同济大学应用数学系主编《高等数学》
（第五版）同步习题集

九章丛书

同济 五版

高等数学习题集

编写 九章系列课题组
主编 苏志平

北京工商出版社

高等数学习题集

（同济·五版）

主编　苏志平
编写　九章系列课题组

北京工商出版社

熊尚荷
2004.9.11

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题集(同济·五版)/苏志平主编.—北京工商出版社 2004.8
ISBN 7-80012-688-9

Ⅰ.高...Ⅱ.苏 ...Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.H319.6
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 016866 号

【内容简介】 本书是为了配合由高等教育出版社出版的同济大学应用数学系主编《高等数学》(第五版)上、下册的教材而编写的辅导用书。

本书对教材中各章的重点、难点做了较深刻的分析,对各章习题做了全面系统的归类。并且给出了详细的答案。本书将是高等学校研究生、本科生的重要参考书,也是教师的参考书。并可作为自学者的辅导书。

高等数学习题集(同济·五版)

苏志平 主编

出版发行:北京工商出版社
地　　址:北京市丰台区夏家胡同 268 号
邮　　编:100071
经　　销:全国各地新华书店
印　　刷:北京廊坊华星印刷厂
开　　本:850mm×1168mm 1/32
印　　张:21
字　　数:456 千字
版　　次:2004 年 8 月第 1 版
印　　次:2004 年 8 月第 1 次印刷
印　　数:1~5000
书　　号:ISBN 7-80012-688-9/F·332

前　言

同济大学数学教研室主编的《高等数学》是一套受读者欢迎并多次获奖的优秀教材，被全国许多院校采用，为满足在校学生学习中经常遇到的记公式难、题型乱的要求，我九章系列课题组，精心编写了同济·五版《高等数学习题集》。

本书是为了满足学生们在学习中的需要，辅导学生们更好的学习高等数学，而编写的辅导教科书，对学生所学的《高等数学》知识系统归纳总结，实例进行剖析、深化，对知识内容进行融会贯通，本书的内容覆盖了现行理工类院校《高等数学》的全部内容，内容丰富、习题详实、分析透彻、富于启发、文字简明、与教材紧密衔接，是课堂教学的补充和提高，但又不超出基本要求。

本书侧重于教材内容间的联系，而不是孤立知识点的考查，还侧重于习题思路的讲解、方法和技巧的培养，以提高读者灵活的分析和解决《高等数学》问题的能力，本书函盖了《高等数学》的所有知识点，从基本知识入手，即介绍了处理数学问题的基本方法，又突出了主要技巧希望同学们读此书时边读边思考，自己动手，此书定会使读者收到事半功倍的效果。

本书可供大专院校电大、职大、夜大等广大学生及即将参加硕士研究生入学考试的学生用书，即适合读者自学也适合复习巩固，本书由于编者水平有限，书中错误之处在所难免，恳切希望同行和广大读者批评指证。

编　者

2004 年 8 月

目　录

第一章　函数与极限

第一节　函数

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$ 的定义域为　(D)

   A. $x\in R$,但 $x\neq 0$

   B. $x\in R$,但 $x\neq -1$

   C. $x\in R$,但 $x\neq 0,x\neq -1$

   D. $x\in R$,但 $x\neq -1,x\neq -2$

2. 若 $y=f(x)$ 的定义域为$[-2,2]$,则 $y=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为(　),其中 $0<a<2$　(B)

   A. $[2-a,a-2]$　　B. $[a-2,2-a]$

   C. $[a-2,a+2]$　　D. $[-2-a,a+2]$

3. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的较形对称于直线　(C)

   A. $y=0$　B. $x=0$　C. $y=x$　D. $y=-x$

4. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的在同一坐标系中的图形　(D)

   A. 关于直线 $y=x$ 对称　B. 关于直线 $y=0$ 对称

   C. 关于直线 $x=0$ 对称　D. 完全一样

5. 设 $y=f(x)$ 的定义域和值域均为 R,且 $f(x)$ 有反函数,若 $y=f(x)$ 为奇函数,则 $y=f^{-1}(x)$ 是　(A)

   A. 奇函数　　B. 偶函数

   C. 非奇非偶函数　　D. 既是奇函数也是偶函数

6. 设函数 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，则复合函数(　) 是奇函数 (A)

A. $f[f(x)]$　　B. $g[g(x)]$

C. $f[g(x)]$　　D. $g[f(x)]$

7. 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, x\leqslant 0\\ x+2, x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^2, x<0\\ -x, x\geqslant 0\end{cases}$，则 $f[g(x)]=$ (D)

A. $\begin{cases}1-x^2, x>0\\ 2+x, x\leqslant 0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}1-x^2, x<0\\ 2-x, x\geqslant 0\end{cases}$

C. $\begin{cases}x^2+2, x<0\\ 1-x, x\geqslant 0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x^2+2, x<0\\ 1+x, x\geqslant 0\end{cases}$

8. 设 $f(x)=\dfrac{\sin(x+1)}{x^2+1}, x\in(-\infty,\infty)$，则此函数是 (C)

A. 奇函数　B. 偶函数　C. 有界函数　D. 周期函数

9. 下列函数中，是奇函数的 (A)

A. $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

B. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$

C. $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt{(1+x)^2}$

D. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}(x>0)$

10. 设 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$，$g(x)=\begin{cases}1, x<10\\ 5, x>10\end{cases}$，则 $g(x)=$ (B)

A. $2f(x-10)-3$　　B. $2f(x-10)+3$

C. $f(x-10)-3$　　D. $f(x-10)+3$

11. 下列函数中为奇函数的是 (A)

A. $y=x^2\tan(\sin x)$　　B. $y=x^2\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$

C. $\cos(\arctan x)$　　D. $y=\sqrt{2^x-2^{-x}}$

12. 下列函数中(其中$[x]$表示不超过x的最大整数),非周期函数是　(D)

A. $y = \sin x + \cos \pi x$　　B. $y = \sin \sqrt[2]{2x}$

C. $y = a + \cos bx$　　D. $y = 2x - [x]$

13. $f(x) = (\cos 3x)^2$ 在其定义域$(-\infty, +\infty)$上是　(B)

A. 最小周期为3π的周期函数

B. 最小周期为$\frac{\pi}{3}$的周期函数

C. 最小周期为$\frac{2\pi}{3}$的周期函数

D. 非周期函数

14. 关于函数$y = -\frac{1}{x}$的单调性的正确判断是　(D)

A. 当$x \neq 0$时,$y = -\frac{1}{x}$单调增

B. 当$x \neq 0$时,$y = -\frac{1}{x}$单调减

C. 当$x < 0$时,$y = -\frac{1}{x}$单调减

D. 当$x > 0$时,$y = -\frac{1}{x}$单调增

15. 设$f(x) = x|x|, x \in (-\infty, +\infty)$,则$f(x)$　(B)

A. 在$(-\infty, +\infty)$单调减

B. 在$(-\infty, +\infty)$单调增

C. 在$(-\infty, 0)$单调增,在$(0, +\infty)$单调减

D. 在$(-\infty, 0)$单调减,在$(0, +\infty)$单调增

二、填空题

1. 设$f(x)$的定义域是$(0,1)$,则$f\sqrt{(1-x^2)}$的定义域是______.　$(-1,0) \cup (0,1)$

2. 设$f(x) = \arcsin\sqrt{2-x}$,则$f(x)$的定义域用区间表示为

______. [1,2]

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\sin(x+4)}}$ 的定义域用区间表示为______. $(-3,+\infty)$

4. 设 $f(x)=\ln x,\varphi(x)=\arcsin x$,则 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是______. $(0,1]$

5. 函数 $y=\begin{cases}x, x<1\\ x^3, 1\leqslant x\leqslant 2\\ 4^x, x>2\end{cases}$ 的反函数是______.

$\left(y=\begin{cases}x, x<1\\ \sqrt[3]{x}, 1\leqslant x\leqslant 8\\ \log_4 x, x>16\end{cases}\right)$

6. 已知 $f(x+1)=-x^2+2x+4$,则 $f(x)=$______. $(-x^2+4x+1)$

7. 若 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$,则 $f[f(x)]=$______,$f\{f[f(x)]\}=$______. $\left(\dfrac{x-1}{2-x},\dfrac{2-x}{2x-3}\right)$

8. 当 a,b,c,d 满足______时,函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$ 与其反函数相同. ($a+d=0$ 或者 $b=c=0$ 且 $a=d\neq 0$)

9. 设 $f(x)=ax+b$,则 $g(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=$______. (a)

10. 若 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3$,则 $f(x)=$______. (x^2+1)

三、计算、证明题

1. 求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$ 的定义域.

【解】 函数在$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ \sin x>0\end{cases}$时有意义,即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi\end{cases}\quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

故函数的定义域为 $D_f=[-4,-\pi]\cup(0,\pi)$

2. 函数 $f(x)=\ln e^x$ 与函数$g(x)=e^{\ln x}$ 是否表示同一函数?为什么?

【解】 不是同一函数. 因为$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,而$g(x)$的定义域是$(0,+\infty)$.

3. 设 $f(x)=\cos x$,$f(\varphi(x))=2-x^2$,求函数 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【解】 由题意可得,$2-x^2=\cos(\varphi(x))$

故　$\varphi(x)=\arccos(2-x^2)$

解不等式　$|2-x^2|\leqslant 1$

得其定义域　$\{x\mid -\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1 \text{ 或 } 1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}$

4. 证明定义在$(-l,l)$上的任何函数 $f(x)$ 都可以表示成一个偶函数和一个奇函数的和,并且表示法是唯一的.

【解】 存在性

由于　$\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(f(x)+f(-x))$

是偶函数,而

$$\Psi(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$$

是奇函数,且有

$$f(x)=\varphi(x)+\Psi(x)$$

这说明可以表示成一个偶函数一个奇函数之和.

唯一性

设 $\varphi_1(x)$ 是偶函数,$\Psi_1(x)$ 为奇函数,且也满足

$$f(x)=\varphi_1(x)+\Psi_1(x) \qquad ①$$

于是

$$f(-x)=\varphi_1(-x)+\Psi_1(-x)=\varphi_1(x)-\Psi_1(x) \qquad ②$$

由于 ①、② 两式,有

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))=\varphi(x)$$

$$\Psi_1(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))=\Psi(x)$$

所以表示法还是唯一的.

5. 设 $f(x)$ 适合 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$($a,b,c$ 均为常数),且 $|a|\neq|b|$,证明:$f(x)=-f(-x)$

【解】 交换 x 与$\frac{1}{x}$,得

$$af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx$$

与原方程联立,解得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}(\frac{ac}{x}-bcx)$$

显然满足 $f(x)=-f(-x)$

6. 求函数 $y=\frac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$ 的反函数.

【解】 对于方程 $y=\frac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$,把$\sqrt{1+4x}$ 作为一个整体解出得

$$\sqrt{1+4x}=\frac{1-y}{1+y}$$

从而

$$x=\frac{1}{4}[(\frac{1-y}{1+y})^2-1]=-\frac{y}{(1+y)^2}$$

改变变量符号,得所求反函数

$$y=-\frac{x}{(1+x)^2}$$

7. 设 $f(x)=\dfrac{e^x-e^x}{e^x+e^{-x}}$，求 $f(x)$ 的反函数 $\varphi(x)$，并指出其定义域

【解】 由 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ 得

$$e^{2x}=\frac{1+y}{1-y},x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$$

反函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，定义域 $(-1,1)$

8. 若函数 $f(x)$ 在定义域上对一切 x 均有 $f(x)=f(2a-x)=f(2b-x)$，$(a<b)$，求证：$f(x)$ 必为周期函数.

【证明】 将原式整理可得

$f(x)=f(2a-x)=f(2b-x)=f[2b-(2a-x)]=f(2b-2a+x)$

因此 $f(x)$ 是周期函数，且 $2b-2a$ 为它的周期.

9. 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$，$g(x)=\begin{cases}x,x<0\\x^2,x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

【解】 $f[g(x)]=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+|x|),x<0\\[2mm]\dfrac{1}{2}(x^2+|x^2|),x\geqslant 0\end{cases}$

即 $f(g(x))=\begin{cases}x,x<0\\x^2,x\geqslant 0\end{cases}$

同理 $g(f(x))=\begin{cases}x,x<0\\x^2,x\geqslant 0\end{cases}$

10. 在半径为 R 的球内嵌入一内接圆柱，试将圆柱的体积表示为其高的函数，并指出函数的定义域.

【解】 设圆柱的高为 h，底面积半径为 r，体积为 V(如图 1－1 所示)

则 $R^2 = r^2 + (\frac{h}{2})^2$

$\therefore r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$

$\therefore V = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4}) \cdot h$

定义域$(0,2R)$

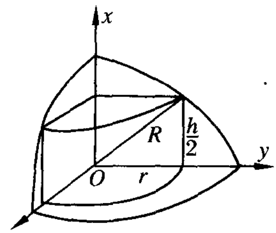

图 1－1

11. 设函数 $f(x)$ 对任意实数 x、y 满足关系式：$f(x+y) = f(x) + f(y)$

(1) 求 $f(0)$； (2) 判定函数 $f(x)$ 的奇偶性.

【解】 (1) 取 $x = y = 0$ 时，有 $f(0) = f(0) + f(0)$

故 $f(0) = 0$

(2) 取 $y = -x$，有 $f(0) = f(x) + f(-x)$

于是 $f(x) + f(-x) = 0$，即 $f(-x) = -f(x), x \in (-\infty, +\infty)$

因此 $f(x)$ 是奇函数.

12. 设 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, x \geqslant 0 \\ x^2+4, x < 0 \end{cases}$， 求 $f(x-1)$.

【解】 $f(x-1) = \begin{cases} 2(x-1)+1, & x-1 \geqslant 0 \\ (x-1)^2+4, & x-1 < 0 \end{cases}$

即 $f(x-1) = \begin{cases} 2x-1, & x \geqslant 1 \\ x^2-2x+5, & x < 1 \end{cases}$

13. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, -\infty < x < 0; \\ \sqrt{x}+1, 0 \leqslant x \leqslant 4; \\ x-1, 4 < x < +\infty. \end{cases}$ 求 $f(x)$ 的反函数 $\varphi(x)$

【解】 当 $-\infty < x < 0$ 时，$y = e^x$，即 $x = \ln y, 0 < y < 1$

当 $0 \leqslant x \leqslant 4, y = \sqrt{x} + 1$，即 $x = (y-1)^2, 1 \leqslant y \leqslant 3$

当 $4 < x < +\infty$ 时，$y = x - 1$，即 $x = y + 1, y > 3$

故得反函数 $\varphi(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 1 \\ (x-1)^2, & 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ x + 1, & 3 < x < +\infty \end{cases}$

14. 定义函数 $I(x)$ 表示不超过 x 的最大整数叫做 x 的取整函数，试判下 $\varphi(x) = x - I(x)$ 的周期性.

【解】 任取 $x \in R$，若 $n \leqslant x < n + 1$

则 $I(x) = n, \varphi(x) = x - n$

此时 $x + 1 \in [n+1, n+2]$

$$\varphi(x+1) = -I(x+1) + x + 1 = -(n+1) + x + 1$$
$$= x - n = \varphi(x)$$

故 $\varphi(x)$ 是以 1 为周期的周期函数.

15. 设 $f(x)$ 对一切实数 x_1, x_2 成立 $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$，且 $f(0) \neq 0, f(1) = a$，求 $f(0)$ 及 $f(n)$（n 为正整数）

【解】 取 $x_1 = x_2 = 0$ 代入已知式 $f(0+0) = f(0) \cdot f(0)$，$f(0) \neq 0 \quad \therefore f(0) = 1$

又 $f(1) = a, f(2) = f(1+1) = f(1)f(1) = a^2$

设 $f(k) = a^k$，则

$f(k+1) = f(k) \cdot f(1) = a^k \cdot a = a^{k+1}$

故对一切 n 有 $f(n) = a^n$

第二节　极限

一、选择题

1.(1) 数列 $\{u_n\}$ 有界是数列 $\{u_n\}$ 收敛的__B__条件，数列 $\{u_n\}$ 收敛是数列 $\{u_n\}$ 有界的__A__；

(2) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心领域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的 __B__ 条件，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心领域内有界的 __A__ 条件；

(3) $f(x)$ 在的 x_0 某一去心领域内无界是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 的 __B__ 条件，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心领域内无界的 __A__ 条件；

(4) 左极限与右极限都存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的 __C__ 条件。

A. 充分　　B. 必要

C. 充分必要　　D. 非充分非必要

2. 下列叙述不正确的是 (B)

A. 无穷大量的倒数是无穷小量

B. 无穷小量的倒数是无穷小量

C. 无穷小量与有界量的乘积是无穷小量

D. 无穷大量与无穷大量的乘积是无穷大量

3. 数列 x_n、y_n 满足 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列断言正确的是 (D)

A. 若 x_n 发散，则 y_n 必发散

B. 若 x_n 无界，则 y_n 必无界

C. 若 x_n 有界，则 y_n 必有界

D. 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小

4. 设有数列 $\{x_n\}$，其中

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & n \text{ 为奇数} \\ \dfrac{1}{n}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

则当 $n \to \infty$ 时，x_n 是 (D)

A. 无穷大量　　B. 无穷小量

C. 有界变量　　　　D. 无界变量

5. $f(x)$ 在点 x_0 处有定义是极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的　　(D)

A. 必要条件　　　　B. 充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既非必要又非充分条件

6. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则　　(A)

A. $f(x)$ 必在 x_0 的某一领域内有界

B. $f(x)$ 在 x_0 的某一领域内一定无界

C. $f(x)$ 在 x_0 的任一领域内有界

D. $f(x)$ 在 x_0 的任一领域内无界

7. 任意给定 $M > 0$,总存在着 $X > 0$,当 $x < -X$ 时,$f(x) < -M$,则　　(A)

A. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$　　　　B. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -\infty$

C. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$　　　　D. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty$

8. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$,则　　(C)

A. 当 $g(x)$ 为任意函数时,有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

B. 仅当 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ 时,才有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

C. 当 $g(x)$ 为有界时,有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

D. 仅当 $g(x)$ 为常数时,才能使 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立

9. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则下列极限一定存在的是　　(B)

A. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n$ (a 为常数)　　　　B. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|$

C. $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x)$　　　　D. $\lim\limits_{x\to x_0} \arcsin f(x)$

10. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都不存在,则　　(C)

A. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)]$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - g(x)]$ 一定都不存在