顶尖系列

自主学习先锋

高中步步高

顶尖数学

选修2-2

人教A版

福建人民出版社

顶尖系列

自主学习先锋

高中步步高

顶尖数学

选修2-2

人教A版

福建人民出版社

主　　编

张鹏程（福建师范大学数学与计算机科学学院中学数学教学研究室主任）

编写人员（按姓氏笔画排序）

方秦金　叶文榕　叶青柏　汤锦德　李新岳　陆集宁　陈　言　陈　腾

陈中峰　陈天雄　陈蓓璞　卓道章　林　风　林　婷　林元武　林嘉慧

姚承佳　柯跃海　赵祥枝　倪政翔　黄　雄　黎　强

顶尖数学（选修 2—2）（人教 A 版）

DINGJIAN SHUXUE

出　　版：	福建人民出版社		
地　　址：	福州市东水路 76 号	邮政编码：	350001
电　　话：	0591-87604366（发行部）		87521386（编辑室）
电子邮件：	211@fjpph.com		
网　　址：	http://www.fjpph.com		
发　　行：	福建省新华书店		
印　　刷：	福州市东南彩色印刷有限公司		
地　　址：	福州市金山开发区橘园洲工业 58 幢	邮政编码：	350002
开　　本：	787 毫米×1092 毫米　1/16		
印　　张：	10.75		
字　　数：	264 千字		
版　　次：	2008 年 1 月第 1 版		2008 年 1 月第 1 次印刷
书　　号：	ISBN 978-7-211-05610-1		
定　　价：	13.90 元		

编写说明

“高中步步高”根据课程标准，配合各版本教材进行编写。丛书以课为训练单位，以单元为测试单位建构编写体系，符合教学规律，体现课改精神。丛书不仅关注学生夯实基础知识、基本技能，还关注学生学习的自主性、探究性、合作性；不仅关注培养学生学会学习、学会反思、学会自我激励，还关注培养学生学习过程中情感、态度和价值观的形成。

为了使本丛书在理念上与最新教改理念、精神相吻合，我们在本套丛书的编写过程中，坚持“三参与”原则，即颇有造诣的课程研究专家参与，深谙当前基础教育课程改革的教研员参与和具有丰富教学实践经验的一线特、高级教师参与，从而使本丛书在质量上得到充分保证。

“高中步步高”按章（或单元）进行编写，每一章（或单元）一般设：“学习目标”、“要点透析”、“方法指津”、“自我评估”、“探究应用”、“拓展视野”、“归纳整合”、“单元检测卷”等栏目。

“学习目标”是根据各章（或单元）应达到的目标提出具体要求。“要点透析”是以课程标准为基准，以相应版本的教材为落脚点，较详细地分析本章（或单元）内容的重点、难点。“方法指津”通过对精选的经典题目的解析和点拨，拓展学生的思路，提升发散思维能力，掌握科学的学习方法。“自我评估”在题目设计上，特别注重吸收全国各地出现的最新题型，同时注重知识的现代化，以激活学生已有的知识、经验和方法。题目既注重基础性，又强调自主性、参与性、实践性、合作性。“探究应用”特别注重吸收密切联系生产、生活实际的有趣题目，加强探究性习题的训练。“拓展视野”对本章（或单元）知识进行拓展，通过对一些典型的探究型、开放型的题目进行解析和点拨，使学生对章（或单元）内、学科内、学科间知识结构的关系得以把握和拓展。“归纳整合”以树形图、方框图或表格等形式对本章（或单元）知识进行梳理、归纳、整合，使学生对整章（或单元）知识间的逻辑关系有个清楚的认识。经过系统的训练后，通过“单元检测卷”与“模块检测卷”对所学内容进行评价与总结。由于不同学科及不同版本的教材各有特点，因此，上述栏目及其写法允许根据实际需要适当调整，灵活掌握。“检测卷”和“部分参考答案”一般做成活页的形式，以方便使用。

“高中步步高”实现了引导学生从预习到课外阅读全程自主学习的编写理念。我们在栏目设置上创设了科学的整合模式，将“知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观”三维目标分层次地融入书中，激发学生的自主性，使学生的自主学习效果达到最优化，促进学生的全面发展。

本丛书在编写过程中引用了一些作者的作品，在此，对这些作者表示感谢，对一部分未署名的作品的作者表示歉意，并请与我们联系。由于编写时间仓促，书中难免存在不足之处，恳望读者不吝赐教，以便我们今后不断努力改进。

编 者

目录 CONTENTS

第一章 导数及其应用

1.1 变化率与导数

学习目标

1. 通过分析实例，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵.

2. 通过函数图象直观地理解导数的几何意义.

要点透析

1. 变化率问题来源于现实生活中的实际问题. 平均变化率是一个比值，它是揭示一个量随另一个量变化快慢的重要指标，要注意平均变化率对于不同的实际问题可能有不同的名称. 如：物体运动时的平均变化率就是平均速度，它是位移增量与时间增量的比；气球膨胀的平均变化率就是气球膨胀率，它是半径增量与体积增量的比.

2. 函数的平均变化率是从实际问题中抽象出来的一个重要数学概念. 函数的平均变化率是用相对于某一点的自变量的增量和相应的函数的增量来定义的，其中自变量的增量 Δx 是一个可正可负但不能为 0 的量，而函数的增量可通过函数解析式用自变量的增量表示出来.

3. 函数平均变化率的几何意义是函数曲线上相应两点的割线斜率.

4. 明确利用导数定义求导数的一般步骤：

(1) 求函数的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

(2) 求平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$；

(3) 取极限，得导数 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

5. “函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数”，“导函数”，“导数”三者之间的区别与联系.

(1) “函数在一点处的导数”，就是在该点函数的改变量与自变量的改变量的比的极限，它是一个数值，不是变量.

(2) “导函数”：如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，就称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，这时对于区间 (a,b) 内每一个确定的值 x_0，都对应着一个导数 $f'(x_0)$，这样就在开区间 (a,b) 内构成一个新的函数，我们把这一新函数叫做 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的导函数，记作 $f'(x)$ 或 y'，即 $f'(x)=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

(3) 导函数也简称导数，所以，导数 $\begin{cases}\text{个别：}f(x)\text{在一点 }x_0\text{ 处的导数，}\\ \text{一般：导函数.}\end{cases}$

(4) 函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$就是导函数 $f'(x)$在点 $x=x_0$ 处的函数值，即$f'(x_0)=f'(x)\mid_{x=x_0}$.

6. 函数 $y=f(x)$曲线上的点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ 这是过点 $P(x_0, y_0)$，斜率为 k 的直线方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 中把 $y_0=f(x_0)$，$k=f'(x_0)$ 代入后得到的，注意 $P(x_0, y_0)$ 是切点.

7. 曲线在某一点处的切线是过该点的所有割线的极限位置，因此函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在导数必有切线，但不存在导数时不一定没有切线，这时若存在切线，其斜率也不存在，即切线垂直 x 轴，如：$y=\sqrt[3]{x}$，$y=\sqrt{x}$在 $x=0$ 处都没有导数，但都有切线 $x=0$.

8. 加强对导数定义的理解，清楚函数 $y=f(x)$ 在某点 $x=x_0$ 处的导数是一个极限值，它只与 x_0 有关，而与增量 Δx 取值无关.

1.1.1 变化率问题

方法指津

例 1 一物体的位移函数为 $y=f(t)=t^3+1$，其中 y 表示运动到时刻t 的位移.（位移单位：m，时间单位：s).

(1) 求时间 t 由 3 s 到 5 s 的平均速度；

(2) 求时间 t 由 3 s 到 4 s 的平均速度；

(3) 求时间 t 由 3 s 到 3.1 s 的平均速度.

分析 在实际问题中，变化率是一个比值. 这个比值一般来说是变化的. 本题中的变化率就是比值$\dfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$，因为它是位移与时间的比，物理上称为平均速度，也可理解为平均变化率的物理意义. 其他一些实际问题也有类似的变化率，只是所叫的名称各有不同.

解 (1) $\because \Delta t=5-3=2(\mathrm{s})$，$\Delta y=f(5)-f(3)=(5^3+1)-(3^3+1)=98(\mathrm{m})$，

$\therefore$ 平均速度 $\bar{v}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{98}{2}=49(\mathrm{m/s})$.

(2) $\because \Delta t=4-3=1(\mathrm{s})$，$\Delta y=f(4)-f(3)=(4^3+1)-(3^3+1)=37(\mathrm{m})$，

$\therefore$ 平均速度 $\bar{v}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{37}{1}=37(\mathrm{m/s})$.

(3) $\because \Delta x=3.1-3=0.1(\mathrm{s})$，$\Delta y=(3.1^3+1)-(3^3+1)=2.791(\mathrm{m})$，

$\therefore$ 平均速度 $\bar{v}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2.791}{0.1}=27.91(\mathrm{m/s})$.

例 2 已知函数 $f(x)=2x^2-x+1$.

(1) 求当 $x_1=2$，且 $\Delta x=1$ 时，函数增量 Δy 和平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；

(2) 求当 $x_1=2$，且 $\Delta x=0.1$ 时，函数增量 Δy 和平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；

(3) 求当 $x_1=2$，且 $\Delta x=0.01$ 时，函数增量 Δy 和平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；

(4) 若设 $x_2=x_1+\Delta x$，分析 (1) (2) (3) 题中的平均变化率的几何意义.

分析 求函数 $f(x)$的平均变化率的步骤是：

(1) 根据 x_1 和 x_2 的值写出自变量的增量 Δx；

(2) 由 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$ 计算函数的增量；

(3) 求出的比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}$就是函数$f(x)$由 x_1 变到 x_2 时的平均变化率，它的几何意义是过图象上两点 $P_1(x_1, f(x_1))$，$P_2(x_2, f(x_2))$的直线斜率.

解 $\because f(x)=2x^2-x+1$，

$\therefore \Delta y=f(x_1+\Delta x)-f(x_1)=[2(x_1+\Delta x)^2-(x_1+\Delta x)+1]-(2x_1^2-x_1+1)$

$=2\Delta x^2+(4x_1-1)\Delta x$.

(1) 当 $x_1=2$，$\Delta x=1$ 时，$\Delta y=2+7=9$，$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{9}{1}=9$.

(2) 当 $x_1=2$，$\Delta x=0.1$ 时，$\Delta y=0.02+7\times0.1=0.72$，$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0.72}{0.1}=7.2$.

(3) 当 $x_1=2$，$\Delta x=0.01$ 时，$\Delta y=0.0002+7\times0.01=0.0702$，$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0.0702}{0.01}=7.02$.

(4) 在 (1) 题中，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}$，它表示抛物线上点 $P_0(2, 7)$ 与点 $P_1(3, 16)$ 连线的斜率.

在 (2) 题中，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}==\frac{f(2.1)-f(2)}{2.1-2}$，它表示抛物线上点 $P_0(2, 7)$ 与点$P_2(2.1, 7.72)$连线的斜率；

在 (3) 题中，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(2.01)-f(2)}{2.01-2}$，它表示抛物线上点 $P_0(2, 7)$ 与点$P_3(2.01, 7.0702)$连线的斜率.

例 3 已知气球的表面积 S（单位：cm^2）与半径（单位：cm）之间的函数关系是 $S(r)=4\pi r^2$. 求：

(1) 气球表面积 S 由 10 cm^2 膨胀到 20 cm^2 时的平均膨胀率；

(2) 气球表面积 S 由 20 cm^2 膨胀到 30 cm^2 时的平均膨胀率；

(3) 气球表面积 S 由 30 cm^2 膨胀到 40 cm^2 时的平均膨胀率；

(4) 分析随着气球的逐渐膨胀，它的平均膨胀率的变化情况.

分析 本题中气球的膨胀率定义为气球膨胀过程中半径的增量与表面积的增量的比值，一般地对于任意给定的函数都有平均变化率，且是函数的增量与相应自变量的增量的比值.

解 由 $S(r)=4\pi r^2$，$r>0$，把 r 表示成表面积 S 的函数：$r(S)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\pi S}$.

(1) 当 S 由 10 cm^2 膨胀到 20 cm^2 时，气球表面积的增量 $\Delta S=20-10=10$（cm^2），气球半径的增量 $\Delta r=r(20)-r(10)=\frac{1}{2\pi}(\sqrt{20\pi}-\sqrt{10\pi})\approx1.1608$ (cm)，

$\therefore$气球的平均膨胀率为$\frac{\Delta r}{\Delta S}=\frac{1.1608}{10}=0.11608$ (cm^{-1}).

(2) 当 S 由 20 cm^2 膨胀到 30 cm^2 时，气球表面积的增量 $\Delta S=30-20=10$（cm^2），气球半径的增量 $\Delta r=r(30)-r(20)=\frac{1}{2\pi}(\sqrt{30\pi}-\sqrt{20\pi})\approx0.89074$ (cm)，

$\therefore$气球的平均膨胀率为$\frac{\Delta r}{\Delta S}=\frac{0.89074}{10}=0.089074$ (cm^{-1}).

(3) 当 S 由 30 cm^2 膨胀到 40 cm^2 时，气球表面积的增量 $\Delta S=40-30=10$ (cm^2)，气球半径的增量 $\Delta r=r(40)-r(30)=\frac{1}{2\pi}(\sqrt{40\pi}-\sqrt{30\pi})\approx 0.075093$ (cm)，

∴气球的平均膨胀率为 $\frac{\Delta r}{\Delta S}=\frac{0.075093}{10}=0.0075093$ (cm^{-1}).

(4) ∵当气球的表面积以相同的增量 $\Delta S=10$ cm^2 增大时，气球的平均膨胀率 $0.11608>0.089074>0.075093$. 且 $0.11608-0.089074>0.089074-0.075093$.

∴随着气球的逐渐膨胀，平均膨胀率逐渐变小了，并且逐渐变小的速度越来越慢.

自我评估

1. 设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 由 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的改变量 Δy 为（　　）.

A. $f(x_0+\Delta x)$　　B. $f(x_0)+\Delta x$　　C. $f(x_0)\cdot\Delta x$　　D. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

2. 已知函数 $y=x^2+1$，则当 $x=2$，$\Delta x=0.1$ 时，Δy 的值为（　　）.

A. 0.40　　B. 0.41　　C. 0.43　　D. 0.44

3. 一质点运动的方程为 $s=5-3t^2$，则在一段时间 $[1, 1+\Delta t]$ 内相应的平均速度为（　　）.

A. $3\Delta t+6$　　B. $-3\Delta t+6$　　C. $3\Delta t-6$　　D. $-3\Delta t-6$

4. 在曲线 $y=x^2+1$ 的图象上取一点 (1, 2) 及附近一点 $(1+\Delta x, 2+\Delta y)$，则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 为（　　）.

A. $\Delta x+\frac{1}{\Delta x}+2$　　B. $\Delta x-\frac{1}{\Delta x}-2$

C. $\Delta x+2$　　D. $2+\Delta x-\frac{1}{\Delta x}$

5. 已知函数 $y=\frac{1}{x}$，则当 $x=3$，$\Delta x=0.01$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$________.

6. 已知 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$（s 单位：m），则 t 从 3 s 到 3.1 s 的平均速度 $\bar{v}=$__________m/s.

7. 设函数 $f(x)=x^2-1$，求：

(1) 当自变量 x 由 1 变到 1.1 时，自变量的增量 Δx；

(2) 当自变量 x 由 1 变到 1.1 时，函数的增量 Δy；

(3) 当自变量 x 由 1 变到 1.1 时，函数的平均变化率.

8. 根据函数 $r(V)=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$ （$0\leqslant V\leqslant s$），计算气球的体积.

（1）V 由 0.6 到 1.2 的平均膨胀率；

（2）V 由 1.2 到 1.8 的平均膨胀率；

（3）V 由 1.8 到 2.4 的平均膨胀率.

9. 某汽车的紧急刹车装置在遇到特别情况时需在 2 s 内完成刹车，其位移（单位：m）关于时间（单位：s）的函数为 $s(t)=-\dfrac{1}{3}t^3-4t^2+20t+15$. 求：

（1）开始刹车后 1 s 内的平均速度 $\overline{v_1}$；

（2）开始刹车后 2 s 内的平均速度 $\overline{v_2}$；

（3）刹车 1 s 到 2 s 之间的平均速度 $\overline{v}$.

探究应用

10. 当 $\Delta x=\dfrac{1}{3}$ 时，函数 $y=x^2$ 在 $x=1$，2，3 处的平均变化率最大时对应的点为（　　）.

A. $x=1$　　B. $x=2$　　C. $x=3$　　D. 一样大

11. 如果 $\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=2$ 对所有的 Δx（$\Delta x\neq 0$）都成立，那么 $f(x)$ 是一个什么样的函数？

1.1.2 导数的概念

方法指津

例 1 在自行车比赛中，运动员的位移与比赛时间 t 存在函数关系 $s=10t+5t^2$（s 的单位：m，t 的单位：s），求：

（1）$t=20$，$\Delta t=0.1$，0.01，0.001 时的 Δs 与 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$；

（2）求 $t=20$ 时的速度.

分析 平均速度与瞬时速度是两个完全不同的概念，平均速度是相对时间段 $[t_0,\ t_0+\Delta t]$ 而言的. 瞬时速度是相对某一时刻 t_0 而言的. 但平均速度又与瞬时速度有着密切的联系，我们可以把瞬时速度看成平均速度在当 $\Delta t\to 0$ 的变化过程中的极限值.

解 （1）$\Delta s=[10(20+\Delta t)+5(20+\Delta t)^2]-(10\times 20+5\times 20^2)=210\Delta t+5(\Delta t)^2$；

∴当 $\Delta t=0.1$ 时，$\Delta s=21.05$，$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=210.5$；

当 $\Delta t=0.01$ 时，$\Delta s=2.1005$，$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=210.05$；

当 $\Delta t=0.001$ 时，$\Delta s=0.210005$，$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=210.005$.

（2）由导数的定义，在 $t=20$ 时的瞬时速度即为

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{10(t+\Delta t)+5(t+\Delta t)^2-10t-5t^2}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t^2+10t\Delta t+10\Delta t}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t+10t+10)=10t+10=10\times 20+10=210(\text{m/s}).$$

例 2 根据导数定义，求下列函数在 $x=x_0$ 处的导数：

（1）$f(x)=5x+3$，求 $f'(2)$；　　（2）$y=\sqrt{x}$，求 $y'\big|_{x=8}$；

（3）$f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-2$，求 $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

分析 求函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数. 第一步求函数的增量 Δy，第二步求平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，第三步使 $\Delta x\to 0$ 求导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，求解时不能给出自变量的增量 Δx 的具体值，否则求出的是平均变化率，而不是瞬时变化率. 求解的关键是第二步对 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的变形，使分子、分母能约去一个 Δx.

解 （1）$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{[5\times(2+\Delta x)+3]-(5\times 2+3)}{\Delta x}=5$，

∴$f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}5=5$.

（2）$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{8+\Delta x}-\sqrt{8}}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt{8+\Delta x}+2\sqrt{2}}$，

$\therefore y'\big|_{x=8}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{8+\Delta x}+2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}.$

(3) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{\left[\dfrac{2}{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}+\Delta x\right)^3-2\right]-\left[\dfrac{2}{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3-2\right]}{\Delta x}=\dfrac{2}{3}(\Delta x)^2-\Delta x+\dfrac{1}{2}$,

$\therefore f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{2}{3}(\Delta x)^2-\Delta x+\dfrac{1}{2}\right]=\dfrac{1}{2}.$

例 3 根据导数定义，求下列函数的导数：

(1) $f(x)=3x+\dfrac{1}{3x}$，求 $f'(x)$；　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{2x-3}$，求 $f'(x)$.

分析 求可导函数 $f(x)$ 在定义域内任一点 x 处的导数，先求 Δy，再化简$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，最后根据导数定义 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$求出 $f'(x)$．若求函数 $f(x)$在若干个点处的导数，可先求出导函数 $f'(x)$，然后再求相应的导数值.

解 (1) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{\left[3(x+\Delta x)+\dfrac{1}{3(x+\Delta x)}\right]-\left(3x+\dfrac{1}{3x}\right)}{\Delta x}$

$=3+\dfrac{x-(x+\Delta x)}{3x(x+\Delta x)\Delta x}=3-\dfrac{1}{3x(x+\Delta x)}$,

$\therefore f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[3-\dfrac{1}{3x(x+\Delta x)}\right]=3-\dfrac{1}{3x^2}.$

(2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{1}{2(x+\Delta x)-3}-\dfrac{1}{2x-3}}{\Delta x}=\dfrac{2x-3-2(x+\Delta x)+3}{\Delta x(2x-3)[2(x+\Delta x)-3]}$

$=-\dfrac{2}{(2x-3)[2(x+\Delta x)-3]}$,

$\therefore f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}-\dfrac{2}{(2x-3)[2(x+\Delta x)-3]}=-\dfrac{2}{(2x-3)^2}.$

自我评估

1. 函数 $f(x)$在 $x=a$ 处有导数，则 $\lim\limits_{h\to a}\dfrac{f(h)-f(a)}{h-a}$等于（　　）.

A. $f(a)$　　B. $f'(a)$　　C. $f'(h)$　　D. $f(h)$

2. 如果质点 A 按照规律 $s=3t^2$ 运动，那么在 $t=3$ 时的瞬时速度为（　　）.

A. 6　　B. 18　　C. 54　　D. 81

3. 若 $f'(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0-k)-f(x_0)}{2k}$的值为（　　）.

A. 2　　B. -2　　C. -1　　D. 1

4. 下列说法中正确的是（　　）.

①高度 h 关于时间 t 的导数就是跳水运动员的瞬时速度，

②气球半径 r 关于体积 V 的导数就是气球的瞬时膨胀率，

③函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率就是函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处的导数.

A. ①②③　　B. ①②　　C. ①③　　D. ③

5. 一质点的运动方程为 $s=5-3t^2$，在一段时间 $[1, 1+\Delta t]$ 内相应的平均速度以及点 (1，2)的瞬时速度分别为__________________.

6. 已知函数 $f(x)=ax^3+3x^2+2$，若 $f'(-1)=3$，则 $a=$______.

7. 物体在自由落体时的运动方程为 $s=s(t)=\frac{1}{2}gt^2$（其中位移单位：m，时间单位：s），$g=9.8\text{m/s}^2$. 求：

(1) 当 $t=3$ 且 $\Delta t=1$，0.1，0.01，0.001 时物体在时间段 $[t, t+\Delta t]$ 内的平均速度 $\bar{v}$；

(2) 物体在 $t=3$ 时的瞬时速度 v.

8. 求下列函数的导数：

(1) 求函数 $y=4x-x^2$ 在 $x=-1$ 处的导数；

(2) 求函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$在 $x=4$ 处的导数；

(3) 求函数 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$ 在 $x=-2$ 处的导数.

9. 已知 $f(x)=\sqrt{x}$，求 $f'(x)$，并求 $f'(1)$，$f'(2)$，$f'(4)$.

探究应用

10. 设函数 $f(x)$在 $x=a$ 处有导数，用 $f'(a)$表示下列各式：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+3\Delta x)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$；　　(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h^2)-f(a)}{h}$.

11. 已知一物体做直线运动的速度 $v=v(t)=t^2+2t-3(\mathrm{m/s})$，求它在 $t=2\ \mathrm{s}$ 末的加速度.

1.1.3 导数的几何意义

方法指津

例 1 求曲线 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}$上一点 $P\left(4,\ -\dfrac{7}{4}\right)$处的切线方程.

分析 要求过点 $P\left(4,\ -\dfrac{7}{4}\right)$的切线方程，只需求切线的斜率. 由导数的几何意义知，其斜率为 $f'(4)$，为此需求出曲线在点 $P\left(4,\ -\dfrac{7}{4}\right)$处的导数.

解 $\because f'(4)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{4+\Delta x}-\sqrt{4+\Delta x}-\left(\dfrac{1}{4}-2\right)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{4+\Delta x}-\dfrac{1}{4}\right)-(\sqrt{4+\Delta x}-2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{-\Delta x}{4(4+\Delta x)}-\dfrac{\Delta x}{\sqrt{4+\Delta x}+2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{-1}{4(4+\Delta x)}-\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}+2}\right]=-\frac{5}{16},$$

$\therefore$所求切线的斜率为$-\dfrac{5}{16}$.

所求切线的方程为 $5x+16y+8=0$.

评注 本题求 $f'(4)$是关键，要注意对根式的化简.

例2 已知曲线 C：$y=x^3$.

(1) 求曲线 C 上横坐标为 1 的点处的切线方程；

(2) 第 (1) 小题中的切线与曲线 C 是否还有其他的公共点？

分析 求切线方程的方法同例 1，第 (2) 小题在于探求直线与曲线相切是否一定只有一个公共点.

解 (1) 将 $x=1$ 代入曲线 C 的方程得 $y=1$，∴切点 $P(1, 1)$.

$$\because y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2]=3x^2.$$

$$\therefore y'\Big|_{x=1}=3.$$

∴过 P 点的切线方程为 $y-1=3(x-1)$，即 $3x-y-2=0$.

(2) 由 $\begin{cases} y=3(x-1)+1, \\ y=x^3, \end{cases}$ 可得 $(x-1)(x^2+x-2)=0$.

解得 $x_1=1$，$x_2=-2$.

从而求得公共点为 $P_1(1, 1)$ 和 $P_2(-2, -8)$.

说明切线与曲线 C 的公共点除了切点外，还有另外的点 $P_2(-2, -8)$.

例3 如图 1-1 所示的物体运动的路程随时间变化的函数 $f(t)=4t-2t^2$ 的图象，试根据图象，描述、比较曲线 $f(t)$ 在 t_0、t_1、t_2 附近的变化情况，并求出 $t=2$ 时的切线方程.

分析 导数的几何意义是曲线的切线斜率，反过来，在曲线上取定一点作曲线的切线时，能根据切线判定斜率的符号即导数的符号，进而根据符号确定在该点附近曲线的升降情况（或函数的增减情况），同时可以根据切点处的切线倾斜程度的大小，判断曲线升降的快慢程度.

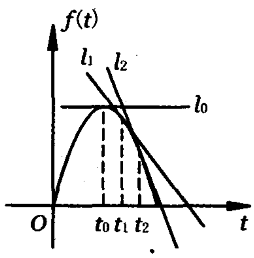

图 1-1

解 $f(t)$ 对 t 的导数即为在该点处的切线的斜率.

用曲线 $f(t)$ 在 t_0、t_1、t_2 处的切线刻画曲线 $f(t)$ 在 t_0、t_1、t_2 附近的变化情况.

①当 $t=t_0$ 时，曲线 $f(t)$ 在 t_0 处的切线 l_0 平行于 x 轴. 所以在 $t=t_0$ 附近曲线比较平坦，几乎没有升降.

②当 $t=t_1$ 时，曲线 $f(t)$在 t_1 处的切线 l_1 的斜率 $f'(t_1)<0$，所以在 $t=t_1$ 附近曲线下降，即函数 $f(t)$ 在 $t=t_1$ 附近单调递减.

③当 $t=t_2$ 时，曲线 $f(t)$ 在 t_2 处的切线 l_2 的斜率 $f'(t_2)<0$，所以在 $t=t_2$ 附近曲线下降，即函数 $f(t)$ 在 $t=t_2$ 附近也单调递减. 由图象可以看出，直线 l_1 的倾斜程度小于直线 l_2 的倾斜程度，说明曲线 $f(t)$ 在 t_1 附近比在 t_2 附近下降得缓慢.

④在 $t=2$ 时，$f(2)=0$，

在 $t=2$ 时的切线的斜率 $k=f'(2)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(2+\Delta t)-f(2)}{\Delta t}$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{4(2+\Delta t)-2(2+\Delta t)^2-8+8}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{4\Delta t-2\Delta t^2-8\Delta t}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(-2\Delta t-4)=-4$$

∴切线的方程为 $y=-4(x-2)$，即 $4x+y-8=0$.

自我评估

1. 曲线 $y=x^3-3x^2+1$ 在（1，−1）处的切线方程为（　　）.

A. $y=3x-4$　　B. $y=-3x+2$　　C. $y=-4x+3$　　D. $y=4x-5$

2. 在曲线 $y=x^2$ 上切线倾斜角为$\frac{\pi}{4}$的点是（　　）.

A.（0，0）　　B.（2，4）　　C. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

3. 曲线 $y=x^3$ 在点 P 处切线斜率为 k，当 $k=3$ 时，点 P 坐标为（　　）.

A.（−2，−8）　　B.（−1，−1）或（1，1）

C.（2，8）　　D. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$

4. 环保部门在规定的排污达标的日期前对甲、乙两家企业进行检查，其连续监测结果如图 1-2 所示，其中 w 表示治污量. 据图分析，治污效果比较好的企业是（　　）.

A. 甲　　B. 乙

C. 甲、乙一样　　D. 无法确定

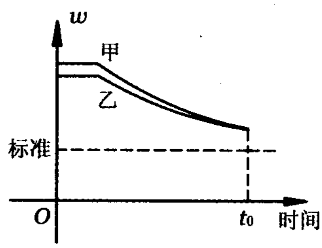

图 1-2

5. 曲线 $y=\frac{12}{x}$在点 $P(3，4)$ 处的切线方程为____________________.

6. 若曲线 $y=2x^2-4x+p$ 与直线 $y=1$ 相切，则 p 的值为______.

7. 求曲线 $y=-x^2+1$ 在点 $P(1，2)$ 处的切线的斜率 k 及倾斜角 α.

8. 已知曲线 $y=\frac{4}{x}$在点 $P(1，4)$ 处的切线与直线 l 平行且距离等于 $\sqrt{17}$，求直线 l 的方程.

9. 曲线 $y=x^2+1$ 过点 P 的切线与曲线 $y=-2x^2-1$ 相切，求点 P 的坐标.

探究应用

10. 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，$y=f'(x)$ 的图象如图 1-3 所示，则 $y=f(x)$ 的图象有可能是图 1-4 中的（　　）.

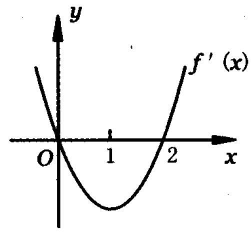

图 1-3

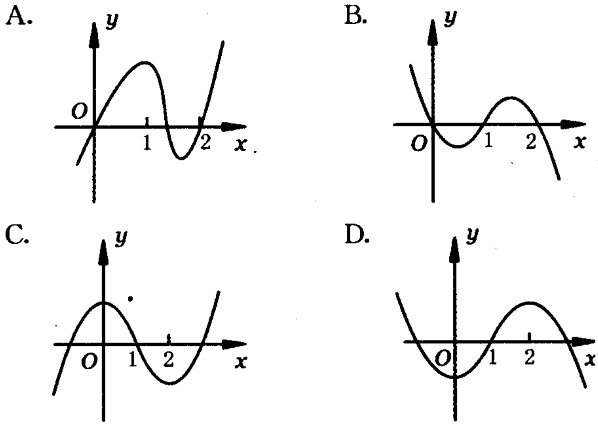

图 1-4

11. 求曲线 $y=x^3$ 在点（3，27）处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积.

1.2　导数的计算

学习目标

1. 能根据导数定义，求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数.

2. 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数，能求简单的复合函数（仅限于形如 $f(ax+b)$）的导数.

3. 会使用导数公式表.

要点透析

1. 几个常用函数的导数及其实际意义.

（1）函数 $y=f(x)=c$ 的导数为 $y'=0$，$y'=0$ 的几何意义为函数 $y=c$ 图象上每一点处的切线的斜率都为 0. 其物理意义可表示为路程关于时间的函数，则 $y'=0$ 可以解释为某物体的瞬时速度始终为 0，即一直处于静止状态.

（2）函数 $y=f(x)=x$ 的导数为 $y'=1$. $y'=1$ 表示函数 $y=x$ 图象上每一点处的切线的