现代数学基础丛书 120

数组合地图论

（第二版）

刘彦佩 著

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书 120

数组合地图论

（第二版）

刘彦佩 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书在第一版的基础上，除删去多余的部分和替代改进的结果外，主要增添了新的有关地图在一般曲面(平面只是一个特例)上的内容. 例如，Euler 地图和无割边地图在曲面上的节点剖分泛函方程；无割边地图在曲面上依根点次与棱数为参数的计数方程与计数公式；曲面上无环根地图以度为参数的计数；曲面上不可定向地图的计数方程；在曲面上双不可分离地图色和函数所满足的方程；曲面上双不可分离地图梵和函数所满足的方程；甚至还提供了泛花在曲面上以亏格为参数的无和显式等. 由于所用方法的普遍性，这些结果可以想见为地图在曲面上的宽厚研究构建一种理论基础.

本书适合数学专业高年级大学生、研究生、教师及相关专业科研工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

数组合地图论/刘彦佩著. —2 版. —北京：科学出版社，2008

(现代数学基础丛书；120)

ISBN 978-7-03-021272-6

I. 数… II. 刘… III. ① 组合数学 ② 图论 IV. O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 030553 号

责任编辑：刘嘉善 张 扬 / 责任校对：钟 洋
责任印制：赵德静 / 封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 11 月第 一 版　　开本：B5(720 × 1000)
2008 年 3 月第 二 版　　印张：26 1/4
2008 年 3 月第一次印刷　　字数：495 000
印数：1—3 000

定价：78.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

第二版序

本书在第一版的基础上，主要充实曲面上的地图，以及一些以亏格作为参数的计数. 虽然用作者近年来所发现的曲面嵌入联树表示法于地图，并将之与图的曲面嵌入理论融为一体，考虑到本书强调的乃是有关计数理论，只是间接地简化一系列的结果，以使之比初版更易于阅读.

从数学的观点看，经过第一版后的 6 年来，作者以及他指导的博士研究生的工作，表明书中所重点阐述的带根平面地图的计数理论，已经开辟无根的以及一般曲面上地图计数理论. 地图按自同构群的阶，以及依亏格的分布，色和乃至梵和，地图着色问题尤其是四色问题等，将成为继后至少半个世纪的研究方向. 特别是从中揭示的一批带一个线性泛函的方程今后的一个世纪也许实难全部得到解决.

第二版所充实的地图在曲面上的计数主要是延续作者本人在另外的专著，例如，在《组合地图进阶》(北方交通大学出版社, 2003) 以及《地图的代数原理》(高等教育出版社, 2006) 中所发现以致完善的对一般地图在曲面上的计数，为诸如 Euler 地图、不可分离地图、无环地图、无割棱地图等在曲面上的节点剖分泛函方程，以及色和与梵和等方面的宽厚研究提供了理论基础.

虽然章节与第一版基本相同，但是主要有如下的删增：

1. 在 §1.3 和 §1.6 中，增加计数函数变换的三个新定理，即定理 1.3.5、定理 1.6.3 和定理 1.6.4. 它们都广泛地应用于缩减推导过程. 删去了 §1.7 中一些虽然启示将来的利用而在本书却未曾用过的公式.

2. 在第 2 章中，增添了 §2.3 讨论双边缘内根地图和 §2.4 将泛 Halin 地图拓广到泛花，也得到了以亏格为参数的无和计数显式. 用最新揭示的完全初等方法，不用拉格朗日反演以及无限维矩阵，而是直接通过多边形的分类也可讨论树依节点剖分的计数.

3. 虽然第 3 章也可全面翻新，不再用那里的递推与矩阵的方法，而是基于上面提到的结果直接地推导出来. 不过考虑到本书的整体性，仍保持原貌.

4. 在 §4.4 和 §4.5 的基础上，将小亏格曲面上的新进展纳入有关的注记.

5. 在 §5.3 中单独地，而不是借助于无分离三角形的三角化，提供了 3-正则 c-网的无和显式.

6. 增加 §6.5 曲面上 Euler 地图一节. 给出了曲面上的节点剖分计数泛函方程. 在此基础上即可导出有关的计数结果，以及建立曲面上各种类型地图的节点剖分计数泛函方程.

7. 增添 §7.5 以提供在曲面上无割棱根地图的依节点剖分的泛函方程. 同时, 也提供了在曲面上可定向无割棱地图的节点剖分泛函方程和以根点次与棱数为参数的计数方程与计数公式.

8. 将 §8.1 和 §8.2 合并为 §8.1. 增添 §8.4 讨论曲面上无环根地图以度为参数的计数.

9. 在 §9.5 中, 删去多余部分提供单顶点地图可定向与不可定向的无和显式. 特别是第一次给出确定曲面上不可定向单顶点根地图的计数方程 (9.5.22) 简式.

10. 增加 §10.6 曲面上的色和一节. 得到了在曲面上双不可分离地图色和函数所满足的方程. 为确定有关的色和以及相应的计数奠定了基础. 在 §10.7 中还提到了小亏格曲面上色和的一些新进展.

11. 增加 §11.5 曲面上的梵和一节. 得到了在曲面上双不可分离地图梵和函数所满足的方程. 为确定有关的梵和以及相应的计数打下了基础. 在 §11.5 中还提到梵和的一些新进展.

12. 将第 12 和 13 章只作了文字上的简化, 使得更便于阅读.

另外, 增加一个曲面上小阶地图依亏格的列表作为附录. 这样的列表, 完全是利用作者新近完成的研究结果得到的. 无根的情形则是利用地图的代数原理中提供确定地图自同构的算法求得. 本书中的新研究曾部分地得到国家自然科学基金 (批准号: 10571013) 资助.

刘彦佩

2008 年 3 月

于北京上园村

第一版序

组合学作为数学的一个分支主要研究数 (shǔ) 的技巧. 计数占据了组合学的基础. 不仅在数学本身, 而且在其他学科中, 均会有广泛的应用. 用一本书全面反映与此有关的深入发展是远不够的. 本专著只是试图为与组合地图计数有关的那些课题, 提供一个统一的理论模式. 同时, 也提供了一系列为数 (shǔ) 各类组合地图的简洁公式.

对于数 (shǔ) 组合地图, 首先要了解的是地图的对称性. 也就是说, 要知道它们的自同构群. 一般而言, 这是一个有意义的、复杂的和困难的问题. 为此, 第一个问题就是如何使得所讨论的地图不对称. 自 20 世纪 60 年代初, Tutte 发现在地图上定根的方式时这个问题就解决了. 它就形成了地图计数之基础. 只要对于不对称的地图可以计数, 对称情形之下的一般计数, 如果知道它的自同构群, 原则上也就可以付诸实施了. 幸好, 在作者前部专著 [Liu58] 中, 提供了求多面形自同构群的有效的算法. 而且, 多面形无非是组合地图的同义语. 然后, 面临的问题就是如何求得所要计数的一类地图的计数函数应满足的函数乃至泛函方程和如何确定这个计数函数作为幂级数的各项系数. 继之, 进而估计这种地图计数函数的渐近行为.

为了提取方程, 一个带有决定性的诀窍就是适当地将所要计数的地图集合分解为若干部分, 使每一部分均可由这个集合本身通过一些运算而产生. 通常开始于对一条预先选取边的消去与收缩. 沿此, 可以看出为了计数各种类型的地图如何构造各自不同的运算. 自然, 分解的方法与所选择的计数参数密切相关. 这里揭示了一些窍门, 以避免从分解推导方程中的不必要的复杂性.

只要函数乃至泛函方程建立起来, 剩下的问题就是发现一种适当的方式求解, 或者为澄清其解而进行变换和简化. 这里, 提供了一些直接求解这些方程的方法, 或者将它们转变成为可解之情形. 最令人回味的是设法寻找出一种方式, 使得可以适当地利用 Lagrange 反演, 确定出其解之级数形式的各项系数. 正如所望地, 依这种方式通过一系列的得当处理, 求出一批数 (shǔ) 各种地图的十分简单的公式.

不管所得到的方程是否完全可解, 总还可以估计当地图的阶充分大以至趋于无穷时, 各种地图数目的渐近值, 以及计数函数的渐近性质. 从而, 确定它们的随机行为.

正是基于上面所概括的理论想法, 全书拟由三部分组成. 第一部分, 即从第 2 章到第 9 章, 讨论地图计数的一般理论. 第二部分, 即从第 10 章到第 12 章, 为梵和特别是色和的确定. 它是一般理论的深化与扩充. 从而, 更复杂也更难. 第三部分,

仅由第 13 章组成, 讨论随机和渐近行为. 当然, 第 1 章提供了必备的一些基础知识与基本技巧. 在每章的最后均有一节注记, 追述有关历史背景、最新进展以及一些尚未解决的问题, 伴随可能的解决途径.

此书的基本框架, 源自我的英文专著 *Enumerative Theory of Maps* (Science Press and Kluwer Academic Publishers, 1999). 不过, 除第 1 章外, 几乎各章均纳入了一些新的结果. 特别是包括了新得到的最后简化的公式. 例如, 在第 2 章中除第一节外是全新的. 而且, 几乎所有结果的表述与证明方法均采取了不同的形式, 以相得益彰. 这里, 也提到了蔡俊亮, 任韩以及郝荣霞和吴发恩等的一些有关新结果.

借此机会, 我不能不对所有那些为本书出版直接或间接作出贡献的人士表示最衷心的感谢. 这一理论的发端由 Tutte 教授所创立. 他的文章与指引, 使我得以于 1982~1984 年间, 在滑铁卢大学组合学与最优化系工作时, 进入这一领域. 没有这些, 就不可能有这本专著于今问世.

还有 R Cori, P L Hammer, D M Jackson, R C Mullin, R C Read, L B Richmond, P Rosenstiehl, B Simeone, T T S Walsh, 徐明曜, 颜基义等教授给予了多方面的支持与帮助. 在写作过程中, 特别是在最后定稿时, 蔡俊亮, 常彦勋, 冯衍全, 黄元秋, S Lawrencenko, 任韩, 吴发恩等博士, 郝荣霞, 刘同印, 毛林繁, 魏二玲, 李赵祥, 何卫力, 以及付超, 薛春玲, 万良霞等部分或全部地勘校了书稿.

科学出版社的刘嘉善编审对全书做了精心编辑和认真审查.

最后, 并非次要, 加拿大滑铁卢大学组合学与最优化系, 美国罗杰斯大学的离散数学与理论计算机科学研究中心 (DIMACS) 和运筹学研究中心 (RUTCOR), 意大利罗马大学 (主校) 数学系, 统计系和计算机科学系, 法国社科高研院人文数学研究中心, 法国波尔多第一大学的数学与计算机科学系, 和美国辛辛那提大学的电子与计算机工程和计算机科学系等的热情好客, 提供了工作与讲学的机会. 特别地, 还要提到中国科学院出版基金对本书出版的支持, 以及美国国家科学基金, 意大利国家研究基金委和我国国家自然科学基金对有关项目的研究所给予的资助.

刘彦佩

2000 年 10 月

于北京上园村

目　　录

《现代数学基础丛书》序
第二版序
第一版序
第 1 章　预备知识 ······ 1
§1.1　组合地图 ······ 1
§1.2　地图多项式 ······ 6
§1.3　计数函数 ······ 13
§1.4　梵和函数 ······ 17
§1.5　Lagrange 反演 ······ 20
§1.6　阴影泛函 ······ 27
§1.7　渐近估计 ······ 31
§1.8　注记 ······ 33
第 2 章　树地图 ······ 34
§2.1　植树 ······ 34
§2.2　平面 Halin 地图 ······ 39
§2.3　双边缘内根地图 ······ 44
§2.4　曲面上的泛花 ······ 47
§2.5　注记 ······ 51
第 3 章　外平面地图 ······ 52
§3.1　冬梅地图 ······ 52
§3.2　单圈地图 ······ 59
§3.3　受限外平面地图 ······ 65
§3.4　一般外平面地图 ······ 70
§3.5　注记 ······ 76
第 4 章　三角化地图 ······ 78
§4.1　外平面三角化 ······ 78
§4.2　平面三角化 ······ 82
§4.3　三角化在圆盘上 ······ 89
§4.4　射影平面三角化 ······ 97
§4.5　环面三角化 ······ 102
§4.6　注记 ······ 106

第 5 章 三正则地图 ······ 108
§5.1 平面三正则地图 ······ 108
§5.2 二部三正则地图 ······ 113
§5.3 三正则 c-网 ······ 119
§5.4 三正则 Hamilton 地图 ······ 123
§5.5 曲面三正则地图 ······ 126
§5.6 注记 ······ 130
第 6 章 Euler 地图 ······ 132
§6.1 平面 Euler 地图 ······ 132
§6.2 Tutte 公式 ······ 136
§6.3 Euler 平面三角化 ······ 140
§6.4 正则 Euler 地图 ······ 144
§6.5 曲面上 Euler 地图 ······ 149
§6.6 注记 ······ 152
第 7 章 不可分离地图 ······ 154
§7.1 外平面不可分离地图 ······ 154
§7.2 不可分离 Euler 地图 ······ 160
§7.3 不可分离平面地图 ······ 167
§7.4 曲面不可分离地图 ······ 173
§7.5 曲面上节点剖分 ······ 177
§7.6 注记 ······ 181
第 8 章 简单地图 ······ 183
§8.1 无环地图 ······ 183
§8.2 一般简单地图 ······ 197
§8.3 简单二部地图 ······ 204
§8.4 曲面上的无环地图 ······ 210
§8.5 注记 ······ 213
第 9 章 一般地图 ······ 215
§9.1 一般平面地图 ······ 215
§9.2 平面 c-网 ······ 220
§9.3 凸多面体 ······ 227
§9.4 四角化与 c-网 ······ 233
§9.5 曲面一般地图 ······ 239
§9.6 注记 ······ 245
第 10 章 色和方程 ······ 247
§10.1 树方程 ······ 247

§10.2　外平面方程 …… 251
§10.3　一般方程 …… 257
§10.4　三角化方程 …… 262
§10.5　适定性 …… 266
§10.6　曲面上的色和 …… 271
§10.7　注记 …… 275
第 11 章　梵和方程 …… 276
§11.1　双树的梵和 …… 276
§11.2　外平面梵和 …… 280
§11.3　一般梵和 …… 284
§11.4　不可分离梵和 …… 289
§11.5　曲面上的梵和 …… 292
§11.6　注记 …… 296
第 12 章　求解色和 …… 297
§12.1　一般解 …… 297
§12.2　立方三角 …… 303
§12.3　不变量 …… 311
§12.4　四色解 …… 318
§12.5　注记 …… 323
第 13 章　随机性态 …… 325
§13.1　外平面渐近性 …… 325
§13.2　树-根地图平均 …… 330
§13.3　平均 Hamilton 圈数 …… 333
§13.4　地图的不对称性 …… 338
§13.5　方程的奇异性 …… 346
§13.6　注记 …… 350
参考文献 …… 352
附录　各种小阶地图依亏格的列表 …… 369
附录 1　环束 $B_m, m \geqslant 1$ …… 369
附录 2　轮图 $W_n, n \geqslant 4$ …… 374
附录 3　3-连通 3-正则图 $C_m, m \geqslant 6$ …… 376
术词索引(汉英对照) …… 390
术词索引(英汉对照) …… 395
《现代数学基础丛书》已出版书目

第1章 预备知识

为方便, 这里通篇采用如下的逻辑符号: $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$ 和 $\exists$ 分别表示和、积、否定、蕴意、等价、任意量和存在量. 在行文中,$(i.j.k)$(或, $i.j.k$) 意指第 i 章第 j 节的第 k 个公式 (或者定理, 引理, 推论等之类). 符号 $\natural$ 表示证明的结束.

参考文献 $[k]$ 表示指标为 k 的项. 其中, k 由该项作者 (们) 姓的前几个字母继之为数字组成. 姓氏按拼音字典序排列. 同样的作者 (们) 则用数字区别不同的文章或其他出版物.

本书原则上是自包含的. 即使有未解释的术语, 均可在 [Liu58], 也可能在 [GoJ1] 或 [Tut39] 中查到.

§1.1 组合地图

一个**组合地图**, 简称**地图**, 常记为 M, 作为数学概念可以看作在地理上出现的地图的抽象, 它被定义为在四元胞腔无公共元并集 $\mathcal{X}$ 上的一个基本置换 $\mathcal{P}$ 且满足下面的公理 1 和公理 2.

令 X 是一个有限集和 K 为由四个元素组成的 Klein 群. K 中的元素用 $1,\alpha,\beta$ 和 $\alpha\beta$ 表示. 由于 K 是群, 自然有 $\alpha^2=\beta^2=1$, $\alpha\beta=\beta\alpha$. 对任何 $x\in\mathcal{X}$, $Kx=\{x,\alpha x,\beta x,\alpha\beta x\}$ 被称为**四元胞腔**. 则

$$\mathcal{X}=\sum_{x\in X}Kx. \tag{1.1.1}$$

可见, α 和 β 均可视为 $\mathcal{X}$ 的置换. 在 $\mathcal{X}$ 上的一个置换 $\mathcal{P}$, 若对任何 $x\in\mathcal{X}$, 均不存在整数 $k>0$ 使得 $\mathcal{P}^kx=\alpha x$, 则被称为**基本的**.

公理 1 $\alpha\mathcal{P}=\mathcal{P}^{-\infty}\alpha$.

公理 2 由 $J=\{\alpha,\beta,\mathcal{P}\}$ 所生成的群 Ψ_J 在 $\mathcal{X}$ 上可迁.

由此, 记地图 $M=(\mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X),\mathcal{P})$. 由公理 1 知, α 与 β 不是对称的. 从而, 一般 $(\mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X),\mathcal{P})\neq(\mathcal{X}_{\beta,\alpha}(X),\mathcal{P})$. 有时, α 称为**第一算子** 和 β, **第二算子**. 由于 β 不一定满足公理 1, 对于地图 $M=(\mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X),\mathcal{P})$, 一般 $(\mathcal{X}_{\beta,\alpha}(X),\mathcal{P})$ 不会是地图. 因为 $\mathcal{P}$ 总可唯一地表示为循环置换的积, 它的每一个循环中元素组成的集合被称为**轨道**. 公理 1 使得在 $\mathcal{P}$ 中, 对任何 $x\in\mathcal{X}$, x 所在的轨道 $\mathrm{Orb}_{\mathcal{P}}(x)$ 与 $\mathrm{Orb}_{\mathcal{P}}(\alpha x)$ 是不同的. 称它们为相互**共轭的**. 每一个共轭的轨道对被定义为 M 的**节点**. 集合 X 和 $\mathcal{X}_{\beta,\alpha}(X)$ 分别称为 M 的**基础集**和**基本集**.

给定一个地图 $M = (\mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X),\mathcal{P})$, 可以验证 $M^* = (\mathcal{X}_{\beta,\alpha}(X),\ \mathcal{P}\alpha\beta)$ 也是一个地图. 注意, 在 M^* 中, β 为第一算子, 而 α 则是第二算子. 称 M^* 为 M 的*对偶*. 并且, M^* 的节点称为 M 的*面*. 自然, 每一个四元胞腔被称为*边*. 任何一条边 $\{x,\alpha x,\beta x,\alpha\beta x\}$ 可视为由二个*半边*$\{x,\alpha x\}$ 与 $\{\beta x,\alpha\beta x\}$(在 M 中), 或者 $\{x,\beta x\}$ 与 $\{\alpha x,\alpha\beta x\}$(在 M^* 中) 组成.

若一个图的节点和边的集合与 M 的相同, 则称它为 M 的*基准图*, 常记为 $G(M)$. 由公理 2, $G(M)$ 总是连通的. 反之, 若一个地图的节点和边的集合与一个图 G 的相同, 则称它为 G 的*准基地图*, 常记为 $M(G)$. 自然, M 为 $G(M)$ 的准基地图. 虽然一个地图只有一个基准图, 一个图一般有不止一个准基地图. 事实上, 一个图的任何一个在曲面上的嵌入均为它的准基地图. 这就可以记地图 $M = (G,F)$ 使得 $G = (V,E) = G(M)$. 其中, V, E 和 F 分别为 M 的节点, 边和面的集合. 为方便, 只有一个节点而无边也常视为一个地图, 称它为*平凡的*, 或*节点地图*. 规定它只有一个面. 若一个地图只含一条边, 则称它为*边地图*, 用 L 表示. 若边地图的边为环, 则称为*环地图*; 否则, 称为*杆地图*. 可见, 有两个环地图. 它们分别为 $L_1 = (\mathcal{X},(x,\alpha\beta x))$ 和 $L_2 = (\mathcal{X},(x,\beta x))$. 其中, $\mathcal{X} = \{x,\alpha x,\beta x,\alpha\beta x\}$ 和用 $\mathcal{P} = (x,\alpha\beta x)$ 或 $(x,\beta x)$ 分别简记 $\mathcal{P} = (x,\alpha\beta x)(\alpha x,\beta x)$ 或 $(x,\beta x)(\alpha x,\beta x)$. 只有一个杆地图. 记为 $L_0 = (\mathcal{X},(x)(\alpha\beta x))$.

令 ν, ϵ 和 ϕ 分别为地图 M 的节点, 边和面的集合. 则

$$\mathrm{Eul}(M) = \nu - \epsilon + \phi \tag{1.1.2}$$

被称为 M 的*Euler 示性数*.

进而, 若一个地图 $M = (\mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X),\mathcal{P})$ 还满足下面的公理 3, 则称它为*不可定向的*, 否则, *可定向的*.

公理 3　由 $I = \{\alpha\beta,\mathcal{P}\}$ 所生成的群 Ψ_I 在 $\mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X)$ 上可迁.

因为可以证明, 若 Ψ_I 在 $\mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X)$ 上不可迁, 则它恰含两个轨道. 自然, 它们是共轭的. 这就是说, 一个地图 $(\mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X),\mathcal{P})$ 是可定向的, 当且仅当, 群 Ψ_I 在 $\mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X)$ 上恰含两个轨道.

令 $M = (\mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X),\mathcal{P})$ 是一个地图和 $e_x = \{x,\alpha x,\beta x,\alpha\beta x\}$ 为与 $x \in \mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X)$ 关联的那条边. 为简化, 当不引起混淆时, 总是用 $\mathcal{X}$ 代替 $\mathcal{X}_{\alpha,\beta}$, 记

$$\mathcal{X} = X + \alpha X + \beta X + \alpha\beta X, \tag{1.1.3}$$

其中, $\gamma X = \{\gamma x|\forall x \in X\}$, $\gamma = \alpha,\beta$ 和 $\alpha\beta$. 并且, 将边 $e_x = \{x,\alpha x,\beta x,\alpha\beta x\} = Kx$, $x \in X$, 就简记为 e.

下面, 在地图 M 上对于一条边 e, 引进二个运算. 一个是在 M 上, *消去*e, 即

$$M - e = (\mathcal{X} - e,\ \mathcal{P}\langle e\rangle), \tag{1.1.4}$$

其中, $\mathcal{P}\langle e\rangle$ 为 $\mathcal{P}$ 限制在 $\mathcal{X}-e$ 上的部分. 另一个, 就是在 M 上将 e 收缩, 即

$$M\bullet e = (\mathcal{X} - e, \mathcal{P}[e]). \tag{1.1.5}$$

其中, $\mathcal{P}[e]$ 为将 e 在 M 上的二端 $u=\{(x,A),(\alpha x,\alpha A^{-1})\}$, 或简记 $u=(x,A)$ 和 $v=\{(\alpha\beta x,B),(\beta x,\alpha B^{-1})\}$, 或 $v=(\alpha\beta x,B)$, 合成为节点 $\{(BA),(\alpha A^{-1}B^{-1})\}$, 或 (BA). 同时, 使其他节点不变.

定理 1.1.1 对任何地图 M, 总有 $\mathrm{Eul}(M)\leqslant 2$.

证 因为在 M 上, 将一条在两个面公共边界上的边 e 消去后, 节点数不变和面数减一, 由 (1.1.2) 式知, $\mathrm{Eul}(M)=\mathrm{Eul}(M')$. 其中, $M'=M-e$. 依此行之, 总可得地图 M' 只有一个面, 而且 $\mathrm{Eul}(M)=\mathrm{Eul}(M')$. 由公理 2, $G(M')$ 是连通的. 又, 对任何连通图 G 均有 $\epsilon\geqslant\nu-1$. 其中, ν 和 ϵ 分别为 G 的节点数和边数. 从而, 总有 $\mathrm{Eul}(M)=\mathrm{Eul}(M')\leqslant(\epsilon+1)-\epsilon+1=2$. 这就是定理之结论. ♮

还有两个运算是常用的. 设 $v=(AB)$ 是地图 $M=(\mathcal{X},\mathcal{P})$ 的一个节点. 令 $\mathcal{P}'$ 为将 $\mathcal{P}$ 中的 (BA) 用 (x,A) 和 $(\alpha\beta x,B)$ 代替而得到的. 这里, $e_x=Kx$ 为新引进的边. 容易验证, $M'=(\mathcal{X}+Kx,\mathcal{P}')$ 也是一个地图, 并称它为由 M 经过劈分节点 $v=(BA)$ 而得到. 若 $v=(\alpha\beta x,y)$ 是 M 中的一个节点, 则地图 $M'=(\mathcal{X}-Kx-Ky+Kz,\mathcal{P}')$, 使得 $\mathcal{P}'$ 是从 M 中消去节点 v, 并且在 $\mathcal{P}$ 中, 令 $Kz=\{x,\alpha x,\beta y,\alpha\beta y\}$ 而得到的. 这时, 称 M' 为在 M 中*忽略*了节点 v. 消去一条边的逆运算称为*添加*一条边. 忽略一个节点的逆运算为*细分*一条边.

可以看出, 上面所说的劈分一个节点的运算是收缩一条边的运算的逆. 容易验证, 通过边的收缩, 忽略节点和它们的逆：劈分节点与细分边, Euler 示性数不变.

然而, 对于消去边的运算, 则只能当所消去的边在两个面的公共边界上时, 以及与之相应的逆运算：添加边, 才使 Euler 示性数不变. 这种情况下的消去与添加边称为*标准的*.

从定理 1.1.1 的证明中可知, 任何一个地图均可变换为一个只含一个面的地图使得 Euler 示性数不变. 要想研究任何一个地图与怎样的最简单的地图, 有相同的 Euler 示性数, 只讨论单面的地图就够了.

为简便, 用面的集合表示地图. 而且设定 $x^{-1}=\alpha\beta x$. 这又导致 $(\alpha x)^{-1}=\beta x$. 总之, 可视 $x=\alpha x$ 和由此又有 $\beta x=\alpha\beta x$.

对于不定向的地图, 由上面的使 Euler 示性数保持不变的运算, 可得下面的二性质.

可定向 1 若单面地图有形式 $M=(Rxx^{-1}Q)$, $R,Q\neq\varnothing$, 则

$$\mathrm{Eul}(M) = \mathrm{Eul}(RQ).$$

可定向 2 若单面地图有形式 $M=(PxQyRx^{-1}Sy^{-1}T)$, 则

$$\mathrm{Eul}(M) = \mathrm{Eul}(PSRQTxyx^{-1}y^{-1}).$$

对于不可定向地图, 可导出如下两性质.

否定向 1　若单面地图有形式 $M=(PxQxR)$, 则

$$\mathrm{Eul}(M) = \mathrm{Eul}(PQ^{-1}Rxx).$$

否定向 2　若单面地图有形式 $M=(Axxyzy^{-1}z^{-1})$, 则

$$\mathrm{Eul}(M) = \mathrm{Eul}(Ax_1x_1x_2x_2x_3x_3).$$

定理 1.1.2　若地图 $M=(\mathcal{X},\mathcal{P})$ 是可定向的, 则有 $\mathrm{Eul}(M)=0(\mathrm{mod}\ 2)$. 而且, M 在亏格为 p 的曲面上当, 且仅当, $\mathrm{Eul}(M)=2-2p$. 其中, $\mathrm{Eul}(M)$ 为 M 的 Euler 示性数, 由 (1.1.2) 式所示.

证　由可定向性, 依公理 3 可知, 对每边 $e_x=Kx$, x 与 $\alpha\beta x$ 必同在群 Ψ_I, $I=\{\alpha\beta,\mathcal{P}\}$, 在 $\mathcal{X}$ 上的一个轨道中. 而 αx 和 βx, 同在另一条轨道中. 又, $\{x,\alpha\beta x\}=\{x,x^{-1}\}=\{\alpha x,\beta x\}$. 利用性质可定向 1 和可定向 2, 到不能继续时, 只能或者 $\mathrm{Eul}(M)=\mathrm{Eul}(O_0)$, $O_0=(xx^{-1})$, 或者存在 $p>0$ 使得 $\mathrm{Eul}(M)=\mathrm{Eul}(O_p)$. 其中,

$$O_p=\left(\prod_{i=1}^{p}x_iy_ix_i^{-1}y_i^{-1}\right).$$

通过计算 O_0 和 O_p 的节点数、边数和面数, 即可得到第一个结论. 第二个结论, 直接由曲面的分类可得. ♮

定理 1.1.3　对于不可定向地图 $M=(\mathcal{X},\mathcal{P})$, M 在亏格为 q 的不可定向曲面上, 当且仅当, 有 $\mathrm{Eul}(M)=2-q$. 其中, $q>0$.

证　由不可定向性, 依公理 3 可知, Ψ_I, $I=\{\alpha\beta,\mathcal{P}\}$, 在 $\mathcal{X}$ 上只有一个轨道. 从而, 存在 $x\in\mathcal{X}$ 使 x 和 αx 在 $\mathcal{P}\alpha\beta$ 的同一轨道上. 也就是说, x 在这个面上出现两次, 而 x^{-1} 不出现. 利用性质否定向 1 和否定向 2, 直到不能继续, 必存在一个整数 $q>0$ 使得 $\mathrm{Eul}(M)=\mathrm{Eul}(N_q)$, 其中,

$$N_q=\left(\prod_{i=1}^{q}x_ix_i\right).$$

通过计算 N_q 的节点数, 边数与面数, 再根据曲面的分类即可得定理. ♮

上面的地图 O_p, $p\geqslant 0$, 和 N_q, $q\geqslant 1$, 统称为**标准地图**. 若 $\mathrm{Eul}(M)=2$, 即 $p(M)=0$ 则 M 被称为**平面的**. 对 $p(M)=1$, $q(M)+1$ 或 2, 分别称 M 为**在环面上的**, **在射影平面上的**或**在Klein 瓶上的**.

两地图 $M_1=(\mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X_1),\mathcal{P}_1)$ 和 $M_2=(\mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X_2),\mathcal{P}_2)$, 若存在一个双射 $\tau:\mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X_1)\longrightarrow\mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X_2)$ 使得形式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X_1) & \xrightarrow{\quad\tau\quad} & \mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X_2) \\ \gamma_1 \downarrow & & \downarrow \gamma_2 \\ \mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X_1) & \xrightarrow[\quad\tau\quad]{} & \mathcal{X}_{\alpha,\beta}(X_2) \end{array} \tag{1.1.6}$$

对 $\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \beta$ 和 $\gamma_1 = \mathcal{P}_1$ 与 $\gamma_2 = \mathcal{P}_2$ 是可交换的, 则称 M_1 和 M_2 是同构的. 这个双射 τ 被称为它们之间的一个同构.

若 $M_1 = M_2 = M$, 它们之间的同构被称为 M 的自同构. 可以验证, 一个地图 M 上的所有自同构形成一个群, 并称之为自同构群, 用 $\mathrm{Aut}(M)$ 表示. 它的阶记为 $\mathrm{aut}(M) = |\mathrm{Aut}(M)|$.

若将地图 $M = (\mathcal{X}, \mathcal{P})$ 的基本集中的一个元素选定, 并给以特别的标记, 则称 M 是带根的. 那个有标记的元素被称为根. 常记为 $r = r(M)$. 与根关联的节点, 边和面分别称为根点, 根边和根面. 两个带根地图 M_1 和 M_2, 当存在一个同构使得它们的根相对应时, 才称它们是同构的.

定理 1.1.4 任何带根地图的自同构群均为平凡的.

证 令 τ 为地图 M 的一个自同构, r 为它的根. 因为 $\tau(r) = r$, 由 (1.1.6) 式有 $\tau(\alpha r) = \alpha r$, $\tau(\beta r) = \beta r$ 和 $\tau(\mathcal{P}r) = \mathcal{P}r$. 从而, 对任何 $\psi \in \Psi_J$, $J = \{\alpha, \beta, \mathcal{P}\}$, 有 $\tau(\psi r) = \psi r$. 由公理 2, 即得. ♮

在此基础上, 还有

定理 1.1.5 令 ν_i 和 ϕ_i 分别为地图 M 上次为 i 的节点数和面数, $i \geqslant 1$. 则

$$\mathrm{aut}(M) \,\Big|\, (2i\nu_i,\ 2j\phi_j \mid \forall i,\ i \geqslant 1,\ \forall j,\ j \geqslant 1). \tag{1.1.7}$$

其中, $(2i\nu_i,\ 2j\phi_j \mid \forall i,\ i \geqslant 1,\ \forall j,\ j \geqslant 1)$ 为括号中所有数的最大公约数.

证 由 (1.1.6) 式, 对 M 上的一个自同构 τ, 若 $x \in \mathcal{X}$ 与一个次为 i 的节点和一个次为 j 的面关联, 则 $\tau(x)$ 也有这一性质. 这就可以按如下规则 $x \sim_{\mathrm{Aut}} y \Longleftrightarrow \exists\tau \in \mathrm{Aut}(M)$, $x = \tau y$, 将与次为 i 的节点关联的基本集中的元素分类. 由定理 1.1.4 可知, 所有的类都具有相同的元素数, 即群 $\mathrm{Aut}(M)$ 的阶. 由于与次为 i 的节点关联的元素数目为 $2i\nu_i$, 有 $\mathrm{aut}(M)|2i\nu_i$. 相仿地可知, $\mathrm{aut}(M)|2j\phi_j$. 由选择 i, $i \geqslant 1$ 和 j, $j \geqslant 1$, 的任意性, 即得定理. ♮

由这个定理, 即可知

$$\mathrm{aut}(M) \leqslant (2i\nu_i,\ 2j\phi_j \mid \forall i,\ i \geqslant 1,\ \forall j,\ j \geqslant 1). \tag{1.1.8}$$

从关系 $4\epsilon = 2\sum_{i=1}^{\nu} i\nu_i = 2\sum_{j=1}^{\phi} j\phi_j$, 以及由此知

$$(2i\nu_i,\ 2j\phi_j \mid \forall i,\ i \geqslant 1,\ \forall j,\ j \geqslant 1) \,\Big|\, 4\epsilon, \tag{1.1.9}$$

定理 1.1.5 就意味

$$\mathrm{aut}(M) \,\Big|\, 4\epsilon, \text{ 从而, } \mathrm{aut}(M) \leqslant 4\epsilon. \tag{1.1.10}$$

由定理 1.1.4, 可以计数带根地图而不必考虑对称性. 同时, 定理 1.1.5 为数不带根的地图考虑对称性带来好处. 事实上, 它已经启示, 求一个地图的自同构群可以有效地通过算法实现.

§1.2　地图多项式

在 (1.1.4) 式和 (1.1.5) 式所给出的运算的基础上, 可以在地图 M 上建立多项式. 这里, 只讨论那些与色多项式和范色多项式有关的. 鉴于一般性, 将 M 上的每边 e 分配一个权 $w(e) = 0$ 或 1. 或者说, 是二分的. 这里, 只讨论平面地图.

一个地图 M, 令 V 和 E 分别为它的节点集与边集. 用如下递归方式定义一个地图函数 $\Phi(M)$. 对于 $e \in E$,

$$\Phi(M) = \begin{cases} A(e)\Phi(M-e) + B(e)\Phi(M \bullet e), \\ \qquad\qquad \text{当 } e \in E \text{ 既非环也非割边;} \\ (X+Yz)^{\bar{w}(e)}(Xz+Y)^{w(e)}\Phi(M-e), \\ \qquad\qquad \text{当 } e \text{ 为环;} \\ (X+Yz)^{w(e)}(Xz+Y)^{\bar{w}(e)}\Phi(M \bullet e), \\ \qquad\qquad \text{当 } e \text{ 为割边.} \end{cases} \tag{1.2.1}$$

其中,

$$A(e) = \bar{w}(e)X + w(e)Y; \quad B(e) = w(e)X + \bar{w}(e)Y \tag{1.2.2}$$

并且, 满足如下两条件.

条件 1　若 M 为节点地图, 则

$$\Phi(M) = 1. \tag{1.2.3}$$

条件 2　若 $M = M_1 + M_2$, 即 M_1 与 M_2 无公共节点的并, 则

$$\Phi(M) = z\Phi(M_1)\Phi(M_2). \tag{1.2.4}$$

令 $k_i = k_i(M)$ 与 $l_i = l_i(M)$ 分别为带权 $i, i = 0, 1$ 的割边与环的数目.

定理 1.2.1　若在地图 M 的基准图中每一条边不是环就是割边, 则

$$\Phi(M) = (X+Yz)^{k_1+l_0}(Xz+Y)^{k_0+l_1}. \tag{1.2.5}$$