, & x\geqslant 2c,\\ 2c, & x<2c,\end{cases}$$

$\therefore$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 $2c$.

$\therefore$ 不等式 $|x+x-2c|>$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow 2c>1\Leftrightarrow c>\frac{1}{2}$.

如果 P 正确,且 Q 不正确,则 $0<c\leqslant\frac{1}{2}$. 如果 P 不正确,且 Q 正确,则 $c\geqslant 1$. 所以 c 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

【例 19】若 $x,y\in\{$正实数$\}$,且 $x+y>2$,求证:$\frac{1+x}{y}<2$ 或 $\frac{1+y}{x}<2$ 中至少有一个成立.

证明:假设 $\frac{1+x}{y}<2$ 和 $\frac{1+y}{x}<2$ 都不成立,则有 $\frac{1+x}{y}\geqslant 2$, $\frac{1+y}{x}\geqslant 2$ 同时成立,

$\because x>0$ 且 $y>0$, $\therefore 1+x\geqslant 2y$, $1+y\geqslant 2x$,

两式相加得,$2+x+y\geqslant 2x+2y$, $\therefore x+y\leqslant 2$ 这与已知 $x+y>2$ 矛盾,

因此 $\frac{1+x}{y}<2$ 或 $\frac{1+y}{x}<2$ 中至少有一个成立.

本题结论以"至少"形式出现,从正面思考有多种情况,不易入手,所以用反证法较好,当一个命题的结论是以"最多"、"最少"、"唯一"等形式出现或以否定的形式出现时,用反证法为好. 用反证法证题应注意解题的规范要求,在证题中要体现以下几个环节:①反设:假设命题的结论不成立,即假设结论的反面成立;②归谬:从假设出发,经过推理论证,得出矛盾;③结论:由矛盾判定假设不正确,从而肯定命题的结论正确. 反证法体现了"正难则反"、"正繁则反"的解题思想.

难点提示

2. 充要条件. 充要条件是数学学习中十分重要的内容,应用很广泛,解决充要条件问题可以从下面两个方面入手,(1)直接推理:由条件 p 出发进行推理,然后由结论 q 出发进行推理.

①若 $p\Rightarrow q$,而 $q\nRightarrow p$,则 p 是 q 的充分但不必要条件,而 q 是 p 的必要但不充分条件.

②若 $p\Rightarrow q$,而 $q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的充要条件(q 也是 p 的充要条件).

③若 $p\nRightarrow q$,而 $q\nRightarrow p$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(2)从集合思想考虑:如果条件 p 与结论 q 很容易用集合来描述,则从集合思想考虑比较简单.

设 $P=\{p\}$, $Q=\{q\}$,

①若 $P\subsetneqq Q$,则 p 是 q 的充分但不必要条件,而 q 是 p 的必要但不充分条件.

②若 $P=Q$,则 p 是 q 的充要条件(q 也是 p 的充要条件).

③若 $P\subsetneqq Q$ 且 $Q\subsetneqq P$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

典型题例剖析

【例 20】对于$[0,1]$上的一切 x 值，$a+2b>0$ 是 $ax+b>0$ 恒成立的（　　）.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分条件也不必要条件

解：取 $x=0$ 代入 $ax+b>0$，得 $b>0$，若 $a+2b>0$，则 $ax+b=b>0$ 不一定成立，另一方面，若 $ax+b>0$，则 $a+2b>0$. 故选 B.

"充分条件"和"必要条件"是数学中重要的概念之一，它讨论"若 p 则 q"的命题中的条件和结论的逻辑关系. 因此，必须真正弄懂它并善于应用它去分析和解决有关问题. 由于"充分条件与必要条件"是四种命题的关系的深化，它们之间存在着密切的联系，故在判断命题的条件的充要性时，可考虑"正难则反"的原则，即在正面判断较难时，可转化应用该命题的逆否命题进行判断. 一个结论成立的充分条件可以不止一个，必要条件也可以不止一个.

【例 21】（2004 年福建高考题）命题 p：若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充分而不必要条件；命题 q：函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$. 则（　　）.

A. "p 或 q"为假　　B. "p 且 q"为真　　C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

解：$\because |a+b|\leqslant|a|+|b|$，若 $|a|+|b|>1$ 不能推出 $|a+b|>1$，而 $|a+b|>1$，一定有 $|a|+|b|>1$，故命题 p 为假，又由 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域为 $\{x\,|\,|x-1|-2\geqslant0\}$，即 $|x-1|\geqslant2$，即 $x-1\geqslant2$ 或 $x-1\leqslant-2$，因此 $x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$，$\therefore q$ 为真命题. 故选 D.

判断命题的充要条件就是寻找命题间的推出关系. 关键要理解条件和结论分别是指什么. 对于符号"$\Leftrightarrow$"要熟悉它的各种同义词语："等价于"，"当且仅当"，"必须并且只须"……"反之也真"等. 本题也可将问题视为点 (a,b) 满足题设条件下的 p 与 q 的推出关系，请读者不妨一试.

【例 22】（2002 年河南、广东、广西高考题）函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数的充要条件是（　　）.

A. $ab=0$　　B. $a+b=0$　　C. $a=b$　　D. $a^2+b^2=0$

解：若 $a^2+b^2=0$，即 $a=0$，$b=0$，这时 $f(x)=x|x|$

$f(-x)=(-x)|-x|=-x|x|=-f(x)$，

$\therefore a^2+b^2=0$ 是 $f(x)$ 为奇函数的充分条件.

又若 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数，则 $f(-x)=(-x)|(-x)+a|+b=-f(x)$，

则必有 $a=b=0$，即 $a^2+b^2=0$

$\therefore a^2+b^2=0$ 是 $f(x)=x|x+a|+b$ 为奇函数的必要条件.

故 $a^2+b^2=0$ 是 $f(x)=x|x+a|+b$ 为奇函数的充要条件.

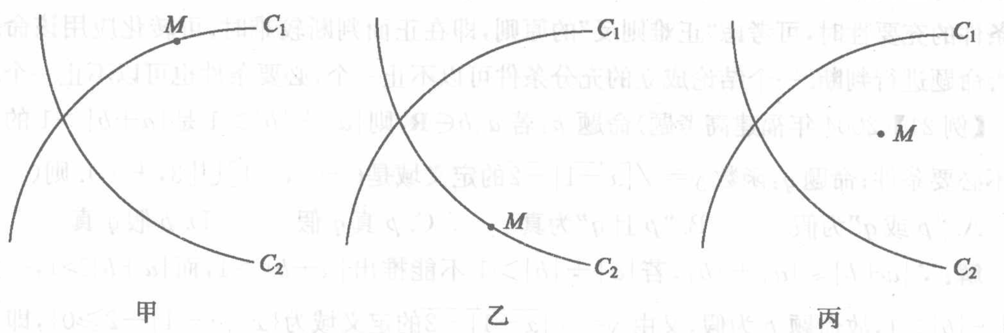
高考对充要条件的考查主要是以其他知识为载体进行两类问题的考查：一是充要条件的判别；一是有关充要性命题的证明. 充要条件的问题往往是几个知识点交融在一起，体现一种综合的意味，所以解决此类题要求有扎实的基本功，再结合一定的逻辑知识，问题就会迎刃而解.

【例 23】曲线 C_1 和 C_2 的方程分别为 $F(x,y)=0$ 和 $G(x,y)=0$，设点 M 的坐标为 (a,b)，则 $M\notin(C_1\cap C_2)$ 是 $\begin{cases}F(a,b)\neq0\\G(a,b)\neq0\end{cases}$ 的什么条件？

剖析：令条件 A 是 $M\notin(C_1\cap C_2)$，其意义就是"点 M 不是两曲线 C_1，C_2 的交点"，令条件 B 是 $\begin{cases}F(a,b)\neq0,\\G(a,b)\neq0.\end{cases}$

运用图形判断 A 能否推出 B，或 B 能否推出 A.

解：若条件 A 成立，即点 M 不是两曲线 C_1 和 C_2 的交点，则条件 A 分解为如图所示三种情况：



由甲得 $\begin{cases}F(a,b)=0,\\G(a,b)\neq0.\end{cases}$ 由乙得 $\begin{cases}F(a,b)\neq0,\\G(a,b)=0.\end{cases}$ 由丙得 $\begin{cases}F(a,b)\neq0,\\G(a,b)\neq0.\end{cases}$ 故条件 A 不能保证条件 B 成立，即 $A\nRightarrow B$.

反之，若条件 B 成立，即 $\begin{cases}F(a,b)\neq0,\\G(a,b)\neq0.\end{cases}$ 即点 M 的坐标 (a,b) 不是方程组的解，从而断定 M 既不在方程 $F(x,y)=0$ 表示的曲线 C_1 上，又不在方程 $G(x,y)=0$ 表示的曲线 C_2 上，因此点 M 肯定不是两曲线 C_1 和 C_2 的交点，即 $M\notin(C_1\cap C_2)$. 即 $B\Rightarrow A$.

所以条件 A 是条件 B 成立的"必要但不充分"条件.

考虑到任何一个命题与其逆否命题等价，故原命题等价于如下问题：曲线 C_1 和 C_2 的方程分别是 $F(x,y)=0$ 和 $G(x,y)=0$，设点 M 的坐标为 (a,b)，则 $F(a,b)=0$ 或 $G(a,b)=0$ 是 $M\in(C_1\cap C_2)$ 的什么条件. 要注意"否定"时要彻底，"且"的否定是"或"，"或"的否定是"且"，以下工作请同学们自己完成.