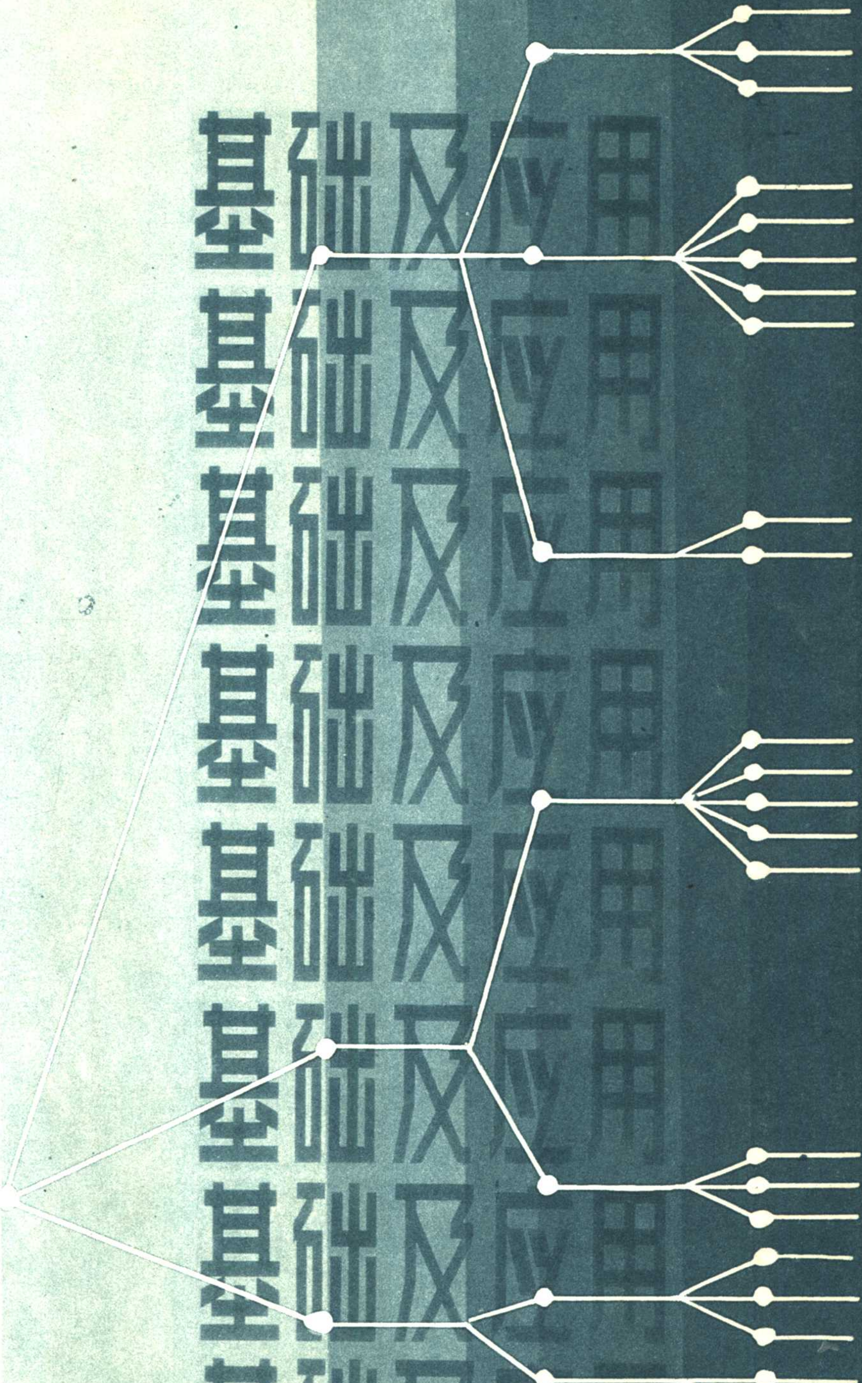
运筹学

基础及应用



胡运权 主编

哈尔滨工业大学出版社

运筹学基础及应用

胡运权　主编

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了运筹学的线性规划、整数规划、目标规划、图和网络方法、排队论、存贮论、模拟技术、动态规划、对策论、决策论各分支的主要原理和方法，内容上力求阐明概念和方法的经济、物理含义，并用较多例子介绍各类模型的建立及它们在实际中的应用。

本书可供高等院校经济和管理类专业的本科生、研究生使用，也可作为各类管理干部学院以及厂矿企业、经济管理部门的干部及工程技术人员学习运筹学的自学或参考读物。

运筹学基础及应用

胡运权　主编

*

哈尔滨工业大学出版社出版

黑龙江省新华书店发行

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/16　印张17.75　字数405,000

1985年10月第1版　1985年10月第1次印刷

印数 1—10,000

书号 4341·3　定价 3.35元

前　言

运筹学是一门研究如何有效地组织和管理人机系统的科学。在一个复杂的人机系统中，涉及到大量人力和其它资源的统筹组织安排，运筹学应用分析的、经验的和数量的方法，对各种可供选择的方案进行比较评价，为制订最优的管理决策提供数量上的依据。

运筹学诞生于本世纪三十年代。在第二次世界大战中，曾被成功地应用于研究作战的战略、战术和后勤供应等问题，取得了很好的效果。战后，运筹学又被广泛应用于制订经济建设和社会管理方面的决策，节省了巨大财富。

我国从五十年代中期即开始运筹学的研究。三十多年来，无论在理论及实际应用方面都作出不少成绩。目前，除已建立全国性的运筹学学会和出版专门的运筹学杂志外，在很多学会中设有运筹学的专业组织，有几十种刊物发表过有关运筹学的研究成果。在高等院校的经济和管理类专业中，已普遍把运筹学列为必修课程。

本书系统地介绍了运筹学各主要分支的原理和方法，内容上力求阐明概念和原理的经济、物理含义，并用了较多的例子介绍各类模型的建立和它们在实际中的应用。本书曾作为我校管理专业教材于 1981 年校内印刷过，这次根据几年来在教学中的使用实践，又对各章节分别做了重写、补充或修改。学习本书时，可参阅清华大学出版社1985年出版的《运筹学习题集》。

本书第二、三、四、五、六、七、八、十章由胡运权编写，第九、十二章由钱颂迪编写，第一、十一、十三章由两人共同编写。胡运权负责全书统稿、主编。

哈工大管理学院姚德民等参加了本书审稿会，沙聚桢、徐永仁对本书修改提出不少宝贵意见，谨在此表示感谢！

由于编者水平有限，掌握文献资料不多，书中缺点错误之处，望广大读者批评指正。

编　者

1985年4月

目　　录

第一章　线性规划及单纯形法

§1　一般线性规划问题的数学模型…………（1）

§2　图解法…………（5）

§3　单纯形法原理…………（8）

§4　单纯形法的计算步骤…………（13）

§5　单纯形法的进一步讨论…………（18）

§6　改进单纯形法…………（25）

§7　生产组织与计划问题的线性规划模型…………（29）

第二章　线性规划的对偶理论

§1　对偶问题的提出…………（36）

§2　原问题与对偶问题…………（37）

§3　对偶问题的基本性质…………（40）

§4　影子价格…………（44）

§5　对偶单纯形法…………（45）

§6　灵敏度分析…………（47）

§7　参数线性规划…………（55）

第三章　特殊类型的线性规划问题

§1　运输问题的典例和数学模型…………（60）

§2　表上作业法…………（62）

§3　产销不平衡的运输问题及其应用…………（72）

§4　上界法…………（79）

§5　线性规划问题的分解原理…………（82）

第四章　整数规划与分配问题

§1　整数规划的特点及应用…………（96）

§2　分配问题与匈牙利法…………（98）

§3　分枝定界法…………（104）

§4　割平面法…………（107）

§5　解 0—1 规划问题的隐枚举法…………（110）

第五章　目标规划

§1　问题的提出和模型…………（113）

§2　目标规划的图解分析法…………（116）

§3　用单纯形法求解目标规划…………（117）

§4　灵敏度分析…………（121）

§5 应用举例……………………………………………………………………………… (124)
第六章 图与网络分析
§1 图的基本概念和模型……………………………………………………………… (128)
§2 树图和图的最小部分树…………………………………………………………… (130)
§3 最短路问题………………………………………………………………………… (134)
§4 中国邮路问题……………………………………………………………………… (138)
§5 网络的最大流……………………………………………………………………… (139)
第七章 计划评审方法和关键路线法
§1 PERT 网络图……………………………………………………………………… (147)
§2 PERT 网络图的计算……………………………………………………………… (150)
§3 关键路线和网络的改进…………………………………………………………… (154)
§4 完成各项活动的期望时间和在规定时间内实现事件的概率……………………… (156)
第八章 排队论
§1 排队服务系统的基本概念………………………………………………………… (159)
§2 输入与输出………………………………………………………………………… (162)
§3 生死过程…………………………………………………………………………… (167)
§4 最简单的排队系统的模型………………………………………………………… (170)
§5 M/G/1的排队系统………………………………………………………………… (184)
§6 服务机构串连的排队系统………………………………………………………… (189)
§7 具有优先权的排队模型…………………………………………………………… (192)
第九章 存贮论
§1 引言………………………………………………………………………………… (195)
§2 基本概念…………………………………………………………………………… (195)
§3 确定性的存贮模型………………………………………………………………… (196)
§4 具有约束条件的存贮模型………………………………………………………… (201)
§5 控制库存量的方法………………………………………………………………… (203)
§6 随机性存贮模型…………………………………………………………………… (204)
第十章 随机模拟
§1 模拟的概念和应用………………………………………………………………… (208)
§2 均匀随机数的产生方法…………………………………………………………… (209)
§3 任意概率分布随机数的产生……………………………………………………… (215)
§4 模拟方法的分类…………………………………………………………………… (220)
§5 固定时间步长的模拟法…………………………………………………………… (221)
§6 事件表模拟法……………………………………………………………………… (225)
§7 应用实例——露天矿山装运过程的模拟………………………………………… (229)
§8 模拟中的两个问题………………………………………………………………… (233)
第十一章 动态规划
§1 多阶段的决策问题………………………………………………………………… (235)

§2 最优化原理和动态规划的数学模型……………………………（236）
§3 离散确定性动态规划模型的求解……………………………（240）
§4 离散随机性动态规划模型的求解……………………………（244）
§5 货郎担问题的动态规划解法……………………………（248）
第十二章 对策论
§1 引言……………………………（251）
§2 最大最小原则……………………………（252）
§3 具有混合策略的对策……………………………（254）
§4 m×n 型对策……………………………（256）
第十三章 决策分析
§1 引言……………………………（262）
§2 不确定型的决策分析……………………………（262）
§3 风险情况下的决策……………………………（266）
§4 主观概率……………………………（268）
§5 决策树……………………………（269）
§6 决策分析中的效用度量……………………………（271）
参考文献……………………………（273）

第一章　线性规划及单纯形法

§1．一般线性规划问题的数学模型

1-1　问题的提出

生产实践中经常提出如何合理计划，使人力、物力等各种资源得到充分利用，发挥出最大的效益，这就是所谓规划问题。

〔例 1〕　用一块边长为 a 的正方形铁皮做一个容器，应如何裁剪，使做成的容器的容积为最大。（见图 1-1）

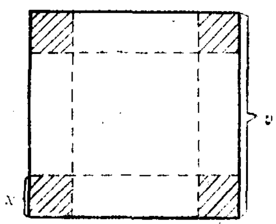


图 1-1

〔例 2〕　某企业计划生产Ⅰ、Ⅱ两种产品。这两种产品都要分别在 A、B、C、D 四种不同设备上加工。按工艺资料规定，生产每件产品Ⅰ需占用各设备分别为2、1、4、0小时，生产每件产品Ⅱ，需占用各设备分别为 2、2、0、4 小时。已知各设备计划期内用于生产这两种产品的能力分别为12、8、16、12 小时，又知每生产一件产品Ⅰ企业能获得 2 元利润，每生产一件产品Ⅱ企业能获得 3 元利润，问该企业应安排生产两种产品各多少件，使总的利润收入为最大。

类似的例子还可以举出很多。如物资的调运：已知某些地区生产一种物资，另一些地区需要该种物资，在已知各地区间调运单位该种物资的运价的情况下，应如何制定调运方案，使其满足供需要求并使总运费为最少，等等。问题的提法可以各种各样，但归结起来不外乎：一是给定一定数量的人力、物力等资源，研究如何充分利用，以发挥其最大效果；二是已给定计划任务，研究如何统筹安排，用最少的人力和物力去完成。

对例 1 中提出的问题，一般只要在铁皮四个角上剪去四个边长各为 x 的正方形，折叠起来就做成一个容器，容积为 $V=(a-2x)^2\cdot x$。要使容积最大，就是要确定 x 的值，使 V 的值达到最大。

例 2 中提出的问题要复杂一些。假定用 x_1 和 x_2 分别表示Ⅰ、Ⅱ两种产品在计划期内的产量。因设备 A 在计划期内的有效时间为 12 小时，不允许超过，于是有 $2x_1+2x_2\leqslant 12$。对设备 B、C、D 也可列出类似的不等式：$x_1+2x_2\leqslant 8$；$4x_1\leqslant 16$；$4x_2\leqslant 12$。企业的目标是在各种设备能力允许的条件下，使总的利润收入 $z=2x_1+3x_2$ 为最大。因此例 2 可归结为

$$\text{满足}\quad \begin{cases} 2x_1+2x_2\leqslant 12 \\ x_1+2x_2\leqslant 8 \\ 4x_1\leqslant 16 \\ 4x_2\leqslant 12 \\ x_1,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

使　$z = 2x_1 + 3x_2 = \max$

比较上述两个例子，从数学角度讲，都是求极值的问题，但例 1 中除变量取值要求非负外无其它更多限制，这类问题可以用微积分中已学过的求极值的古典方法解决；而例 2 中变量的取值要受一系列条件的限制，求解这类带附加限制条件的极值问题是运筹学中规划论部分研究的内容。

1-2　线性规划问题的数学模型

模型是实际问题的代表或描述。用字母、数字、符号等来精确和定量地表示问题中各种关系的一种抽象模型称为数学模型。从上述例子看到规划问题的数学模型包含三个组成要素：（1）决策变量，指问题中要确定的未知量；（2）目标函数，指问题要达到的目标要求，表示为决策变量的函数；（3）约束条件，指决策变量取值时应满足的一些限制条件，表示为含决策变量的等式或不等式。如果在规划问题的数学模型中，决策变量为可控变量，取值是连续的，目标函数和约束条件都是线性的，这类模型称做为线性规划问题的数学模型。

一般线性规划问题的数学模型可表示为以下几种形式：

$$\max\ (\text{或}\ \min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant)\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant)\ b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant)\ b_m \\ x_1, x_2 \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

以上模型的简写形式为：

$$\max\ (\text{或}\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j\ x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \leqslant (\text{或} =, \geqslant)\ b_i \quad (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

用向量形式表达时，上述模型可写为：

$$\max\ (\text{或}\min)\ z = CX$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_jx_j \leqslant (\text{或} =, \geqslant)\ b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

式中 $C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$；　$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，　$P_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$，　$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

用矩阵形式来表示可写为：

$$\max\ (\text{或}\ \min)\ z = CX$$

$$\begin{cases} AX \leqslant (\text{或} =, \geqslant)\ b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

式中：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

A 称为约束方程组（约束条件）的系数矩阵。

1-3 线性规划问题的标准形式

由于目标函数和约束条件内容和形式上的差别，线性规划问题可以有多种多样。为了便于讨论，规定线性规划问题的标准形式如下：

$$\max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i=1,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 & (j=1,\cdots,n) \end{cases}$$

标准形式的线性规划模型中，目标函数为求极大值（有些书上规定是求极小值），约束条件全为等式，约束条件右端常数项 b_i 全为非负值，变量 x_j 的取值全为非负值。对不符合标准形式（或称非标准形式）的线性规划问题，可分别通过下列方法化为标准形式。

1． 目标函数为求极小值，即为

$$\min \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

因为有 $\min\ z=-\min(-z)=\max(-z)$

令 $z'=-z$，即化为 $\max\ z'=-\min\ z=-\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$

2． 约束条件为不等式。当约束条件为≤时，如果 $2x_1+2x_2\leqslant 12$，可令 $x_3=12-2x_1-2x_2$ 或 $2x_1+2x_2+x_3=12$，显然 $x_3\geqslant 0$。当约束条件为≥时，如果 $10x_1+12x_2\geqslant 18$，可令 $x_4=10x_1+12x_2-18$ 或 $10x_1+12x_2-x_4=18$，$x_4\geqslant 0$，x_3 和x_4 是新加上去的变量，取值均为非负，加到原约束条件中去的目的是使不等式转化为等式，其中x_3称为松弛变量，x_4 一般称为剩余变量，但其实质相同，故也有统称松弛变量的。松弛变量或剩余变量在实际问题中分别表示未被充分利用的资源和超用的资源数，均未转化为价值和利润，所以引进模型后它们在目标函数中的系数均为零。

3． 取值无约束的变量。如果变量 x 代表某产品当年计划数与上一年计划数之差，显然 x 的取值可能是正也可能为负，这时可令 $x=x'-x''$，其中 $x'\geqslant 0$、$x''\geqslant 0$、将其代入线性规划模型即可。

〔例 3〕 将下述线性规划模型化为标准形式

$$\min\ z=-x_1+2x_2+3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3 & \leqslant 9 \\ 3x_1+x_2+2x_3 & \geqslant 4 \\ 3x_1-2x_2-3x_3 & =-6 \\ x_1、x_2\geqslant 0，x_3 \text{ 取值无约束} \end{cases}$$

〔解〕 令 $z'=-z$，$x_3=x_3'-x_3''$ $(x_3'\geqslant 0,\ x_3''\geqslant 0)$，并按上述规则将问题转化为

$$\max\ z'=x_1-2x_2-3x_3'+3x_3''+0x_4+0x_5$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3'-x_3''+x_4 = 9 \\ 3x_1+x_2+2x_3'-2x_3''-x_5 = 4 \\ -3x_1+2x_2+3x_3'-3x_3'' = 6 \\ x_1,\ x_2,\ x_3',\ x_3''\geqslant 0 \end{cases}$$

1-4 线性规划问题的解

线性规划问题

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,\cdots,m) & (2)\\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,\cdots,n) & (3)\end{cases}$$

求解线性规划问题，就是从满足约束条件（2）（3）的方程组中找出一个解，使目标函数（1）达到最大值。

可行解 满足上述约束条件（2）（3）的解 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$，称为线性规划问题的可行解。全部可行解的集合称为可行域。

最优解 使目标函数（1）达到最大值的可行解称为最优解。

基 设 A 为约束方程组（2）的 $m\times n$ 阶系数矩阵（设 $n>m$），其秩为 m。B 是矩阵 A 中的一个 $m\times m$ 阶的满秩子矩阵，称 B 是线性规划问题的一个基。不失一般性，设

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm}\end{bmatrix}=(P_1,\cdots,P_m)$$

B 中的每一个列向量 P_j $(j=1,\cdots,m)$ 称为基向量，与基向量 P_j 对应的变量 x_j 称为基变量。线性规划中除基变量以外的变量称为非基变量。

基本解 在约束方程组（2）中，令所有非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，又因为有 $|B|\neq 0$，根据克莱姆规则，由 m 个约束方程可解出 m 个基变量的唯一解 $X_B=(x_1,\cdots,x_m)$。将这个解加上非基变量取 0 的值有 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)$，称 X 为线性规划问题的基本解。显然在基本解中变量取非零值的个数不大于方程数 m，又基本解的总数不超过 C_n^m 个。

基本可行解 满足变量非负约束条件（3）的基本解称为基本可行解。

可行基 对应于基本可行解的基称为可行基。

〔例 4〕 在下述线性规划问题中，举例说明什么是基、基变量、基本解、基本可行解和可行基。

$$\max \ z=2x_1+3x_2+ox_3+ox_4+ox_5+ox_6$$

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3 & =12 \\ x_1+2x_2+x_4 & =8 \\ 4x_1+ox_2+x_5 & =16 \\ ox_1+4x_2+x_6 & =12 \\ x_j\geqslant 0 \end{cases}$$

〔**解**〕 写出约束方程组的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 的秩不大于 4，而

$$(P_3,P_4,P_5,P_6)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 是 4×4 的满秩矩阵故 $(P_3$、P_4，P_5，$P_6)$是上述线性规划问题的一个基。因而与 P_3，P_4，P_5，P_6 对应的变量 x_3、x_4、x_5、x_6 是基变量，x_1、x_2 是非基变量。在约束方程组中如令 $x_1=x_2=0$，即可解得 $x_3=12$，$x_4=8$，$x_5=16$，$x_6=12$，由此

$$X=(0,\ 0,\ 12,\ 8,\ 16,\ 12)$$

是线性规划问题的一个基本解。因该基本解中所有变量取值为非负，故它又是基本可行解。因而与这个基本可行解对应的基 $(P_3$，P_4，P_5，$P_6)$ 是一个可行基。

§2. 图 解 法

为了便于建立 n 维空间中线性规划问题的概念及便于理解求解一般线性规划问题的单纯形法的思路，先介绍图解法。这种方法的优点是直观性强，计算方便，但缺点是只适用于问题中有两个变量的情况。图解法的步骤是：建立坐标系，将约束条件在图上表示；确立满足约束条件的解的范围；绘制出目标函数的图形；确定最优解。用本章例 2 来具体说明图解法的原理步骤。例 2 的数学模型如下：

$$\max \ z=2x_1+3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2 \leqslant 12 & (4) \\ x_1+2x_2 \leqslant 8 & (5) \\ 4x_1 \leqslant 16 & (6) \\ 4x_2 \leqslant 12 & (7) \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 & (8) \end{cases}$$

1. 先分析约束条件是如何图示的。

本例只有两个变量x_1和x_2。以 x_1 和 x_2 为坐标轴作直角坐标系，因 $x_1\geqslant0$，$x_2\geqslant0$，

所以只有在第一象限内的点才符合条件。

约束条件 $2x_1+2x_2\leqslant 12$ 是一个不等式，先取 $2x_1+2x_2=12$，这是一条直线，在坐标中画出这条直线。这条直线把第一象限的平面分为两部份，凡落在该直线右上方平面内的点均有 $2x_1+2x_2>12$，落在该直线左下方平面内的点均有 $2x_1+2x_2<12$。所以 $2x_1+2x_2\leqslant 12$ 表示落在直线 $2x_1+2x_2=12$ 上的和这条直线左下方半平面内的所有点。于是满足 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$ 及 $2x_1+2x_2\leqslant 12$ 这三个约束条件的可用三角形 $0AB$ 及其边界上的所有点表示（见图 1-2）。

2. 同理满足约束条件 $x_1+2x_2\leqslant 8$ 的所有点位于直线 $x_1+2x_2=8$ 上及这条直线左下方的半平面内；满足 $4x_1\leqslant 16$ 的所有点是位于 $4x_1=16$ 这条直线上及这条直线左半边平面内；满足 $4x_2\leqslant 12$ 的所有点位于 $4x_2=12$ 这条直线上及这条直线左下方的半平面内。

同时满足这些约束条件的点必然落在由 x_1、x_2 两个坐标轴与上述四条直线所围成的多边形 $0\ Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4$ 内及该多边形的边界上（见图 1-3）。

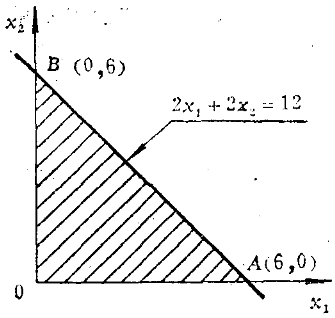


图 1-2

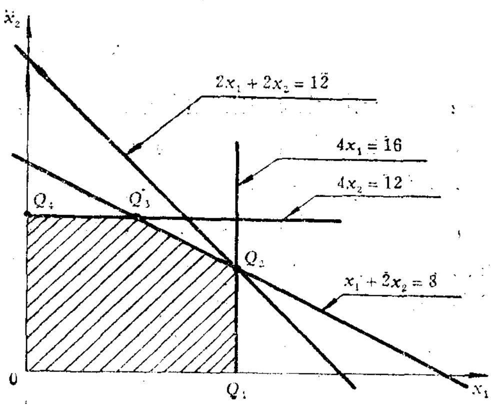


图 1-3

从图 1-3 可以看到多边形 $0\ Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4$ 是凸的，后面我们要证明，如果线性规划存在可行域，则可行域一定是一个凸集。

3. 目标函数的几何意义。目标函数 $z=2x_1+3x_2$ 中，z 是待定的值。将其改写为 $x_2=-\frac{2}{3}x_1+\frac{z}{3}$，由解析几何知，这是参量为 z、斜率为 $-\frac{2}{3}$ 的一族平行的直线，如图 1-4 所示。

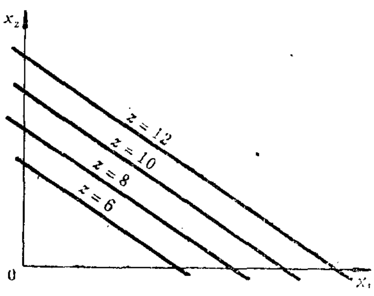


图 1-4

从图 1-4 看出，这族平行线中，离 0 点越远的直线，z 值越大。若对 x_1、x_2 的取值无限制的话，z 的值可以无限增大。但在线性规划问题中，对 x_1、x_2 的取值范围是有限制的，这就是约束条件所包含的范围。

4. 最优解的确定。最优解必须是满足约束条件要求，并使目标函数达到最优值。因此 x_1、x_2 的

取值范围只能从凸多边形 $0\ Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4$ 中去寻找。将图 1—3 和图 1—4 合并一起得到图 1-5，可以看出，当代表目标函数的那条直线由 0 点开始向右上方移动时，z 的值逐渐增大，一直移动到目标函数的直线与约束条件包围成的凸多边形相切时为止，切点就是代表最优解的点。因为再继续向右上方移动，z 值仍然可以增大，但在目标函数的直线上找不出一个点位于约束条件包围成的凸多边形内部或边界上。

本例中目标函数直线与凸多边形的切点是 Q_2，该点坐标可由求解直线方程 $4x_1=16$ 和 $2x_1+2x_2=12$ 得到，为 $(x_1, x_2)=(4, 2)$。将其代入目标函数得 $z=14$。即该企业生产Ⅰ、Ⅱ产品的最佳方案是：生产产品Ⅰ 4 件，产品Ⅱ 2 件，能获取利润收入 14 元。

本例中我们用图解法得到的问题的最优解是唯一的。但在线性规划问题的计算中，解的情况还可能出现下列几种：

1． 无穷多最优解。如将本例中的目标函数改变为 Max $z=2x_1+4x_2$，则目标函数的图形恰好与约束条件（6）平行。当目标函数直线向右上方移动时，他与凸多边形相切时不是一个点，而是在整个线段 $Q_2\ Q_3$ 上相切（见图 1-6）。这时在 Q_2 点、Q_3 点及 $Q_2\ Q_3$ 线段上的任意点都使目标函数值 z 达到最大，即该线性规划问题有无穷多最优解。

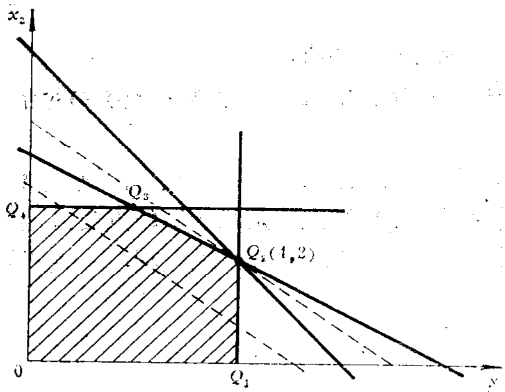


图 1-5

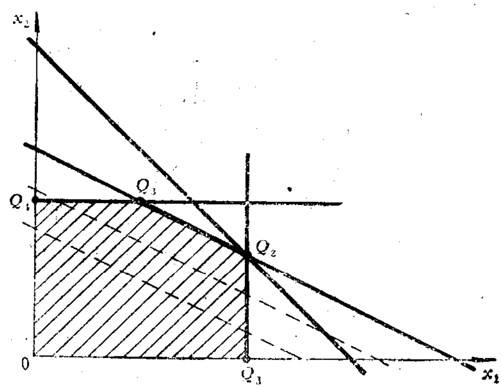


图 1-6

2． 无界解（或无最优解）。如例 2 中的约束条件只剩下 $4x_1\leqslant16$，其它条件（5）（6）（8）不再考虑。用图解法求解时，可以看到变量 x_2 的取值可以无限增大，因而目标函数的值 z 也可以一直增大到无穷（见图 1-7）。这种情况下称问题为无界解或无最优解。其原因是由于在建立实际问题的数学模型时遗漏了某些必要的资源约束条件。

3． 无可行解。如将例 2 改写为

$$\max\ z=2x_1+3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2 & \leqslant12 \\ x_1+2x_2 & \geqslant14 \\ x_1,\ x_2 & \geqslant0 \end{cases}$$

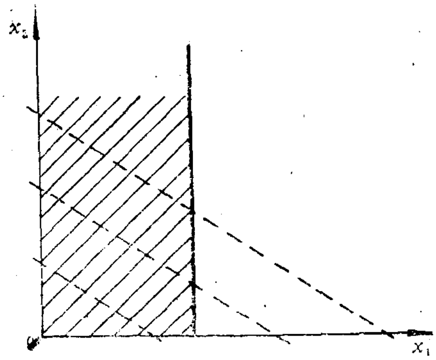


图 1-7

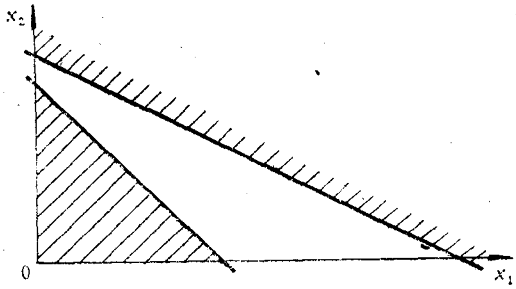


图 1-8

用图解法求解时找不到满足所有约束条件的公共范围（见图 1-8），这时问题无可行解。其原因是模型本身有错误，应检查修正。

图解法虽只能用来求解只具有两个变量的线性规划问题，但它的解题思路和几何上直观得到的一些概念判断，对下面要讲的求解一般线性规划问题的单纯形法有很大启示：

1． 求解线性规划问题时，解的情况有：唯一最优解；无穷多最优解；无界解；无可行解。

2． 若线性规划问题的可行域存在，则可行域是一个凸集。

3． 若线性规划问题的最优解存在，则最优解或最优解之一（如果有无穷多的话）一定是可行域的凸集的某个顶点。

4． 解题思路是，先找出凸集的任一顶点，计算在顶点处的目标函数值。比较周围相邻顶点的目标函数值是否比这个值大，如果为否，则该顶点就是最优解的点或最优解的点之一。否则转到比这个点的目标函数值更大的另一顶点，重复上述过程，一直到找出使目标函数值达到最大的顶点为止。

§ 3． 单纯形法原理

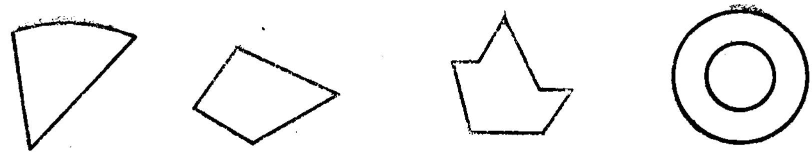
单纯形法是求解一般线性规划问题的基本方法，系 1947 年由丹捷格（G.B. Dantzig）提出。下面介绍这种方法的理论依据。

3-1 预备知识：凸集和顶点

凸集 在日常生活中，我们往往从直观感觉上判断物体或图形的凹凸性。这样做一方面不严格，容易产生错误；另一方面，如果一个几何图形给出的是解析表达式，则无法从直观上进行判断。凸集的严格定义是：如果集合 C 中任意两个点 X_1、X_2，其连线上的所有点也都是集合 C 中的点，称 C 为凸集。由于 X_1、X_2 的连线可表示为

$$\alpha X_1+(1-\alpha)X_2 \qquad (0<\alpha<1)$$

因此凸集定义用数学语言可表为：对任何 $X_1\in C$，$X_2\in C$，有 $\alpha X_1+(1-\alpha)X_2\in C\ (0<\alpha<1)$，则称 C 为凸集，在图 1-9 中 (a) (b) 是凸集，(c) (d) 不是凸集。



(a) (b) (c) (d)

图 1-9

顶点　凸集 C 中满足下述条件的点 X称为顶点：如果 C 中不存在任何两个不同的点 X_1、X_2，使 X 成为这两个点连线上的一个点。或者这样叙述：对任何 $X_1\in C$，$X_2\in C$，不存在 $X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2$ $(0<\alpha<1)$，则称 X 是凸集 C 的顶点。

3-2　几个基本定理的证明

定理 1　若线性规划问题存在可行解，则问题的可行域是凸集。

〔证〕　若满足线性规划约束条件 $\sum_{j=1}^{n} P_j x_j=b$ 的所有点组成的几何图形 C 是凸集，根据凸集定义，C 内任意两点 X_1、X_2 连线上的点也必然在 C 内，下面给予证明。

设 $X_1=(x_{11},\ x_{12},\cdots,x_{1n})$，$X_2=(x_{21},\ x_{22},\cdots,x_{2n})$ 为 C 内任意两点，即 $X_1\in C$，$X_2\in C$，将 X_1、X_2 代入约束条件有

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_{1j}=b;\qquad \sum_{j=1}^{n} p_j x_{2j}=b$$

X_1、X_2 连线上任意一点可以表示为

$$X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2\qquad (0<\alpha<1)$$

将点 X 代入约束条件得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} p_j x_j &= \sum_{j=1}^{n} p_j[\alpha x_{1j}+(1-\alpha)x_{2j}]\\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j\,\alpha x_{1j}+\sum_{j=1}^{n} p_j x_{2j}-\sum_{j=1}^{n} p_j\,\alpha x_{2j}\\ &= \alpha b+b-\alpha b=b\end{aligned}$$

所以 $X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2\in C$。由于集合中任意两点连线上的点均在集合内，所以 C为凸集。

引理　线性规划问题的可行解 $X=(x_1\cdots,x_n)$ 为基本可行解的充要条件是 X 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

〔证〕（1）　必要性。由基本可行解的定义显然。

（2）　充分性。若向量p_1，p_2，…，p_k线性独立，则必有 $k\leqslant m$；当$k=m$时，它们恰好构成一个基，从而 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_k,0,\cdots,0)$为相应的基本可行解。当 $k<m$ 时，则一定可以从其余列向量中找出$(m-k)$个与 p_1，p_2，…，p_k 构成一个基，其对应的解恰为 X，所以据定义它是基本可行解。

定理 2　线性规划问题的基本可行解X对应线性规划问题可行域（凸集）的顶点

〔证〕　本定理需要证明：X 是可行域顶点$\Leftarrow\Rightarrow X$ 是基本可行解。下面采用的是反证法，即证明：X 不是可行域的顶点$\Leftarrow\Rightarrow X$ 不是基本可行解。下面分两步来证明。

（1） X 不是基本可行解⇒X 不是可行域的顶点。

不失一般性，假设 X 的前 m 个分量为正，故有

$$\sum_{j=1}^{m} p_j x_j = b \tag{9}$$

由引理知 $p_1, \cdots, p_m$ 线性相关，即存在一组不全为零的数 $\delta_i (i=1, \cdots, m)$ 使得有

$$\delta_1 p_1 + \delta_2 p_2 + \cdots + \delta_m p_m = 0 \tag{10}$$

（10）式乘上一个不为零的数 μ 得

$$\mu\delta_1 p_1 + \mu\delta_2 p_2 + \cdots + \mu\delta_m p_m = 0 \tag{11}$$

（9）+（11）得 $(x_1+\mu\delta_1)p_1 + (x_2+\mu\delta_2)p_2 + \cdots + (x_m+\mu\delta_m)p_m = b$

（9）－（11）得 $(x_1-\mu\delta_1)p_1 + (x_2-\mu\delta_2)p_2 + \cdots + (x_m-\mu\delta_m)p_m = b$

令
$$X^{(1)} = [(x_1+\mu\delta_1), (x_2+\mu\delta_2), \cdots, (x_m+\mu\delta_m), 0, \cdots, 0]$$
$$X^{(2)} = [(x_1-\mu\delta_1), (x_2-\mu\delta_2), \cdots, (x_m-\mu\delta_m), 0, \cdots, 0]$$

又 μ 可以这样来选取，使得对所有 $i=1, \cdots, m$ 有

$$x_i \pm \mu\delta_i \geqslant 0$$

由此 $X^{(1)} \in C$，$X^{(2)} \in C$，又 $X = \frac{1}{2}X^{(1)} + \frac{1}{2}X^{(2)}$，即 X 不是可行域的顶点。

（2） X 不是可行域的顶点⇒X 不是基本可行解。

不失一般性，设 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_r, 0, \cdots, 0)$ 不是可行域的顶点，因而可以找到可行域内另外两个不同点 Y 和 Z，有 $X = \alpha Y + (1-\alpha)Z$ $(0<\alpha<1)$。或可写为

$$x_j = \alpha y_j + (1-\alpha) z_j \qquad (0<\alpha<1;\ j=1, \cdots, n)$$

因 $\alpha>0$，$1-\alpha>0$，故当 $x_j=0$ 时，必有 $y_j = z_j = 0$

因有
$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = \sum_{j=1}^{r} p_j x_j = b$$

故有
$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j = \sum_{j=1}^{r} p_j y_j = b \tag{12}$$
$$\sum_{j=1}^{n} p_j z_j = \sum_{j=1}^{r} p_j z_j = b \tag{13}$$

（12）－（13）得 $\sum_{j=1}^{r} (y_j - z_j) p_j = 0$

因 $(y_j - z_j)$ 不全为零，故 $p_1, \cdots, p_r$ 线性相关，即 X 不是基本可行解。

定理 3 若线性规划问题有最优解，一定存在一个基本可行解是最优解。

〔**证**〕 设 $X^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 是线性规划的一个最优解，$Z = CX^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0$ 是目标函数的最大值。若 $X^{(0)}$ 不是基本可行解，由定理2知 $X^{(0)}$ 不是顶点，一定能在可行域内找到通过 $X^{(0)}$ 的直线上的另外两个点 $(X^{(0)}+\mu\delta)$ 和 $(X^{(0)}-\mu\delta)$。将这两个点代入目标函数有

$$C(X^0+\mu\delta) = CX^0 + C\mu\delta$$
$$C(X^0-\mu\delta) = CX^0 - C\mu\delta$$

因 $CX^{(0)}$ 为目标函数的最大值，故有

$$CX^{(0)} \geqslant CX^{(0)} + C\mu\delta$$
$$CX^{(0)} \geqslant CX^{(0)} - C\mu\delta$$