十一五

普通高等院校"十一五"规划教材

随机数学

SUIJI SHUXUE

陈萍　侯传志　冯予　编著

国防工業出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校"十一五"规划教材

随机数学

陈萍 侯传志 冯予 编著

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

随机数学是研究随机现象的现代概率论和数理统计理论的统称，包括鞅论、随机分析、Bayes 统计、统计决策理论等。本书由预备知识、随机过程、随机分析简介以及 Bayes 统计推断和统计决策概要四部分组成。本书可供高等院校非概率统计专业的研究生作为教材使用，也可供教师及工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

随机数学/陈萍，侯传志，冯予编著．—北京：国防工业出版社，2008.6

普通高等院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-118-05589-4

Ⅰ. 随… Ⅱ. ①陈…②侯…③冯… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②随机过程－高等学校－教材 Ⅳ. O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 018095 号

※

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100044）

北京诚信伟业印刷有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　印张 12¾　字数 286 千字

2008 年 6 月第 1 版第 1 次印刷　印数 1—4000 册　定价 25.00 元

国防书店：（010）68428422　发行邮购：（010）68414474

发行传真：（010）68411535　发行业务：（010）68472764

前　言

随机数学是研究随机现象的现代概率论和数理统计理论的统称，包括鞅论、随机分析、Bayes 统计、统计决策理论等。由于现代概率论和数理统计理论，尤其是随机微分方程和 Bayes 统计理论在军事、工程、经济等各个领域的应用越来越广泛和深入，非概率统计专业研究生掌握随机数学理论的需求也越来越迫切。但非概率统计专业，尤其是非数学类研究生一般都没有系统地学习过实变函数、测度论、经典统计理论等课程，现有的针对数学工作者编写的随机分析和 Bayes 统计理论类的教材就会显得起点太高，无法适应非数学类研究生学习的需要。为了让非概率统计专业研究生和科学工作者尽快掌握现代概率论和数理统计知识，针对他们需求面宽、基础知识欠缺的特点，我们编写了这本研究生随机数学教材。在内容安排上，本书以应用随机过程为主线，补充必要的预备知识，并简要介绍随机微分方程和 Bayes 统计理论。本书讲述的重点放在介绍重要概念、结论及其应用方面，一些经典理论的证明仅给出思路或提供参考书，使学生在尽可能短的时间内对随机过程、随机分析、Bayes 统计理论等实用性较强的现代概率论与数理统计理论有一个全貌的了解，以便将来在科研工作中需要时能够自寻合适的参考书和查阅文献。考虑到读者绝大多数在大学本科阶段学过概率论与数理统计课程，为节省篇幅，本书假定读者已经掌握了文献[2]的全部知识，与该书重复的内容本书不再赘述，读者可将文献[2]作为本书的入门读物。

本书由预备知识（第 1 章）、随机过程（第 2 章 ~ 第 4 章）、随机分析简介（第 5 章）和 Bayes 统计推断和统计决策概要（第 6 章）四部分组成。其中，第 1 章 ~ 第 3 章由侯传志编写，第 4 章和第 5 章由陈萍编写，第 6 章由冯予编写，全书由陈萍统稿。

随机数学的内容非常丰富，在实际中有重要应用的随机数学理论远不只限于本书提及的范围，限于篇幅也限于编者水平，缺憾在所难免，敬请指正。

编　者

2008. 3

目　录

第 1 章　测度论基础与随机过程的基本概念

概率论是从数量上研究随机现象的统计规律的一门学科。随着科学技术的不断进步,对随机现象的研究也变得越来越重要。时至今日,概率统计在现实生活的各个层面都有了广泛的应用。古典概率论是建立在排列组合和微积分的基础上的,但在古典概率论的发展过程中始终未能对一些基本的概念(如概率、事件、随机变量等)给出一个严格、统一的定义,这直接导致了诸多悖论的产生。究其根本,是由于概率论的数学基础不牢固,因此亟需为概率论奠定严格的基础。1933 年,苏联的著名数学家 Kolmogorov 对此做出了划时代的贡献,在其著作《概率论基础》中,他首次运用测度论和函数论的工具建立了概率论的公理化体系,对一些基本概念给出了严格的表述,此后概率论开始真正为众多数学家所接受,最终发展成为近代数学的重要分支。

本章以尽量少的篇幅,围绕测度论的几个重要的定理展开讨论,简要介绍测度论的基础知识,并从测度论的观点重新定义和诠释概率论中的一些基本概念及其结论,之后简要介绍随机过程的基本概念。限于篇幅,一些比较复杂的结论将述而不证,仅指出出处或讲明思路,便于有兴趣的读者进一步思考。

1.1　测度与可测函数

测度论是研究如何度量集合的理论,其基本任务就是用一个数字表示对一个抽象集合的度量。像函数的定义一样,为了建立测度,需要知道它的定义域,即集类的性质。众所周知,Lebesgue 积分(以下简称 L-积分)的基本思想是按照函数值相近来对定义域加以划分的,例如函数 $f(x)$ 的 L- 积分定义为和式

$$\sum_i y_i m(\{x \mid y_i \leqslant f(x) < y_{i+1}\})$$

的极限,这里自然要考虑集合 $\{x \mid y_i \leqslant f(x) < y_{i+1}\}$ 的可测性,也即函数 $f(x)$ 的可测性。总而言之,要建立一套类似于 L- 积分(但比 L- 积分更广泛)的理论,就必须要定义集类、测度、集合与函数的可测性等。

1.1.1　集合

集合是现代数学中最基本的概念之一,类似于几何中的点、线、面,我们不能对其进行精确定义,只能描述其含义,即任何可以彼此区别的事物便构成一个集合,并用大写英文字母表示。以下除非特别说明,常在一个指定的非空集合中讨论问题,一般称这个集合为空间。

假定读者已具备初等的集合论知识,下面给出集合论中常用的一些记号,也是本书一

直沿用的符号。

Ω:全空间;

ϕ:空集;

$\#(A)$:集合 A 中元素的个数;

$\omega \in A$:元素 ω 属于集合 A;

$\omega \notin A$:元素 ω 不属于集合 A;

$A \subset B$:A 是 B 的子集;

$A \subsetneqq B$:A 是 B 的真子集;

$A \cup B$:A 与 B 的并集,即 $A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A$ 或 $\omega \in B\}$;

$A \cap B$(或 AB):A 与 B 的交集,即 $A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A$ 且 $\omega \in B\}$;

$A - B$:A 与 B 的差,即 $A - B = \{\omega \mid \omega \in A$ 且 $\omega \notin B\}$;

$\overline{A}$(或 A^c):集合 A 的余集,即 $\overline{A} = \Omega - A$;

$A\Delta B$:A 与 B 的对称差,即 $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$;

$\sum\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$:当 $\{A_n, n = 1,2,\cdots\}$ 为互不相容集列时,用其表示 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$;

χ_A:集合 A 的示性函数,即 $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1(\omega \in A) \\ 0(\omega \notin A)。\end{cases}$

集合的运算律:

交换律:$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$;

结合律:$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

分配律:$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

D. Morgen 律:$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

注意:上述四个运算律都可以推广到有限或可列个集合,并且都具有“对偶性”,即将每组前一个公式中的“$\cup$”与“$\cap$”互换,则得到后一公式。

定义 1.1.1 以全空间 Ω 的子集合为元素的集合称为一个集族或集类,通常用 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}$等来表示。今后若无特别的说明,都假定集族是非空的,即至少含有一个元素(可以是空集 ϕ)。

定义 1.1.2 设 $\{A_n, n = 1,2,\cdots\}$ 为一个集合序列,若对于 $\forall n, A_n \subset A_{n+1}$($A_n \supset A_{n+1}$),则称 $\{A_n, n = 1,2,\cdots\}$ 为单调递增集列(单调递减集列)。令 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$(或 $A = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$),则称 A 为集列 $\{A_n, n = 1,2,\cdots\}$ 的极限,记为 $A = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$。

类似于数列上下极限的定义,可给出一般集列的上下极限的定义。

定义 1.1.3 设 $\{A_n, n = 1,2,\cdots\}$ 为一个集合序列,称属于这个集列中无限多个集合的那些元素的组成的集合为该集列的上极限,记为 A^*,有时也记为 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup A_n$ 或 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} A_n$。即

$$A^* = \{\omega \mid \omega \text{ 属于无穷多个 } A_n, n = 1,2,\cdots\}$$

在这个集列中,称至多不属于有限多个集合的那些元素组成的集合为该集列的下极限,记

为 A_*，有时也记为 $\lim_{n\to+\infty}\inf A_n$ 或 $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$，即

$$A_* = \{\omega \mid \omega \text{ 至多不属于有限多个 } A_n, n \geqslant 1\} = \{\omega \mid \exists N(\omega), \text{当 } n > N(\omega) \text{ 时}, \omega \in A_n\}$$

下面的定理由定义和集合的运算律易得，留给读者作为练习。

定理 1.1.1 (1) $\chi_{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n}$，$\chi_{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n}$；

(2) $\overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$，$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$； (1.1.1)

(3) $(\overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n)^c = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n^c$，$(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n)^c = \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n^c$； (1.1.2)

(4) $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$。 (1.1.3)

例 1.1.1 设 A、B 为两个非空集合，令 $A_{2n-1} = A, A_{2n} = B(n = 1,2,\cdots)$，则易知 $\lim_{n\to+\infty}\sup A_n = A \cup B$，另一方面可以验证 $\lim_{n\to+\infty}\inf A_n = A \cap B$。

注意：由定理 1.1.1 可证，单调集列的极限总存在，且为上下极限，这也表明定义 1.1.2 是合理的。以下称集类对某种运算封闭，是指经过这种运算后结果仍然属于这个集类。下面给出测度论中常用的一些集类。

定义 1.1.4 设 $\mathscr{F}$ 为集类。

(1) 称 $\mathscr{F}$ 为 π 类，若满足“$\forall A,B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{F}$”。

(2) 称 $\mathscr{F}$ 为半代数，若满足

① $\phi, \Omega \in \mathscr{F}$；

② $\forall A,B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{F}$；

③ $\forall A \in \mathscr{F}$，存在 $n, A_i \in \mathscr{F}(i = 1,\cdots,n)$，使得 $\overline{A} = \sum_{i=1}^{n} A_i$。

(3) 称 $\mathscr{F}$ 为代数（或域），若满足

① $\Omega \in \mathscr{F}$；

② 若 $\forall A \in \mathscr{F}$，则 $\overline{A} \in \mathscr{F}$；

③ 任意自然数 n，$\forall A_i \in \mathscr{F}(i = 1,\cdots,n)$，有 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}$。

(4) 称 $\mathscr{F}$ 为 σ— 代数，若满足

① $\Omega \in \mathscr{F}$；

② 若 $\forall A \in \mathscr{F}$，则 $\overline{A} \in \mathscr{F}$；

③ $\forall A_i \in \mathscr{F}(i = 1,2,\cdots)$，有 $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathscr{F}$。

(5) 称 $\mathscr{F}$ 为单调类，若它对单调序列极限封闭。

(6) 称 $\mathscr{F}$ 为 λ 类，若满足

① $\Omega \in \mathscr{F}$；

② 若 $\forall A,B \in \mathscr{F}, B \subset A$ 则 $A - B \in \mathscr{F}$；

③ 设 $\{A_n, n = 1,2,\cdots\}$ 为单调递增集列，且 $A_n \in \mathscr{F}(n = 1,2,\cdots)$，则 $\lim_{n\to+\infty} A_n \in \mathscr{F}$。

由定义读者可以给出几种特殊集类之间的关系。

例 1.1.2 几个常见的集类：

(1) 称$\{\phi,\Omega\}$为最"粗"的σ—代数,而称$\sigma(\Omega)=\{\Omega$的所有子集$\}$为最"细"的σ—代数。

(2) 设$A\subset\Omega$,则$\{\Omega,A,\bar{A},\phi\}$是$\sigma$—代数。

(3) 设$\mathscr{F}_1$、$\mathscr{F}_2$都是Ω的子集组成的两个σ—代数,令$\mathscr{F}_3=\mathscr{F}_1\cap\mathscr{F}_2$,则$\mathscr{F}_3$也为$\sigma$—代数。

(4) 设Ω是实数域R,$\mathscr{B}$是由R的一切开区间(a,b)生成的σ—代数,称为Borelσ—代数,$\mathscr{B}$中的元素称为Borel集。

1.1.2 测度

在实变函数论中,Lebesgue测度是线段长度的延伸,当然也是欧氏空间中面积或体积的延伸,下面将Lebesgue测度的概念进一步推广,从而得到一般集合的度量,即测度的概念。我们的讨论在下面定义的可测空间上进行。

定义1.1.5 设$\mathscr{F}$为空间Ω的子集组成的σ—代数,则称$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间。

定义1.1.6 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间,μ为定义在$\mathscr{F}$上取非负实数$R^+=[0,+\infty]$的函数,即$\mu:\mathscr{F}\to R^+$,称μ为可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的测度,若满足:

(1) $\mu(\phi)=0$;

(2) $\{A_n,n\geqslant 1\}$为$\mathscr{F}$中互不相容的集合序列,

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{+\infty}\mu(A_i)$$

且称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间。条件(2)称为μ满足可数可加性或σ—可加性。

测度或测度空间一般分为下面几类:

(1) 称μ为有限测度,若$\mu(\Omega)<\infty$,并称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为有限测度空间。

(2) 称μ为概率测度,若$\mu(\Omega)=1$,并称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为概率空间。

(3) 称μ为σ有限测度,若存在$\mathscr{F}$中的集列$\{A_n,n\geqslant 1\}$,满足$\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n=\Omega$,且$\forall n$,$\mu(A_n)<+\infty$,此时称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为$\sigma$有限测度空间。

例1.1.3 (1) 设Ω是一非空集合,$\mathscr{F}$是Ω的子集所生成的σ—代数。令$\mu_1(A)=0$,$\forall A\in\mathscr{F}$;令$\mu_2(\phi)=0$,$\mu_2(A)=+\infty$,$\forall A\neq\phi,A\in\mathscr{F}$,则$\mu_1$、$\mu_2$都是测度,而$\mu_2$既不是有限测度,也不是$\sigma$有限测度。

(2) 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间,ω_0是固定元素,且$\omega_0\in\Omega$,令

$$\mu(A)=\begin{cases}0 & (\omega_0\notin A)\\ 1 & (\omega_0\in A)\end{cases}$$

则μ是有限测度,称为ω_0的单位测度。

(3) 设$\Omega=N$是全体自然数,$\mathscr{F}$是Ω的所有子集所成的σ—代数,令

$$\mu(A)=\begin{cases}\#(A) & (A\text{ 含有限个元素})\\ +\infty & (A\text{ 含无限个元素})\end{cases}$$

则μ是σ有限测度,不是有限测度。

(4) 设$\Omega=R$,$\mathscr{F}=\mathscr{B}$,其中$\mathscr{B}$为例1.1.2所定义的Borelσ—代数,则在$\mathscr{B}$上存在测

度μ,使得开区间的测度等于区间的长度,即若

$$A = (a,b), \mu(A) = b - a$$

称为 Lebesgue 测度。可验证μ不是有限测度,但为σ有限测度。

(5) 在可测空间$(R,\mathscr{B})$上,f是单调连续函数,则在$\mathscr{B}$上定义测度μ为$\mu(A) = f(b) - f(a)$, $\forall A = (a,b) \in \mathscr{B}$,称$\mu$为 Lebesgue-Stieltjes 测度。

定义 1.1.7 在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上,$A \in \mathscr{F}$,则称A为随机事件,简称为事件,称$P(A)$为事件A的概率。

下面给出测度的一些基本性质。

定理 1.1.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间,则μ满足:

(1) 有限可加性:设$\{A_i, i = 1,2,\cdots,n\}$为$\mathscr{F}$中互不相容的集合序列,则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \tag{1.1.4}$$

(2) 单调性:$\forall A,B \in \mathscr{F}$,且$A \subset B$,则$\mu(A) \leqslant \mu(B)$。

(3) 可减性:$\forall A,B \in \mathscr{F}$,且$A \subset B$,$\mu(B) < +\infty$,则

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$$

(4) 下(上)连续性:设$\{A_n, n = 1,2,\cdots\}$为$\mathscr{F}$中单调递增(单调递减)序列,且$A = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$,则$\lim\limits_{n\to+\infty}\mu(A_n) = \mu(A)$。

证明 令$A_{n+i} = \phi(i = 1,2,\cdots)$,由定义 1.1.6 得有限可加性。注意到$B = A \cup (B - A)$与$A \cap (B - A) = \phi$,得$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$,(2) 和(3) 得证。

设$\{A_n, n = 1,2,\cdots\}$为$\mathscr{F}$中单调递增序列,且$A = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$,不妨设$\forall n, \mu(A_n) < +\infty$,则$\mu(A_{n+1} - A_n) = \mu(A_{n+1}) - \mu(A_n)$,注意到

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cup \sum_{n=1}^{+\infty} (A_{n+1} - A_n) \tag{1.1.5}$$

从而$\mu(A) = \mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \mu(A_1) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mu(A_{n+1} - A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\mu(A_n)$,故下连续性得证。由可减性及下连续性可得上连续性。

定义 1.1.8 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间,$A \in \mathscr{F}$,若$\mu(A) = 0$,则称A为μ—零测集;若任何μ—零测集的子集都属于$\mathscr{F}$,则称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为完备测度空间。

有了测度的概念后,可以对初等概率论中的分布函数有一个新的理解。

例 1.1.4 设X为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量,令$\forall B \in \mathscr{B}(R)$,$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \mid X(\omega) \in B\})$,易证$P_X(\cdot)$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的概率测度,称为$X$的概率分布。

若取$B = (-\infty, x]$,则$F_X(x) = P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \mid X(\omega) \leqslant x\})$,此即初等概率论中随机变量的分布函数。

1.1.3 可测函数

黎曼积分的主要研究对象是连续函数,即便函数有间断点,间断点个数至多是可列

个。Lebesgue 积分是对黎曼积分的拓广，它考虑了定义在实数域上的可测函数。引入了一般抽象集合测度的概念后，为研究抽象空间 Ω 上的积分，也需要先定义 Ω 上的可测函数。

定义 1.1.9 设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 与 $(E,\mathscr{E})$ 为可测空间，f 为 Ω 到 E 中的映射，若 $\forall A \in \mathscr{E}$，满足

$$f^{-1}(A) = \{\omega \mid f(\omega) \in A\} \in \mathscr{F} \tag{1.1.6}$$

则称 f 为 $\mathscr{F}$ 可测映射，记为 $f \in \mathscr{F}/\mathscr{E}$。

若记 $f^{-1}(\mathscr{E}) = \{f^{-1}(A) \mid \forall A \in \mathscr{E}\}$，则易知

$$f \text{ 为 } \mathscr{F} \text{ 可测映射} \Leftrightarrow f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{F}$$

当映射的值空间 $(E,\mathscr{E})$ 不需要特别指出时，则简记为 $f \in \mathscr{F}$。特别地，当 $(E,\mathscr{E}) = (R^n,\mathscr{B}(R^n))$，若 $f \in \mathscr{F}$，则称 f 为可测函数，进而，若 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$，此时则称 f 为 n 维随机变量。

可以证明，可测函数有如下的等价定义：

若 $\{\omega \mid f(\omega) < a\} = f^{-1}((-\infty,a)) \in \mathscr{F}$，则称 f 为 $\mathscr{F}$ 可测函数。若 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，则称 f 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 n 维随机变量。

下面的定理给出了可测函数的一个重要刻画。

定理 1.1.3 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为测度空间，f 为 Ω 到实数域 R 的函数，$\forall a \in R$，则有以下结论等价：

$$\begin{aligned}\text{“}f \text{ 为 } \mathscr{F} \text{ 可测”} &\Leftrightarrow \{\omega \mid f(\omega) \leqslant a\} \in \mathscr{F} \Leftrightarrow \{\omega \mid f(\omega) < a\} \in \mathscr{F}\\ &\Leftrightarrow \{\omega \mid f(\omega) \geqslant a\} \in \mathscr{F} \Leftrightarrow \{\omega \mid f(\omega) > a\} \in \mathscr{F}\end{aligned}$$

证明 注意到

$$\begin{aligned}\{\omega \mid f(\omega) \leqslant a\} &= f^{-1}((-\infty,a]) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(-\infty,a+\frac{1}{n}\right)\right) = \\ &\bigcap_{n=1}^{+\infty} f^{-1}\left(-\infty,a+\frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left\{\omega \mid f(\omega) < a+\frac{1}{n}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\omega \mid f(\omega) < a\} &= f^{-1}((-\infty,a)) = \\ &f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(-\infty,a-\frac{1}{n}\right]\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left\{\omega \mid f(\omega) \leqslant a-\frac{1}{n}\right\}\end{aligned}$$

于是，$\{\omega \mid f(\omega) < a\} \in \mathscr{F}$ 与 $\{\omega \mid f(\omega) \leqslant a\} \in \mathscr{F}$ 等价，其余类似可证。

例 1.1.5 (1) 常数函数可测。

提示：设 $f(\omega) = c$，$\forall \omega \in \Omega$，则

$$\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > a\} = \begin{cases}\phi & (a \geqslant c)\\ \Omega & (a < c)\end{cases}$$

(2) 示性函数是可测函数。

(3) 在可测空间 $(R,\mathscr{B})$ 上，f 是 R 到 R 的任意连续函数，则 f 为 $\mathscr{B}$ 可测。

提示：若 f 连续，那么 $\{f(x) > a\}$ 是 R 的开集，因此可以表示为至多可列个开区间的并，从而 $\{f(x) > a\} \in \mathscr{B}$。易见，可测性的概念要比连续性的定义更广。

(4) 在可测空间 $(R,\mathscr{B})$ 上，f 是任意单调函数，则 f 为 $\mathscr{B}$ 可测。

提示：不妨设 f 是单调增函数，则 $\{f(x) > a\}$ 形如 $(b,+\infty)$ 或 $[b,+\infty)$。

因为可测函数可取 $\pm\infty$，所以规定 $\pm\infty$ 与有限数的运算规则如下($x \in R$)：

$$(\pm\infty) + x = x + (\pm\infty) = x - (\mp\infty) = \pm\infty$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty) - (\mp\infty) = \pm\infty$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty (x > 0) \\ 0(x = 0) \\ \mp\infty (x < 0) \\ \dfrac{x}{\pm\infty} = 0 \end{cases}$$

但下列的运算被认为是无意义的：

$$(\pm\infty) - (\pm\infty), (\pm\infty) + (\mp\infty), (\pm\infty)/(\pm\infty), \pm\infty/\mp\infty, x/0$$

由定义1.1.9，可测映射f的逆映射f^{-1}是$(E,\mathscr{E})$到$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$的映射，关于f^{-1}有下面的命题。

定理 1.1.4 设f为$(\Omega,\mathscr{F})$到$(E,\mathscr{E})$的可测映射，逆映射为f^{-1}。

(1) f^{-1} 与集合运算可以交换，即$f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c, \forall B \in \mathscr{E}$。

(2) $f^{-1}(\mathscr{E}) \equiv \{f^{-1}(B): \forall B \in \mathscr{E}\} \subset \mathscr{F}$为$\mathscr{F}$的子$\sigma$—代数，并且是使得$f$可测的最小$\sigma$—代数。

(3) 设$\mathscr{A}$是E上的任一集类，则$f^{-1}(\sigma(\mathscr{A})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{A}))$。

证明 (1) 由定义直接验证可得。

(2) 由(1) 和σ—代数的定义可得。

(3) 由(2) 知，$f^{-1}(\sigma(\mathscr{A}))$ 为σ—代数。注意到

$$\mathscr{A} \subset \sigma(\mathscr{A}) \Rightarrow f^{-1}(\mathscr{A}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{A})) \Rightarrow \sigma(f^{-1}(\mathscr{A})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{A}))$$

此外，令$\mathscr{G} = \{C \subset E: f^{-1}(C) \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{A}))\}$。显然，$\mathscr{A} \subset \mathscr{G}$，可证$\mathscr{G}$为$\sigma$—代数，故$\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{G}$，于是$f^{-1}(\sigma(\mathscr{A})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathscr{A}))$。

多个可测函数经简单运算后，可测性一般不会改变。

定理 1.1.5 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，函数$f, g, \{f_n, n \geq 1\}$都为Ω到R的实值可测函数，则

(1) $f \cdot g$ 为可测函数。

(2) 若$f \pm g$ 处处有意义，则$f \pm g$ 为可测函数。

(3) 若f/g 处处有意义，则f/g 为可测函数。

(4) $\inf\limits_{n\geq 1}\{f_n\}, \sup\limits_{n\geq 1}\{f_n\}, \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n, \limsup\limits_{n\to+\infty} f_n$ 为可测函数。

(5) $\{f = g\}, \{f \leq g\}$ 为可测集。

证明参见文献[17]，P29。

定义 1.1.10 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，$(E,\mathscr{E})$为可测空间，$\mathscr{H}$为Ω到E的一族映射，$f^{-1}(\mathscr{E}) = \{f^{-1}(A) \mid \forall A \in \mathscr{E}\}$，令$\mathscr{G} = \sigma\{\bigcup\limits_{f\in\mathscr{H}} f^{-1}(\mathscr{E})\}$，则$\mathscr{G}$为使$\mathscr{H}$中所有元素可测的最小$\sigma$—代数，称$\mathscr{G}$为函数族$\mathscr{H}$在$\Omega$上生成的$\sigma$—代数。特别地，若$\mathscr{H}$只含有一个函数$f$，则记$\mathscr{G} = \sigma(f) = f^{-1}(\mathscr{E})$，称为函数$f$生成的$\sigma$—代数。

下面定理给出了$\sigma(f)$ 可测函数的一个刻画。

定理 1.1.6(Doob 复合函数可测定理) 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，$(E,\mathscr{E})$为可测空

间，f、g 为 Ω 到 E 的映射，则 g 为 $\sigma(f)$ 可测的充分必要条件是存在 $h \in \mathscr{E}$，使得 $g = h \circ f$。

证明参见文献[3]，P18。

下面给出一个关于复合函数可测性更直观的一个结论。

定理 1.1.7 设 $(\Omega_i, \mathscr{F}_i)(i = 1,2,3)$ 为三个可测空间，$f: \Omega_1 \to \Omega_2$，$g: \Omega_2 \to \Omega_3$，且 $f \in \mathscr{F}_1$，$g \in \mathscr{F}_2$，则 $g \circ f: \Omega_1 \to \Omega_3$ 且为 $\mathscr{F}_1$ 可测。

证明 由定理 1.1.4 的(2)，得

$$(g \circ f)^{-1}(\mathscr{F}_3) = f^{-1}(g^{-1}(\mathscr{F}_3)) \subset f^{-1}(\mathscr{F}_2) \subset \mathscr{F}_1$$

1.1.4 单调类定理

下面讨论如何确定集合与函数的可测性。单调类定理就是验证集类为 σ— 代数或函数关于 σ— 代数可测的一组定理，其表现形式分为集合形式与函数形式两种。

1. 集合形式的单调类定理

定义 1.1.11 设 $\mathscr{F}$ 为一组运算，如果 Ω 上集类 $\mathscr{C}$ 关于 $\mathscr{F}$ 运算封闭，即 $\mathscr{C}$ 中的元素经过 $\mathscr{F}$ 运算后仍属于 $\mathscr{C}$，则称 $\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{F}$ 类；称包含 $\mathscr{C}$ 的最小 $\mathscr{F}$ 类为 $\mathscr{C}$ 生成的 $\mathscr{F}$ 类，记为 $\mathscr{F}(\mathscr{C})$。

事实上，设 $\{\mathscr{C}_i \mid i \in I\}$ 为 Ω 上一族集类，若 $\forall i \in I$，$\mathscr{C}_i$ 对某种集合运算封闭，则容易验证所有集类的交 $\bigcap_{i \in I} \mathscr{C}_i$ 对这种运算也封闭。将上面的定义运用于几种常见的集类，于是对于 Ω 上的任一非空集类 $\mathscr{C}$，存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小代数、最小 σ— 代数、最小 λ 类和最小单调类，即由 $\mathscr{C}$ 生成的代数、σ— 代数、λ 类和单调类，分别记为 $\mathscr{F}(\mathscr{C})$，$\sigma(\mathscr{C})$，$\lambda(\mathscr{C})$，$m(\mathscr{C})$。显然，有

$$m(\mathscr{C}) \subset \lambda(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}(\mathscr{C})$$

寻求使得 $m(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$、$\lambda(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$ 的条件即为单调类定理。下面的结论为单调类定理的引理。

定理 1.1.8 (1) 若 $\mathscr{U}$ 是代数也是单调类，则 $\sigma(\mathscr{U}) = \mathscr{U}$。

(2) 若 $\mathscr{U}$ 既是 π 类，又是 λ 类，则 $\mathscr{U}$ 是 σ— 代数。

证明甚易，留作练习。

定理 1.1.9(集合形式的单调类定理)

(1) 设 $\mathscr{C}$ 为代数，则 $m(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$；若单调类 $\mathscr{U} \supset \mathscr{C}$，则 $\mathscr{U} \supset \sigma(\mathscr{C})$。

(2) 设 $\mathscr{C}$ 为 π 类，则 $\lambda(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$；若 $\mathscr{U}$ 为 λ 类，且 $\mathscr{U} \supset \mathscr{C}$，则 $\mathscr{U} \supset \sigma(\mathscr{C})$。

证明参见文献[17]，P6。

单调类定理是测度论中的重要证明工具，它的一般用法如下：

已知集类 $\mathscr{C}$ 具有性质 $*$，要证明 $\sigma(\mathscr{C})$ 也具有性质 $*$，令

$$\mathscr{U} = \{B: B \text{ 具有性质 } *\}$$

于是，$\mathscr{C} \subset \mathscr{U}$，由单调类定理，有

(1) 若 $\mathscr{C}$ 为代数，只要证 $\mathscr{U}$ 为单调类。

(2) 若 $\mathscr{C}$ 为 π 类，只要证 $\mathscr{U}$ 为 λ 类。

(3) 若 $\mathscr{C}$ 为任意集类，只要证 $\mathscr{U}$ 为 σ— 代数。

2. 函数形式的单调类定理

先讨论可测函数的构造。

定义 1.1.12 设$\{A_i, i=1,2,\cdots,n\}$为Ω的划分，即$\{A_i, i=1,2,\cdots,n\}$为互不相容的集合序列，且$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega, a_i \in R(i=1,2,\cdots,n)$，则称$f(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(\cdot)$为简单函数。

显然，示性函数与简单函数都是可测函数。

定理 1.1.10(函数形式的单调类定理) 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间，f为可测函数，则

(1) 存在简单可测函数列$\{f_n, n\geqslant 1\}$，使得对$\forall n\geqslant 1$，有$|f_n|\leqslant|f|$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$；

(2) 若f非负，则存在非负递增简单可测函数列$\{f_n, n\geqslant 1\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$。

证明 注意到$f=f^+ - f^-$，其中$f^+ = f\vee 0, f^- = -f\vee 0$，于是(1)可由(2)推得。而对于(2)，令

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\chi_{\{k/2^n\leqslant f<(k+1)/2^n\}} + n\chi_{\{f\geqslant n\}} \tag{1.1.7}$$

则$\{f_n, n\geqslant 1\}$为非负单调递增简单可测函数，易证$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$。

定理 1.1.10 给出了可测函数的构造方法，其使用方法一般是：

需要证明可测函数f满足性质 * 时，先证明当f为示性函数时结论成立，然后证明为f简单函数时结论成立，于是得到结论对于f为非负可测函数成立，最后由公式$f=f^+ - f^-$得到当f为一般可测函数时也成立。该方法称为“典型方法”，在测度论中占有极其重要的地位，很多表面繁杂的结论，采用这种方法都可以得到简单的证明。

下面给出的函数形式的单调类定理是它的简单推论。

定理 1.1.11 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间，集类$\mathscr{C}$满足$\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}$，令$\mathscr{H}$为$\Omega$上的一族非负实值函数，若满足：

(1) $\forall A\in\mathscr{C}, \chi_A\in\mathscr{H}$；

(2) $\forall f,g\in\mathscr{H}, \alpha,\beta>0$，则$\alpha f+\beta g\in\mathscr{H}$；

(3) 若$\forall f_n\in\mathscr{H}, f_n\uparrow f$，且$f$有限或$f_n\downarrow f$，则$f\in\mathscr{H}$；

则$\mathscr{H}$包含Ω上的所有非负实值$\mathscr{F}$可测函数。

证明 令$\mathscr{U}=\{B:\chi_B\in\mathscr{H}\}$，则$\mathscr{U}$为$\lambda$类，由集合形式单调类定理即得。

下面的定理是函数形式单调类定理的应用，并给出了$\sigma(f)$可测函数的刻画。

定理 1.1.12(复合函数可测性定理的逆命题) 设$(E,\mathscr{E})$为可测空间，$f:\Omega\to E$，若$\varphi:\Omega\to R$关于$\sigma(f)$可测，则存在关于$\mathscr{E}$的可测函数$g:E\to R$，使得$\varphi=g\circ f$，且若φ有界，g可取为有界函数。

证明参见文献[17]，P31。

1.1.5 测度的扩张

通过前面的学习知道，由一个随机变量X可以诱导出R上的概率测度，也即它的概率分布函数，由此可以得出X在任一区间中取值的概率，但要求出X在R的任一集合中取值的概率似乎并不容易。对于一般的测度，也会遇到同样的问题，即已知测度在集类$\mathscr{C}$上的值，如何将其扩大到更大的集类上去?测度扩张定理回答了这一类问题。

定理 1.1.13 设μ是半代数$\mathscr{C}$上的测度，则在$\mathscr{F}(\mathscr{C})$上存在唯一的扩张$\tilde{\mu}$，其中$\tilde{\mu}$定