高中疑难解析丛书

高中数学疑难解析手册

Shuxue

主编⊙左华荣　陆中权

四川出版集团 · 四川辞书出版社

高中疑难解析丛书

高中数学

疑难解析手册

主编 左华荣 陆中权

四川出版集团·四川辞书出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学疑难解析手册/左华荣，陆中权主编．—成都：四川出版集团・四川辞书出版社，2008.1

ISBN 978-7-80682-402-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①左…②陆… Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 196500 号

高中数学疑难解析手册

GAOZHONG SHUXUE YINAN JIEXI SHOUCE

主编　左华荣　陆中权

策　　划 / 方光琅
责任编辑 / 方光琅　曾　真
复　　审 / 唐谨怀
终　　审 / 赵　键
检　　查 / 冯建平
责任校对 / 张晓梅　罗丽娟　殷桂蓉
封面设计 / 跨克创意
技术设计 / 王　跃
责任印制 / 严红兵　肖嗣兰
出版发行 / 四川出版集团・四川辞书出版社
地　　址 / 成都市三洞桥路 12 号
邮政编码 / 610031
印　　刷 / 成都金龙印务有限责任公司
版　　次 / 2008 年 1 月第 1 版
印　　次 / 2008 年 1 月第 1 次印刷
开　　本 / 850 mm×1168 mm　1/32
印　　张 / 19.25
书　　号 / ISBN 978-7-80682-402-3
定　　价 / 30.00 元

前　言

学好高中数学，在考试中取得成功的关键之一是解决好学习中的疑难问题。为了使学生有效地克服学习障碍，减少学习过程中的“无用功”，确保高考时“胸中自有雄兵百万”，我们编写了《高中数学疑难解析手册》。

本书以高中数学课程标准和高考考试说明为依据，参考了全国各地的高考数学试卷，按教学过程中的“章”为单位列出疑难问题；并对这些疑难问题所含知识的内涵、外延、使用条件、使用注意事项等加以说明，说明中特别注意了解决这些疑难问题所要用到的思维方法。

本书中的每个疑难问题由“疑难解析”、“例题解析”、“理解与迁移”三部分组成。“疑难解析”力求简明、透彻、到位。“例题解析”是“疑难解析”的延伸，突出思维过程和解题方法。在“理解与迁移”中的习题都给出了答案，有的还给出了关键性提示。本书中所选的例题和习题具有典型性、针对性和较强的训练价值，部分题目遴选自近几年的高考题。这些例题和习题的解题过程基本上包括了高考要求考生掌握的所有解题思维方法。

与本书同时出版的还有高中物理、化学、生物、语文、英语疑难解析手册。

本套书由左华荣、陆中权主编。参加本书编写的有陆中权、白中敏、游桂先、郑荣华、刘国强、谢邑辉、牟林、韩永芳、渣素梅、龙翠英、李莉等。

书中如有不妥之处，恳请读者指正。

编　者

2008 **年元月**

编委会

目 录

第一章

集合 常用逻辑用语

一、如何理解集合的概念

疑难解析

1. 认识一个集合就要知道集合中元素是什么和这些元素有何属性. 要学会将已学的知识综合运用于集合，要重视将集合的概念渗透到所学的数集、方程与不等式的解集等知识中去.

2. 对于元素 a 和集合 A，或 $a\in A$，或 $a\notin A$，二者必居其一.

0、$\{0\}$、$\varnothing$的区别：0 是元素，而不是集合；$\{0\}$ 是仅含一个元素的集合；而$\varnothing$则是不含任何元素的集合.

3. 列举法表示集合，有时可以用省略号代表其余的元素. 例如：$\{11, 12, 13, \cdots, 100\}$，$\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$，$\{2, 4, 8, 16, 32, 64, \cdots\}$.

如果是描述法，一般用 $\{x|P\}$ 表示，其中 x 表示元素，P 表示元素具有的共性. $A=\{x|P\}$ 表示 A 由所有具有性质 P 的元素 x 所组成. 可知，若 x 不具有性质 P，则 $x\notin A$；若 $x\in A$，则 x 必具有性质 P. 例如，$A=\{x|x>1\}$ 表示全体超过 1 的数，即凡大于 1 的数，均在 A 中；反过来凡是含在 A 中的数，全比 1 大.

例题解析

例 1 已知集合 $A=\{0, 1\}$，$B=\{x|x\subseteq A\}$，用列举法写出集合 B.

分析：根据子集的概念，得出集合 B 的所有元素.

解：∵ 集合 A 的子集是∅、$\{0\}$、$\{1\}$、$\{0, 1\}$

∴ 集合 $B=\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

例 2 求实数集 $\{1, x, x^2-x\}$ 中的元素 x 应满足的条件.

分析：由集合的概念知，一个给定的集合中的元素具有确定性、无序性和互异性. 解此题要从集合中元素是互异的入手.

解：因为集合中元素是互异的，则 x 应满足

$$\begin{cases} x\neq 1 \\ x^2-x\neq 1 \\ x^2-x\neq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x\neq 0,\ x\neq 2 \end{cases}$$

∴ 此数集中的元素 x 应满足的条件是：

$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$，$x\neq 1$，$x\neq 2$，$x\neq \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

例 3 设全集 $I=\{2, 3, a^2+2a-3\}$ $a\in\mathbf{R}$，$A=\{|a+1|, 2\}$ $(\complement_I A)=\{5\}$，写出集合 $M=\{x\,|\,x=\log_2|a|\}$ 的全部子集.

分析：首先应求出满足条件的 a 的值的个数. 这里要用到补集的性质：$A\cup(\complement_I A)=I$.

解：∵ $A\cup(\complement_I A)=I$，$(\complement_I A)=\{5\}$

∴ $\{2, 3, a^2+2a-3\}=\{2, |a+1|, 5\}$

∴ $\begin{cases} |a+1|=3 \\ a^2+2a-3=5 \end{cases} \Rightarrow a=-4$ 或 $a=2$

$M=\{\log_2|2|, \log_2|-4|\}=\{1, 2\}$

∴ M 的子集有∅，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1, 2\}$

说明：有限集的子集的个数有如下一般的结论：若有限集 A 中有 n 个元素，则 A 的子集共有 2^n 个，非空子集有 2^n-1 个，非空真子集有 2^n-2 个.

例 4 已知 $A=\{x\,|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\,|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x\,|2^{x^2+2x-8}=1\}$，三集合满足 $(A\cap B)\supsetneqq\varnothing$，且 $A\cap C=\varnothing$，求实数 a 和集合 A.

分析：可先将集合 B、C 用列举法表出，再由 $(A\cap B)\supsetneqq\varnothing$ 且 $A\cap C=\varnothing$，求得 a 的值.

解：$B=\{x\mid\log_2(x^2-5x+8)=1\}=\{x\mid x^2-5x+8=2\}$

即$B=\{2,3\}$

$C=\{x\mid 2^{x^2+2x-8}=1\}=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$

$=\{-4,2\}$

$\because A\cap C=\varnothing$，$\therefore -4\notin A$，$2\notin A$

又$(A\cap B)\supset\varnothing$，即$A\cap B$不是空集，$\therefore 3\in A$

即3是方程$x^2-ax+a^2-19=0$的一个根

有$9-3a+a^2-19=0$，解得$a=-2$或$a=5$

当$a=5$时，$A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$与$2\notin A$矛盾，故舍去

当$a=-2$时，$A=\{x\mid x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$

综上得：$a=-2$，$A=\{3,-5\}$

说明：对这类问题，无论是否要求求出集合A，都必须将a值代入验证是否都符合题设条件.

理解与迁移·习题1-1

1. （2002年·全国）设集合$M=\left\{x\mid x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\mid x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则（　　）

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$　　C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

2. （2004年·天津文史）设集合$P=\{1,2,3,4,5,6\}$，$Q=\{x\in\mathbf{R}\mid 2\leqslant x\leqslant 6\}$，那么下列结论正确的是（　　）

A. $P\cap Q=P$　　B. $P\cap Q\supsetneqq Q$

C. $P\cup Q=Q$　　D. $P\cap Q\subsetneqq P$

3. 已知集合$A=\{a\mid a=m^2+1,m\in\mathbf{N}\}$，$B=\{b\mid b=n^2-4n+5,n\in\mathbf{N}\}$，则$A$、$B$之间的关系是________.

4. 已知集合$P=\{x\mid(x+2)(4-x)\geqslant0\}$，$N=\{x\mid 2-|x-a|>0\}$，若$N\subset P$，求实数$a$的取值范围.

5. 已知集合$A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$且$A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求实数$p$的取值范围.

6. 已知两正整数集合$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2\}$满足$a_1<a_2<a_3<a_4$. 若$A\cap B=\{a_1,a_4\}$，$a_1+a_4=10$且$A\cup B$中所有元

素之和为 124，求 $a_1+a_4+a_2^2+a_3^2$ 的值.

二、集合运算的方法与技巧

疑难解析

集合的运算多种多样，主要是理解并掌握交、并、补、子集等概念，运算性质、运算律及运算法则，做到无遗漏、无重复. 同时要注意充分利用集合的表示法.

集的运算规律　设 A、B、C 都是集合，则有

交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

德·摩根律　$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

说明： 1. 任何一个集合是它本身的子集. $A\subseteq A$

空集是任何集合的子集. $\varnothing\subseteq A$

空集是任何非空集合的真子集. $\varnothing\subsetneqq A\neq\varnothing$

对于集合 A、B、C，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$

对于集合 A、B、C，如果 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，那么 $A\subsetneqq C$

2. 对于任何集合 A、B，有

$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$

$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$

对任意两个有限集合 A、B，有

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

3. 对任何集合 A，有

$I\cup A=I$，$I\cap A=A$

$A\cup(\complement_U A)=I$，$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$

例题解析

例 1 已知全集 $I=\{x|x$ 为小于20 的正奇数$\}$，$A\cap(\complement_I B)=\{3,7,15\}$、$(\complement_I A)\cap B=\{13,17,19\}$、$(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\varnothing$，求集合 A 和 B.

分析：借助于文氏图，根据 $A\cap(\complement_I B)$、$(\complement_I A)\cap B$，$(\complement_I A)\cap(\complement_I B)$的含义，将各集合所有元素填入有关区域内，从而确定全集中每个元素的属向，即可求得 A 和 B.

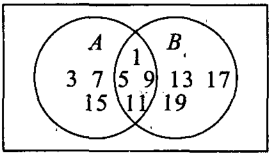

图 1－1

解：如图 1－1 可得

$A=\{1,3,5,7,9,11,15\}$

$B=\{1,5,9,11,13,17,19\}$

例 2 定义 $A-B=\{x|x\in A$，且 $x\notin B\}$，若 $A=\{2,4,6,8,10\}$，$B=\{1,4,8\}$，则 $A-B$ 等于（　　）

A. $\{4,8\}$　　B. $\{1,2,6,10\}$

C. $\{1\}$　　D. $\{2,6,10\}$

分析：考查元素集合的从属关系，按新定义运算. 注意理解 $A-B$ 的元素是属于 A 但不属于 B 的元素组成的. 新的定义与补集的区别是 A 可以不包含 B.

解：$A-B=\{x|x\in A$，且 $x\notin B\}=\{2,6,10\}$

答案：D

例 3 （2004 年 · 全国卷Ⅱ）已知集合 $M=\{x|x^2<4\}$，$N=\{x|x^2-2x-3<0\}$，则集合 $M\cap N=$（　　）

A. $\{x|x<-2\}$　　B. $\{x|x>3\}$

C. $\{x|-1<x<2\}$　　D. $\{x|2<x<3\}$

分析：本题考查一元二次不等式的解和交集运算. 要注意一元二次不等式求解时，当 $a>0$ 时，记住"大于取两边，小于取中间"，交集是取公共部分.

解：$M=\{x|-2<x<2\}$，$N=\{x|-1<x<3\}$

$\therefore M\cap N=\{x|-1<x<2\}$

答案：C

例 4 已知

$A=\{a\,|a=8n+12m+4s,\ n,\ m,\ s\in\mathbf{Z}\}$，

$B=\{b\,|b=20p+16q+12r,\ p,\ q,\ r\in\mathbf{Z}\}$，

证明：$A=B$.

分析：根据相等集的概念，证明 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$.

证明：对于 A 中任一元素 $a=8n+12m+4s=20n+16s+12(m-n-s)$

$\because n,\ m,\ s\in\mathbf{Z}$ $\quad\therefore m-n-s\in\mathbf{Z}$

则 $a\in B$ $\quad\therefore A\subseteq B$

对于 B 中任一元素

$b=20p+16q+12r$

$=12r+8\cdot(2q)+4\cdot(5p)$

$\because p,\ q,\ r\in\mathbf{Z}$ $\quad\therefore 2q,\ 5p\in\mathbf{Z}$

则 $b\in A$ $\quad\therefore B\subseteq A$

故 $A=B$

例 5 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{1}{2}<x<\frac{3}{5}\text{或}x>\frac{3}{2}\right.\right\}$，$B=\{x\,|(x+1)^2\geqslant a^4\}$，且 $A\subsetneqq B$. 求实数 a 的取值范围.

分析：根据真子集的概念得出集合 B 的所有情况，再分类确定参数 a 的取值范围.

解：由 $(x+1)^2\geqslant a^4$，得 $x\geqslant a^2-1$ 或 $x\leqslant -a^2-1$

$\therefore B=\{x\,|x\geqslant a^2-1$ 或 $x\leqslant -a^2-1\}$

由于 $A\subsetneqq B\Longleftrightarrow a^2-1\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $a^2-1=-a^2-1$

或 $\begin{cases}a^2-1\leqslant\frac{3}{2}\\-a^2-1\geqslant\frac{3}{5}\end{cases}$

由 $a^2-1\leqslant\frac{1}{2}$，解得 $-\frac{\sqrt{6}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{6}}{2}$

由 $a^2-1=-a^2-1$，解得 $a=0$

由 $\begin{cases}a^2-1\leqslant\frac{3}{2}\\-a^2-1\geqslant\frac{3}{5}\end{cases}$ 得 a 无实数解

$\therefore a$ 的取值范围是$\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

例 6 关于实数 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right| \leqslant \frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^3-3(a+1)x+2(3a+1) \leqslant 0$（其中 $a \in \mathbf{R}$）的解集依次记为 A 与 B，求使 $A \subseteq B$ 的 a 的取值范围.

分析：本题主要考查绝对值不等式、二次不等式及分类讨论思想. 本题解答时需先解不等式求出集合 A、B，再由 $A \subseteq B$ 的关系求解.

解：由 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}(a-1)^2$，得

$$-\frac{1}{2}(a-1)^2 \leqslant x-\frac{(a+1)^2}{2} \leqslant \frac{1}{2}(a-1)^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left[(a+1)^2-(a-1)^2\right] \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\left[(a+1)^2+(a-1)^2\right]$$

$$\therefore A=\{x \mid 2a \leqslant x \leqslant a^2+1\}$$

由 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1) \leqslant 0$

得 $(x-2)[x-(3a+1)] \leqslant 0$

当 $3a+1 \geqslant 2$ 即 $a \geqslant \frac{1}{3}$ 时，得 $B=\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3a+1\}$

当 $3a+1<2$ 即 $a<\frac{1}{3}$ 时，$B=\{x \mid 3a+1 \leqslant x \leqslant 2\}$

$\therefore$ 当 $a \geqslant \frac{1}{3}$ 时，若使 $A \subseteq B$ 成立，只要 $\begin{cases}2a \geqslant 2 \\ a^2+1 \leqslant 3a+1\end{cases}$ 解得 $1 \leqslant a \leqslant 3$

当 $a<\frac{1}{3}$ 时，若使 $A \subseteq B$ 成立，只要 $\begin{cases}2a \geqslant 3a+1 \\ a^2+1 \leqslant 2\end{cases}$

解得 $a=-1$

综上，使 $A \subseteq B$ 成立的 a 的取值范围是

$\{a \mid 1 \leqslant a \leqslant 3$，或 $a=-1\}$

理解与迁移·习题1-2

1. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-5x+4=0\}$，$B=\{x \mid x^2-ax+a-1=0\}$，$C=\{x \mid x^2-mx+4=0\}$，且 $A \cup B=A$，$A \cap C=C$，求实数 a，m 的值.

提示：利用交集和并集的性质得出 B、C 的所有情况，再分类确定参数