新起点 高等学校理工科数学类规划教材辅导用书

概率论与数理统计学习指导

主编 靖新

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

新起点 高等学校理工科数学类规划教材辅导用书

概率论与数理统计学习指导

主　编　靖　新

副主编　史俊贤　关　驰　隋　英

编　者（按姓氏笔画）

冯　丽　孙海义　闫红梅

陈仲堂　徐厚生　郭金亭

戚　中　缪淑贤

大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导 / 靖新主编. 大连:大连理工大学出版社,2008. 8
ISBN 978-7-5611-4406-0

Ⅰ. 概… Ⅱ. 靖… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 128298 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
电话:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp. cn URL:http://www. dutp. cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm 印张:6. 5 字数:262 千字
2008 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:于建辉 责任校对:碧 海
封面设计:张 金

ISBN 978-7-5611-4406-0 定 价:16. 80 元

前 言

概率论与数理统计是大学生在本科阶段必修的一门重要基础课程。由于该门课程的思想性强，对学生的综合分析能力和计算能力要求比较高，许多问题让学生常常感到“知其然，而不知其所以然”，因而，影响了他们的学习兴趣和效果。教师在教学中由于受到学时的限制，许多概念、定理不能进行充分的讨论和讲解，也迫切需要把课堂的教学延伸到课后的指导性自学。本书作为新起点教材《概率论与数理统计》的配套辅导用书，编者将多年的教学经验汇集起来，遵循起点低、易读易懂、覆盖面宽、讲解性强的原则，通过系统地讲解各种习题，使学生理解概率统计的思想，掌握统计分析的方法，并能够进行适当的应用，使学生能够在学完每章教材后，通过对本书的学习，获得对课堂教学内容的有益补充和强化。

本书每章包括以下内容：

知识点精要　概述了本章的学习内容，归纳列出了本章的重点，反映教学大纲的学习要求。包括：主要概念的定义，重要的定理和公式；考点提示；疑难解答等。

典型题精解　给出了与本章知识点相关的典型题，并给出了详细的分析和解答。

教材习题同步解析　给出教材中每章全部习题的详细解答。

单元同步测试　给出了每章的同步测试题，并给出了参考答案和提示，便于学生通过自我测试检验该章的学习情况，复习和巩固所学习的内容。

希望本书能够成为读者学习概率论与数理统计的好助手。

由于作者水平有限，加之编写时间紧迫，书中一定还有缺点和错误，恳请批评指正。

编　者

2008 年 8 月

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

本章介绍了概率统计的基本概念、事件之间的关系与运算及概率的定义与性质，研究了古典概型、条件概率、事件的独立性和伯努利概型。随机事件的概率计算是本章的重点和难点。概率的计算包括：概率的加法、古典概型、条件概率、乘法公式、全概率和贝叶斯公式、伯努利概型以及事件的独立性。

要求深刻理解和牢固掌握基本概念并熟练应用；掌握概率的加法公式、减法公式及逆事件的概率，会熟练地应用公式进行概率的计算；会计算古典概型的概率；熟练掌握条件概率、乘法公式，会应用全概率公式和贝叶斯公式进行概率计算；理解事件独立性的概念，综合概率公式，应用事件独立性进行概率计算；理解伯努利概型，会用伯努利概型计算有关事件的概率。

知识点精要

一、主要概念的定义、重要的定理和公式

1. 随机试验

在概率论中将同时满足以下特点的试验称为随机试验：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

2. 样本空间

将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S。

3. 随机事件

把随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件，简称为事件，通常记为 A、B、C…。

4. 事件之间的关系及运算

记样本空间为 S，事件为 A、B。

(1) 事件的包含与相等：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事

件 A，记作 $A \subset B$；若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，即 $A = B$，则称事件 A 与事件 B 相等。

(2) 事件的和：事件 A、B 至少有一个发生，称为事件 A 与事件 B 的和事件，记作 $A \cup B$。

(3) 事件的积：事件 A、B 同时发生，称为事件 A 与事件 B 的积事件，记作 $A \cap B$ 或 AB。

(4) 事件的差：事件 A 发生、事件 B 不发生，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A - B$ 或 $A\overline{B}$。

(5) 互不相容（互斥）事件：事件 A、B 不能同时发生，称事件 A 与事件 B 为互不相容（互斥）事件，记作 $A \cap B = \varnothing$。

(6) 对立（逆）事件：对每次试验而言，事件 A、B 中必有一个发生，且仅有一个发生，称事件 A 与事件 B 为对立（逆）事件，记作 $A \cap B = \varnothing$ 且 $A \cup B = S$。

5. 事件之间的关系及运算的性质

设 A、B、C 为事件，则有：

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$；

(2) 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；

(3) 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

(4) 德・摩根律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

6. 概率

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为随机事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2) 规范性：对于必然事件 S，有 $P(S) = 1$；

(3) 可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i \neq j, A_iA_j = \varnothing$，$i, j = 1, 2, \cdots$，则有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$。

7. 概率的性质

(1) $P(\varnothing) = 0$；

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有 $P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$；

(3) 设 A、B 是两事件，若 $A \subset B$，则有 $P(B - A) = P(B) - P(A)$；

(4) 对于任一事件 A，有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$；

(5) 对于任意两个事件 A、B，有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$。

8. 古典概型

如果随机试验 E 满足下列特点：

(1) 试验的样本空间只包含有限个元素；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性是相同的；

(3) 有限个基本事件是两两互不相容的，

则称满足上述条件的试验为古典概型。

若古典概型的样本空间 S 中包含的基本事件的总数是 n，事件 A 包含的基本事件的个数是 m，则事件 A 的概率为 $P(A)=\frac{m}{n}$。

9. 条件概率

设 A、B 是两事件，且 $P(A)>0$，则称 $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率。

同理，可定义在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率为

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)},P(B)>0$$

10. 乘法定理

设 $P(A)>0,P(B)>0$，则有 $P(AB)=P(A)\cdot P(B\mid A)$，$P(AB)=P(B)\cdot P(A\mid B)$。

11. 全概率公式

设随机试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)$，称为全概率公式。

12. 贝叶斯公式

设随机试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(A)>0,P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)}\quad i=1,2,\cdots,n$$

称为贝叶斯公式。

13. 事件的独立性

设 A、B 是两事件，如果满足等式 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立，简称 A、B 独立。

14. n 重伯努利试验

如果随机试验 E 只有两个可能的结果：A 及 $\overline{A}$，则称 E 为伯努利试验。设 $P(A)=p(0<p<1)$，此时，$P(\overline{A})=1-p$。将 E 独立重复进行 n 次，则称这一串重复的独立试验为 n 重伯努利试验。

二、考点提示

1. 理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件之间的关系与运算；

2. 了解概率的定义，掌握概率的基本性质，掌握概率的加法公式、减法公式及逆事件的概率；

3. 会计算古典概型的概率；

4. 掌握条件概率、乘法公式，会应用全概率公式和贝叶斯公式；

5. 理解事件独立性的概念，掌握应用事件独立性进行概率计算；

6. 理解伯努利概型，掌握计算有关事件概率的方法。

三、疑难解答

1. 怎样确定随机试验的样本空间？

答　对于一个随机试验而言，样本空间并不一定唯一。在同一试验中，当试验的目的不同时，样本空间往往是不同的。如，把篮球运动员投篮作为随机试验时，若试验目的是考察命中率，则试验的样本空间为 $S_1=\{中,不中\}$；若试验目的是考察得分情况，则试验的样本空间为 $S_2=\{1分,2分,3分,0分\}$。S_1 与 S_2 显然不同。所以，我们应从试验目的出发来确定样本空间。

2. 怎样理解样本空间与必然事件的关系？

答　必然事件与样本空间的关系应当这样来认识：必然事件是指随机试验中一定会出现的事件。当在一次试验中只有一个样本点出现时，如果把样本空间视作一个整体，就可以说样本空间 S 在每次试验中都出现了，因而样本空间是随机试验的必然事件。

3. 如何认识互逆事件与互斥事件之间的联系与区别？

答　A 与 B 互逆，则 $B=\overline{A}$。在一次试验中，A 与 B 必有一个发生，且至多只有一个发生。

如果事件 A 与 B 不能同时发生，则 A,B 互斥。但 A,B 也可以同时不发生。因此，互逆必定互斥，互斥不一定互逆。

区别互逆与互斥的关键是：互逆只在样本空间只有两个（或两类）事件时存在，互斥还可在样本空间有多个（或多类）事件时存在。互斥事件的特征是：在一次试验中，两个互斥事件可以同时不发生。如，在一次考试中，及格与不及格总有一个发生，它们互逆又互斥；但考试成绩为 70 分或 80 分是互斥的，却不互逆，因为它们可以同时不发生。

4. 随机事件的运算与数的运算是否相同？

答　不相同。不能把随机事件的“积”与“和”理解成数的“积”与“和”，认为它们性质类似，都满足交换律、结合律和分配律，就是相同的运算。事实上，它们是完全不同的运算，反映不同的两类概念。如：

对于数 a，有 $a+a=2a, a\cdot a=a^2$；而对于事件 A，有 $A+A=A, A\cdot A=A$。

对于数 a,b,c，$a+bc\neq(a+b)\cdot(a+c)$；而对于事件 A,B,C，有

$$A+BC=(A+B)\cdot(A+C)$$

5. 事件的两两独立与相互独立有什么不同?

答　对两个事件而言,两两独立与相互独立是一致的。而两个事件以上时,两者就不同了,两两独立是指其中任意两个事件相互独立,而全部事件相互独立是指其中任意个事件都相互独立。如事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立包括两两独立,三三独立,…,n 个事件独立。

由 n 个事件两两独立不能得出 n 个事件相互独立,但后者可以推出前者。如掷一个正四面体,三面分别写有 A,B,C 字样,另一面写有 ABC 字样。观察朝下一面上的字母,得

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/4,P(AB)=P(A)P(B)=1/16$$
$$P(AC)=P(A)P(C)=1/16,P(BC)=P(B)P(C)=1/16$$

但 $P(ABC)=1/4\neq P(A)P(B)P(C)$。足见以三个事件的两两独立,不能推出三个事件的相互独立。

6. 条件概率为什么是概率?它与无条件概率有何区别?

答　条件概率 $P(A\mid B)$ 可以认为是 B 发生的条件下缩减样本空间 B 中事件 A 的概率,因此,可以验证它符合概率的三条性质:非负性,规范性和可列可加性,是一个概率。

条件概率是在试验 E 的条件下又加上一个新条件(如 B 发生)时,求事件(如 A)的概率。因为条件增多,则可以理解为:(1) 样本空间 S 不变,有利事件改变(由 A 变为 AB,一般的有 $A\supset AB$);(2) 样本空间 S 缩减为 B,有利事件 A 改变为 AB。所以一般的,$P(A)\neq P(A\mid B)$。

7. 条件概率 $P(A\mid B)$ 与积事件概率 $P(AB)$ 有何区别与联系?

答　条件概率 $P(A\mid B)$ 是在试验 E 的条件下增加条件 B 发生后,求得的事件 A 发生的概率。而积事件 $P(AB)$ 是在试验 E 的条件下 AB 同时发生的概率。它们的区别就在于,它们发生时的条件不同(虽然都是 A,B 同时发生)。其联系是 $P(A\mid B)$ 与 $P(AB)$ 可以相互表出,即

$$P(A\mid B)=P(AB)/P(B),P(AB)=P(B)P(A\mid B)$$

8. 全概率公式与贝叶斯公式有何联系?它们反映什么样的概率问题?

答　全概率公式与贝叶斯公式是计算复杂事件概率的重要工具。

若把全概率公式中的 A 视作"果",而把 S 的每一划分 B_i 视作"因",则全概率公式反映"由因求果"的概率问题。公式 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$ 中的 $P(B_i)$ 是根据以往信息和经验得到的,所以被称为先验概率。而贝叶斯公式又称为"执果溯因"的概率问题,即在结果 A 已发生的情况下,寻找 A 发生的原因。公式 $P(B_i\mid A)=P(A\mid B_i)P(B_i)/P(A)$ 中的 $P(B_i\mid A)$ 是得到"信息"A 后求出的,称为后验概率。

先验概率与后验概率有不可分割的联系,后验概率的计算是以先验概率为基础的。由贝叶斯公式知,求 $P(B_i\mid A)$ 要用到 $P(A)$,而 $P(A)$ 是由先验概率计算得到的。

典型题精解

一、随机事件的概率

【例 1-1】 已知A、B两事件满足条件$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且$P(A)=p$，求$P(B)$。

解 $$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(AB))$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

且$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，故
$$P(B)=1-P(A)=1-p$$

二、古典概型

1. 随机抽样模型

【例 1-2】 设一批零件共有 100 件，其中合格品 95 件，次品 5 件，从中任取 10 件，求：(1)10 件全是合格品的概率；(2) 恰有 2 件次品的概率。

解 (1)$P_1=\dfrac{C_{95}^{10}}{C_{100}^{10}}\approx 0.58$；(2)$P_2=\dfrac{C_5^2C_{95}^8}{C_{100}^{10}}\approx 0.07$。

2. 随机分配模型

【例 1-3】 一学生宿舍中有 6 名学生，求下列事件的概率：

(1)6 名学生的生日都在星期天；(2)6 名学生的生日都不在星期天；(3)6 名学生的生日不都在星期天。

解 设$A=\{6$ 名学生的生日都在星期天$\}$，$B=\{6$ 名学生的生日都不在星期天$\}$，

(1) 每个学生的生日可能是 7 天中的任意一天，且等可能，于是样本空间的基本事件的总数是 7^6，故 $P(A)=\dfrac{1}{7^6}$；

(2) 每个学生的生日可能是星期一至星期六中的任意一天，且等可能，于是事件B的基本事件的总数是 6^6，故 $P(B)=\dfrac{6^6}{7^6}=\left(\dfrac{6}{7}\right)^6$；

(3) 所求概率为：$P(\overline{A})=1-\dfrac{1}{7^6}$。

3. 德 · 梅尔问题

【例 1-4】 在不超过 100 的自然数中任取一个数，则它既不能被 2 也不能被 5 整除的概率为多少？

解 设$A=\{$取到的数能被2整除$\}$，$B=\{$取到的数能被5整除$\}$，由于$\frac{100}{2}=50$，$\frac{100}{5}=20$，$\frac{100}{10}=10$，则

$$P(A)=\frac{50}{100},P(B)=\frac{20}{100},P(AB)=\frac{10}{100}$$

所求的概率为
$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-(P(A)+P(B)-P(AB))\\&=1-(0.5+0.2-0.1)=0.4\end{aligned}$$

三、条件概率和乘法定理

【例1-5】 在100个圆柱形零件中有95件长度合格，有93件直径合格，有90件两个指标都合格。从中任取一件，求在长度合格的前提下，直径也合格的概率。

解 设$A=\{$任取一件，长度合格$\}$，$B=\{$任取一件，直径合格$\}$，则$AB=\{$任取一件，长度、直径都合格$\}$，$P(A)=0.95$，$P(B)=0.93$，$P(AB)=0.9$，所求概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.9}{0.95}=\frac{18}{19}$$

【例1-6】 袋中有一个红球和一个白球，从中随机取出一个球，如果取出的球是红球，则把此球放回袋中，并加进一个红球，然后从袋中再取出一个球，如还是红球则仍把此红球放回袋中并加进一个红球，如此反复进行，直到取出白球为止，求第n次才取出白球的概率。

解 设$A_k=\{$第k次摸出红球$\}$，$k=1,2,\cdots,n$。

$$P(A_1)=\frac{1}{2},P(A_2\mid A_1)=\frac{2}{3},\cdots,P(A_{n-1}\mid A_1\cdots A_{n-2})=\frac{n-1}{n}$$

$$P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1})=\frac{n}{n+1},P(\overline{A_n}\mid A_1\cdots A_{n-1})=\frac{1}{n+1}$$

故第n次才摸出白球的概率为

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\cdots A_{n-1}\overline{A_n})&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_{n-1}\mid A_1\cdots A_{n-2})P(\overline{A_n}\mid A_1\cdots A_{n-1})\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

四、全概率和贝叶斯公式

【例1-7】 已知男性中有5%是色盲患者，女性中有0.25%是色盲患者。今从男女人数相等的人群中随机挑选一人，(1) 问此人是色盲患者的概率；(2) 若已知挑选的人恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少。

解 设B_1，B_2分别表示“男性”、“女性”；$A=\{$选到的人是色盲患者$\}$

$$(1)P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(B_i)P(A\mid B_i)=0.5\times0.05+0.5\times0.0025=0.02625$$

$$(2)P(B_1\mid A)=\frac{P(B_1)P(A\mid B_1)}{P(A)}=\frac{0.5\times0.05}{0.02625}=\frac{20}{21}$$

五、独立性

【例 1-8】 加工某一零件需经过四道工序，设第一、二、三、四道工序的次品率分别为 0.02，0.03，0.05 和 0.03。假设各道工序互不影响，求加工出来的零件的次品率。

解 设 $A_i=\{$第 i 道工序出次品$\}$，$i=1,2,3,4$；$A=\{$零件为次品$\}$，从而

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4})\\&=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)\\&=1-(1-P(A_1))(1-P(A_2))(1-P(A_3))(1-P(A_4))\\&=1-0.98\times0.97\times0.95\times0.97\\&=0.124\end{aligned}$$

六、伯努利概型

【例 1-9】 一袋中装有 10 个球，其中 3 个黑球 7 个白球，每次从中任取一球，取后放回。(1) 如果共取 10 次，求 10 次中能取到黑球的概率及 10 次中恰好取到 3 次黑球的概率；(2) 如果未取到黑球就一直取下去，直到取到黑球为止，求恰好要取 3 次的概率。

解 (1) 这是一个 10 次独立重复伯努利试验。

设 $A=\{$取到黑球$\}$，则在每次试验中事件 A 发生的概率为 $P(A)=\frac{3}{10}$，$A_k=\{10$ 次试验中恰好取到 k 次黑球$\}$，则

$$P(A_k)=C_{10}^{k}\left(\frac{3}{10}\right)^{k}\left(\frac{7}{10}\right)^{10-k},\ k=1,2,\cdots,10$$

$B=\{10$ 次试验中能取到黑球$\}$，10 次中能取到黑球的概率为

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(A_0)=1-C_{10}^{0}\left(\frac{3}{10}\right)^{0}\left(\frac{7}{10}\right)^{10}=1-\left(\frac{7}{10}\right)^{10}$$

10 次中恰好取到 3 次黑球的概率为 $P(A_3)=C_{10}^{3}\left(\frac{3}{10}\right)^{3}\left(\frac{7}{10}\right)^{7}$。

(2) 设 $A_k=\{$未取到黑球就一直取下去，直到第 k 次取到黑球为止$\}$，则

$$P(A_k)=\left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}\left(\frac{3}{10}\right),k=0,1,2,\cdots,10$$

恰好要取 3 次取到黑球为止的概率为 $P(A_3)=\left(\frac{7}{10}\right)^{2}\left(\frac{3}{10}\right)$。

教材习题同步解析

1. 设 A、B、C 是 3 个随机事件，用事件 A、B、C 及其关系和运算表示下列事件：

(1) 恰有 A 发生；(2)A 和 B 都发生而 C 不发生；(3)A、B、C 都发生；(4)A、B、C 至少有 1 个发生；(5) 至少有两个事件发生；(6) 恰有 1 个事件发生；(7) 恰有 2 个事件发生；(8) 不多于 1 个事件发生；(9) 不多于 2 个事件发生；(10)3 个事件都不发生。

解　利用事件之间的运算与关系

(1)$A\overline{B}\,\overline{C}$；　(2)$AB\overline{C}$；　(3)$ABC$；　(4)$A\cup B\cup C$；

(5)$ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$(或 $AB\cup BC\cup AC$)；

(6)$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

(7)$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；　(8)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

(9)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$(或$\overline{ABC}$)；

(10)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$。

---

2. 设 A、B 是两事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，问：

(1) 在什么条件下，$P(AB)$ 取得最大值，最大值是多少？

(2) 在什么条件下，$P(AB)$ 取得最小值，最小值是多少？

解　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，即

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

(1) 当 $P(A\cup B)$ 最小时，$P(AB)$ 取得最大值，而 $A\subset B$ 时，即 $A\cup B=B$ 时，$P(A\cup B)$ 最小，则 $P(A\cup B)=P(B)=0.7$，此时，

$$P(AB)=P(A)=0.6$$

(2) 当 $P(A\cup B)$ 最大时，$P(AB)$ 取得最小值，当 $A\cup B=S$ 时，$P(A\cup B)$ 最大，则 $P(A\cup B)=1$，此时，

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.6+0.7-1=0.3$$

---

3. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=\dfrac{1}{6}$，$P(AC)=P(BC)=0$，求 A，B，C 均不发生的概率。

解　利用德·摩根律、对立事件的概率和概率的加法公式，有

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-\\&\quad P(AC)+P(ABC)]=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

4. 设 A,B 是两事件，已知 $P(A)=p,P(B)=q,P(A\cup B)=r$，求 $P(A\overline{B})$。

解　利用事件的加法和减法公式，有

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=p+q-r$$
$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=r-q$$

---

5. 在一标准英语字典中有 55 个由两个不同的字母组成的单词，若从 26 个英文字母中任取两个字母予以排列，求能排成上述单词的概率。

解　所有可能的结果有 P_{26}^2 种，由古典概型可得 $P=\dfrac{55}{P_{26}^2}=\dfrac{11}{130}$。

---

6. 在 1500 个产品中，有 400 个次品，1100 个正品，任取 200 个：(1) 求恰有 90 个次品的概率；(2) 求至少有 2 个次品的概率。

解　利用古典概型的无放回抽样模型，有

(1)$P=\dfrac{C_{400}^{90}\cdot C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}$；(2)$P=1-\dfrac{C_{400}^{0}\cdot C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}}-\dfrac{C_{400}^{1}\cdot C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$。

---

7. 袋中有 a 个黑球，b 个白球，现将球随机地一个个摸出来，求第 k 次摸出的球是黑球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$)。

解　将 $a+b$ 个球编号，把球依摸出的先后次序排列，则样本点总数就是 $a+b$ 个相异元素的全排列 $(a+b)!$。

设 $A_k=\{$第 k 次摸出黑球$\}$，这相当于在第 k 个位置放一个黑球，在其余 $(a+b-1)$ 个位置上放另外 $(a+b-1)$ 个球，所以，A_k 包含的样本点数为 $a(a+b-1)!$，所以，由古典概型 A_k 的概率为

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b},1\leqslant k\leqslant a+b$$

---

8. 有 n 个不同的球，每个球都以同样的概率 $\dfrac{1}{N}$ 被投到 $N(n\leqslant N)$ 个箱子中，试求下列事件的概率：(1) 某指定 n 个箱子中各有一个球的概率 $P(A)$；(2) 恰有 n 个箱子，其中各有一个球的概率 $P(B)$；(3) 某指定箱子中恰有 $m(m\leqslant n)$ 个球的概率 $P(C)$。

解　将 n 个不同的球，投到 N 个箱子去，共有 N^n 种投法。

(1) 将 n 个不同的球，在某指定 n 个箱子中各投一个，共有 $n!$ 种投法，故 $P(A)=\dfrac{n!}{N^n}$。

(2) 在 N 个箱子中选 n 个箱子，共有 C_N^n 种方法，故将 n 个不同的球恰在 n 个箱子中各投一个，共有 $n!C_N^n$ 种投法，则 $P(B)=\dfrac{n!C_N^n}{N^n}$。

(3) 在 n 个不同的球中选 m 个球，共有 C_n^m 种选法，而其余的 $n-m$ 个球可任意的投在 $N-1$ 个箱子中，共有 $(N-1)^{(n-m)}$ 投法，所以 $P(C)=\dfrac{C_n^m(N-1)^{(n-m)}}{N^n}$。

9. 在 $1\sim2000$ 的整数中随机地取 1 个数，问取到的整数既不能被 6 整除，又不能被 8 整除的概率是多少？

解 利用德·摩根律、对立事件的概率、加法公式。设 $A=\{$取到的数能被 6 整除$\}$，$B=\{$取到的数能被 8 整除$\}$，则有

$$P(A)=\frac{333}{2000},\quad P(B)=\frac{250}{2000},\quad P(AB)=\frac{83}{2000}$$

则所求概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(AB))$$
$$=1-\left(\frac{333}{2000}+\frac{250}{2000}-\frac{83}{2000}\right)=\frac{3}{4}$$

10. 已知 $P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，求 $P(B\mid A\cup\overline{B})$。

解 利用概率减法、对立事件概率和条件概率，有 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$，则

$$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.5=0.2$$
$$P(B\mid A\cup\overline{B})=\frac{P(B\cap(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$$
$$=\frac{0.2}{0.7+0.6-0.5}=0.25$$

11. 以往资料表明，某三口之家患某种传染病的概率有以下规律：$P\{$孩子得病$\}=0.6$，$P\{$母亲得病$\mid$孩子得病$\}=0.5$，$P\{$父亲得病$\mid$母亲及孩子得病$\}=0.4$，求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率。

解 利用乘法定理和对立事件的概率。设 $A=\{$孩子得病$\}$，$B=\{$母亲得病$\}$，$C=\{$父亲得病$\}$，已知 $P(A)=0.6$，$P(B\mid A)=0.5$，$P(C\mid AB)=0.4$，所求概率为

$$P(AB\overline{C})=P(\overline{C}\mid AB)P(AB)=P(\overline{C}\mid AB)P(B\mid A)P(A)$$
$$=(1-0.4)\times0.5\times0.6=0.18$$

12. 已知在 10 只产品中有 2 只次品，在其中取 2 次，每次任取 1 只，作无放回抽样，求下列事件的概率：(1)2 只都是正品；(2)1 只是正品，1 只是次品；(3) 第二次取出的是次品。

解 利用古典概型无放回抽样的情况，有

(1)$P_1=\dfrac{C_8^2}{C_{10}^2}=\dfrac{28}{45}$；　(2)$P_2=\dfrac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^2}=\dfrac{16}{45}$；