



高中数学

疑难解析手册

Shuxue

主编◎左华荣 陆中权



高中数学

疑难解析 手册

主编 左华荣 陆中权

图书在版编目 (CIP) 数据

高中数学疑难解析手册/左华荣, 陆中权主编. —成都:
四川出版集团·四川辞书出版社, 2008. 1
ISBN 978-7-80682-402-3

I. 高… II. ①左…②陆… III. 数学课—高中—教学参
考资料 IV. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 196500 号

高中数学疑难解析手册

GAOZHONG SHUXUE YINAN JIEXI SHOUC

主编 左华荣 陆中权

策 划 / 方光琅

责任编辑 / 方光琅 曾 真

复 审 / 唐谨怀

终 审 / 赵 键

检 查 / 冯建平

责任校对 / 张晓梅 罗丽娟 殷桂蓉

封面设计 / 跨克创意

技术设计 / 王 跃

责任印制 / 严红兵 肖嗣兰

出版发行 / 四川出版集团·四川辞书出版社

地 址 / 成都市三洞桥路 12 号

邮政编码 / 610031

印 刷 / 成都金龙印务有限责任公司

版 次 / 2008 年 1 月第 1 版

印 次 / 2008 年 1 月第 1 次印刷

开 本 / 850 mm×1168 mm 1/32

印 张 / 19.25

书 号 / ISBN 978-7-80682-402-3

定 价 / 30.00 元

· 本书如无四川省版权防盗标志不得销售; 版权所有, 违者必究。

· 举报电话: (028) 87734299 86697083 86697093

· 本书如有印装质量问题, 请寄回出版社掉换。

· 市场营销部电话: (028) 87734330 87734332

前 言

学好高中数学，在考试中取得成功的关键之一是解决好学习中的疑难问题。为了使学生有效地克服学习障碍，减少学习过程中的“无用功”，确保高考时“胸中自有雄兵百万”，我们编写了《高中数学疑难解析手册》。

本书以高中数学课程标准和高考考试说明为依据，参考了全国各地的高考数学试卷，按教学过程中的“章”为单位列出疑难问题；并对这些疑难问题所含知识的内涵、外延、使用条件、使用注意事项等加以说明，说明中特别注意了解决这些疑难问题所要用的思维方法。

本书中的每个疑难问题由“疑难解析”、“例题解析”、“理解与迁移”三部分组成。“疑难解析”力求简明、透彻、到位。“例题解析”是“疑难解析”的延伸，突出思维过程和解题方法。在“理解与迁移”中的习题都给出了答案，有的还给出了关键性提示。本书中所选的例题和习题具有典型性、针对性和较强的训练价值，部分题目遴选自近几年的高考题。这些例题和习题的解题过程基本上包括了高考要求考生掌握的所有解题思维方法。

与本书同时出版的还有高中物理、化学、生物、语文、英语疑难解析手册。

本套书由左华荣、陆中权主编。参加本书编写的有陆中权、白中敏、游桂先、郑荣华、刘国强、谢邑辉、牟林、韩永芳、渣素梅、龙翠英、李莉等。

书中如有不妥之处，恳请读者指正。

编 者

2008 年元月

编委会

策 划 方光琅

主 编 左华荣 陆中权

副主编 张晓华 胡齐鸣 张 宁

李小玉

编 委 魏忠奇 刘 静 刘江永

邱小文 白中敏 郑荣华

张庆宁 胡永红 龚建林

目 录

第一章 集合 常用逻辑用语	(1)
一、如何理解集合的概念	(1)
二、集合运算的方法与技巧	(4)
三、怎样理解和判断四种命题	(9)
四、如何认识充分条件、必要条件、充要条件	(16)
第二章 函数	(22)
一、怎样确定和求函数的解析式与定义域	(22)
二、求函数值域(最值)的几种方法	(28)
三、如何求二次函数的值域和最值	(36)
四、如何求函数的反函数	(39)
五、怎样讨论函数的单调性	(44)
六、怎样判断函数的奇偶性	(49)
七、如何运用二次函数的图像、性质解题	(55)
八、如何运用指数函数的图像、性质解题	(61)
九、如何运用对数函数的图像、性质解题	(67)
第三章 数列	(74)
一、怎样确定数列的通项公式	(74)
二、如何根据具体问题选定等差数列的设法	(78)
三、怎样运用等差数列的性质解题	(80)
四、巧设等比中项	(83)
五、怎样运用等比数列的性质解题	(85)
六、如何正确运用等比数列前 n 项和公式解题	(91)
七、 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 对吗	(94)

八、数列求和的几种常用方法	(96)
九、如何建立数学模型解答有关数列的应用问题	(101)
第四章 三角函数	(107)
一、如何理解符合条件的角(角的范围)	(107)
二、如何利用三角函数的图像解题	(110)
三、如何求以三角式为解析式的函数的定义域和值域	(115)
四、怎样判定三角函数的奇偶性和周期性	(119)
五、如何比较三角函数值的大小	(123)
六、如何由 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ 的图像确定 A 、 ω 、 φ 、 b 的值	(127)
七、怎样利用同角公式解题	(132)
八、怎样求含参变量的三角函数的最值	(137)
九、如何简捷地进行三角函数式的恒等变形	(140)
十、怎样消去三角式中的三角函数	(145)
十一、如何求三角函数的值	(147)
十二、如何证明三角条件等式	(151)
十三、如何利用三角变换解三角形	(154)
十四、如何利用三角代换将代数、几何问题化为三角问题求解	(161)
第五章 平面向量	(167)
一、怎样运用向量数量积的运算法则	(167)
二、向量的坐标运算与向量平行、垂直的充要条件	(171)
三、如何理解、运用平面向量作为工具解决与三角、平面几何、 解析几何等关联的问题	(176)
四、线段的定比分点与平移问题	(182)
五、有关正弦、余弦定理的应用问题	(187)
第六章 不等式	(193)
一、应用不等式的性质要注意的问题	(193)
二、注意不等式的两类比较法	(196)
三、如何用均值不等式证题	(197)
四、如何运用约束条件证题	(199)
五、如何应用分析法、放缩法证明不等式	(203)
六、运用“定和定积”原理时要注意些什么问题	(208)

七、解分式不等式能否去分母	(213)
八、如何将无理不等式转化为等价的有理不等式	(215)
九、为什么解指数、对数不等式必须考虑底数	(218)
十、有关将绝对值不等式转化为不含绝对值不等式的几种主要方法	(222)
十一、解不等式中的换元法和图像法	(225)
十二、讨论含参数不等式的注意事项	(227)
十三、有关不等式的应用问题	(230)
第七章 直线与圆的方程	(235)
一、如何理解有向线段的数量和定比分点的概念、公式	(235)
二、如何灵活应用两点间的距离公式	(238)
三、如何灵活运用斜率公式	(239)
四、使用直线方程要注意的问题	(242)
五、如何判断两条直线的位置关系以及组成的方程组的解的唯一性	(246)
六、如何认识中心对称和轴对称	(251)
七、证明直线过定点的两种方法	(255)
八、有关直线中常见的最值问题的几道例题	(258)
九、什么样的二元二次方程的图像是直线	(262)
十、如何灵活运用直线段求参数范围	(264)
十一、如何理解曲线与方程的关系以及怎样根据方程描绘曲线	(267)
十二、怎样求圆的方程和圆的切线	(269)
十三、如何利用直线与圆的位置关系解题	(273)
十四、如何利用圆与圆的位置关系解题	(277)
十五、解有关圆的最值问题时，如何利用圆的特殊几何性质	(279)
十六、如何求切点弦的方程	(283)
第八章 圆锥曲线方程	(286)
一、如何灵活使用圆锥曲线的定义和方程	(286)
二、如何用韦达定理求解有关圆锥曲线的问题	(290)
三、有关圆锥曲线的弦长问题	(295)
四、圆的垂径分弦定理能在椭圆、双曲线中推广吗	(299)

五、如何判断与确定圆锥曲线间的位置关系	(303)
六、如何解有关圆锥曲线的最值问题	(307)
七、如何用射影法简化运算	(312)
八、有关“探索性、开放性”问题的几道例题	(314)
第九章 直线 平面 简单几何体	(321)
一、如何证明线共点和点共线	(321)
二、如何求异面直线所成的角	(324)
三、在直线与平面的问题中, 哪些情况下可用反证法	(328)
四、怎样证明点线共面、线线平行	(331)
五、怎样证明线面平行、线线垂直	(333)
六、怎样证明线面垂直、面面垂直	(337)
七、怎样确定并求出二面角的平面角	(340)
八、求线面所成的角的关键是什么	(345)
九、如何求点到直线和点到平面的距离	(349)
十、如何求解翻折问题	(352)
十一、求解棱柱、棱锥、棱台的侧面积和体积的方法有哪些	(354)
十二、如何求解锥体、台体被平行于底面的平面所截的问题	(361)
十三、有关立体几何中的最值问题	(363)
十四、如何求解多面体和旋转体内的线面关系问题	(367)
十五、如何以空间向量为工具解答立体几何题	(371)
第十章 排列 组合和概率	(378)
一、排列、组合的研究对象和基本原理是什么	(378)
二、怎样优先考虑特殊位置和特殊元素	(381)
三、排列、组合题目中常用的几种“转化”方法	(385)
四、排列、组合应用题解法中的常取的途径	(388)
五、如何解二项展开式系数和项数有关的问题	(391)
六、如何理解概率的性质和等可能事件的概率	(395)
七、如何理解互斥事件中有一个发生的概率	(399)
八、如何理解相互独立事件同时发生的概率	(404)
第十一章 概率与统计	(411)
一、有关离散型随机变量分布列的计算方法	(411)

二、计算离散型随机变量的期望和方差应注意的问题	(415)
三、有关抽样方法、分布与线性回归的几个问题	(421)
第十二章 极限 数学归纳法	(428)
一、如何理解与应用数列极限的定义	(428)
二、如何灵活地进行数列极限的计算	(432)
三、如何用极限的思想求无穷等比数列各项的和	(435)
四、用数学归纳法证题要注意的问题	(438)
第十三章 导数	(448)
一、如何利用导数的定义、运算法则及常见函数的导数公式进行 计算	(448)
二、如何利用导数研究函数的单调性、极值和最值	(455)
第十四章 复数	(465)
一、两个复数能比较大小吗	(465)
二、怎样灵活运用单位根的性质	(468)
三、怎样用好 $ z ^2 = z \cdot \bar{z}$	(470)
第十五章 历届高考压轴题理解与迁移	(473)
一、圆锥曲线中参数范围的求解策略	(473)
二、递推数列的求解策略	(479)
三、有关函数与不等式的几道例题	(486)
理解与迁移·习题参考答案	(496)



第一章

集合 常用逻辑用语

一、如何理解集合的概念



疑难解析

1. 认识一个集合就要知道集合中元素是什么和这些元素有何属性. 要学会将已学的知识综合运用于集合, 要重视将集合的概念渗透到所学的数集、方程与不等式的解集等知识中去.

2. 对于元素 a 和集合 A , 或 $a \in A$, 或 $a \notin A$, 二者必居其一.

0、 $\{0\}$ 、 $\emptyset$ 的区别: 0 是元素, 而不是集合; $\{0\}$ 是仅含一个元素的集合; 而 $\emptyset$ 则是不含任何元素的集合.

3. 列举法表示集合, 有时可以用省略号代表其余的元素. 例如: $\{11, 12, 13, \dots, 100\}$, $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$, $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$.

如果是描述法, 一般用 $\{x|P\}$ 表示, 其中 x 表示元素, P 表示元素具有的共性. $A = \{x|P\}$ 表示 A 由所有具有性质 P 的元素 x 所组成. 可知, 若 x 不具有性质 P , 则 $x \notin A$; 若 $x \in A$, 则 x 必具有性质 P . 例如, $A = \{x|x > 1\}$ 表示全体超过 1 的数, 即凡大于 1 的数, 均在 A 中; 反过来凡是含在 A 中的数, 全比 1 大.



例题解析

例 1

已知集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{x|x \subseteq A\}$, 用列举法写出集合 B .

分析: 根据子集的概念, 得出集合 B 的所有元素.

解: $\because$ 集合 A 的子集是 $\emptyset$ 、 $\{0\}$ 、 $\{1\}$ 、 $\{0, 1\}$

$\therefore$ 集合 $B = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

例 2 求实数集 $\{1, x, x^2 - x\}$ 中的元素 x 应满足的条件.

分析: 由集合的概念知, 一个给定的集合中的元素具有确定性、无序性和互异性. 解此题要从集合中元素是互异的入手.

解: 因为集合中元素是互异的, 则 x 应满足

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - x \neq 1 \\ x^2 - x \neq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x \neq 0, x \neq 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 此数集中的元素 x 应满足的条件是:

$$x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 0, x \neq 1, x \neq 2, x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

例 3 设全集 $I = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$ $a \in \mathbf{R}$, $A = \{|a+1|, 2\}$ ($\complement_I A$) $= \{5\}$, 写出集合 $M = \{x | x = \log_2 |a|\}$ 的全部子集.

分析: 首先应求出满足条件的 a 的值的个数. 这里要用到补集的性质: $A \cup (\complement_I A) = I$.

解: $\because A \cup (\complement_I A) = I$, $(\complement_I A) = \{5\}$

$\therefore \{2, 3, a^2 + 2a - 3\} = \{2, |a+1|, 5\}$

$$\therefore \begin{cases} |a+1| = 3 \\ a^2 + 2a - 3 = 5 \end{cases} \Rightarrow a = -4 \text{ 或 } a = 2$$

$$M = \{\log_2 |2|, \log_2 |-4|\} = \{1, 2\}$$

$\therefore M$ 的子集有 $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$

说明: 有限集的子集的个数有如下一般的结论: 若有限集 A 中有 n 个元素, 则 A 的子集共有 2^n 个, 非空子集有 $2^n - 1$ 个, 非空真子集有 $2^n - 2$ 个.

例 4 已知 $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x | \log_2 (x^2 - 5x + 8) = 1\}$, $C = \{x | 2^{x^2 + 2x - 8} = 1\}$, 三集合满足 $(A \cap B) \cap C = \emptyset$, 且 $A \cap C = \emptyset$, 求实数 a 和集合 A .

分析: 可先将集合 B 、 C 用列举法表出, 再由 $(A \cap B) \cap C = \emptyset$ 且 $A \cap C = \emptyset$, 求得 a 的值.



解: $B = \{x | \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\} = \{x | x^2 - 5x + 8 = 2\}$

即 $B = \{2, 3\}$

$C = \{x | 2^{x^2+2x-8} = 1\} = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\}$

$= \{-4, 2\}$

$\therefore A \cap C = \emptyset, \therefore -4 \notin A, 2 \notin A$

又 $(A \cap B) \supset \emptyset$, 即 $A \cap B$ 不是空集, $\therefore 3 \in A$

即 3 是方程 $x^2 - ax + a^2 - 19 = 0$ 的一个根

有 $9 - 3a + a^2 - 19 = 0$, 解得 $a = -2$ 或 $a = 5$

当 $a = 5$ 时, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$ 与 $2 \notin A$ 矛盾, 故舍去

当 $a = -2$ 时, $A = \{x | x^2 + 2x - 15 = 0\} = \{3, -5\}$

综上所述: $a = -2, A = \{3, -5\}$

说明: 对这类问题, 无论是否要求求出集合 A , 都必须将 a 值代入验证是否都符合题设条件.



理解与迁移 · 习题 1-1

1. (2002 年 · 全国) 设集合 $M = \left\{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $N = \left\{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 则 ()

A. $M = N$ B. $M \subsetneq N$ C. $M \supsetneq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

2. (2004 年 · 天津文史) 设集合 $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $Q = \{x \in \mathbf{R} | 2 \leq x \leq 6\}$, 那么下列结论正确的是 ()

A. $P \cap Q = P$ B. $P \cap Q \supsetneq Q$

C. $P \cup Q = Q$ D. $P \cap Q \subsetneq P$

3. 已知集合 $A = \{a | a = m^2 + 1, m \in \mathbf{N}\}$, $B = \{b | b = n^2 - 4n + 5, n \in \mathbf{N}\}$, 则 A, B 之间的关系是_____

4. 已知集合 $P = \{x | (x+2)(4-x) \geq 0\}$, $N = \{x | 2 - |x-a| > 0\}$, 若 $N \subset P$, 求实数 a 的取值范围.

5. 已知集合 $A = \{x | x^2 + (p+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 且 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$, 求实数 p 的取值范围.

6. 已知两正整数集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2\}$ 满足 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. 若 $A \cap B = \{a_1, a_4\}$, $a_1 + a_4 = 10$ 且 $A \cup B$ 中所有元

素之和为 124, 求 $a_1 + a_4 + a_2^2 + a_3^2$ 的值.

二、集合运算的方法与技巧



疑难解析

集合的运算多种多样, 主要是理解并掌握交、并、补、子集等概念, 运算性质、运算律及运算法则, 做到无遗漏、无重复. 同时要注意充分利用集合的表示法.

集的运算规律 设 A, B, C 都是集合, 则有

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

结合律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

德·摩根律 $\complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$

$\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$

说明: 1. 任何一个集合是它本身的子集. $A \subseteq A$

空集是任何集合的子集. $\emptyset \subseteq A$

空集是任何非空集合的真子集. $\emptyset \subsetneq A \neq \emptyset$

对于集合 A, B, C , 如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 那么 $A \subseteq C$

对于集合 A, B, C , 如果 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$, 那么 $A \subsetneq C$

2. 对于任何集合 A, B , 有

$A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A$

$A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A$

对任意两个有限集合 A, B , 有

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

3. 对任何集合 A , 有

$I \cup A = I, I \cap A = A$

$A \cup (\complement_U A) = I, A \cap (\complement_U A) = \emptyset$



例题解析

例 1 已知全集 $I = \{x | x \text{ 为小于20 的正奇数}\}$, $A \cap (\complement_I B) = \{3, 7, 15\}$, $(\complement_I A) \cap B = \{13, 17, 19\}$, $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \emptyset$, 求集合 A 和 B .

分析: 借助于文氏图, 根据 $A \cap (\complement_I B)$ 、 $(\complement_I A) \cap B$ 、 $(\complement_I A) \cap (\complement_I B)$ 的含义, 将各集合所有元素填入有关区域内, 从而确定全集中每个元素的属向, 即可求得 A 和 B .

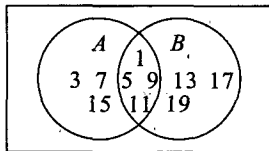


图 1-1

解: 如图 1-1 可得

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15\}$$

$$B = \{1, 5, 9, 11, 13, 17, 19\}$$

例 2 定义 $A - B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \notin B\}$, 若 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 4, 8\}$, 则 $A - B$ 等于 ()

A. $\{4, 8\}$

B. $\{1, 2, 6, 10\}$

C. $\{1\}$

D. $\{2, 6, 10\}$

分析: 考查元素集合的从属关系, 按新定义运算. 注意理解 $A - B$ 的元素是属于 A 但不属于 B 的元素组成的. 新的定义与补集的区别是 A 可以不包含 B .

解: $A - B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \notin B\} = \{2, 6, 10\}$

答案: D

例 3 (2004 年·全国卷 II) 已知集合 $M = \{x | x^2 < 4\}$, $N = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则集合 $M \cap N = ()$

A. $\{x | x < -2\}$

B. $\{x | x > 3\}$

C. $\{x | -1 < x < 2\}$

D. $\{x | 2 < x < 3\}$

分析: 本题考查一元二次不等式的解和交集运算. 要注意一元二次不等式求解时, 当 $a > 0$ 时, 记住“大于取两边, 小于取中间”, 交集是取公共部分.

解: $M = \{x | -2 < x < 2\}$, $N = \{x | -1 < x < 3\}$

$\therefore M \cap N = \{x | -1 < x < 2\}$

答案: C

例 4 已知

$$A = \{a \mid a = 8n + 12m + 4s, n, m, s \in \mathbb{Z}\},$$

$$B = \{b \mid b = 20p + 16q + 12r, p, q, r \in \mathbb{Z}\},$$

证明: $A = B$.

分析: 根据相等集的概念, 证明 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$.

证明: 对于 A 中任一元素 $a = 8n + 12m + 4s = 20n + 16s + 12(m - n - s)$

$$\because n, m, s \in \mathbb{Z} \quad \therefore m - n - s \in \mathbb{Z}$$

$$\text{则 } a \in B \quad \therefore A \subseteq B$$

对于 B 中任一元素

$$\begin{aligned} b &= 20p + 16q + 12r \\ &= 12r + 8 \cdot (2q) + 4 \cdot (5p) \end{aligned}$$

$$\because p, q, r \in \mathbb{Z} \quad \therefore 2q, 5p \in \mathbb{Z}$$

$$\text{则 } b \in A \quad \therefore B \subseteq A$$

故 $A = B$

例 5 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{1}{2} < x < \frac{3}{5} \text{ 或 } x > \frac{3}{2}\right\}$, $B = \{x \mid (x+1)^2 \geq a^4\}$,

且 $A \not\subseteq B$. 求实数 a 的取值范围.

分析: 根据真子集的概念得出集合 B 的所有情况, 再分类确定参数 a 的取值范围.

$$\text{解: 由 } (x+1)^2 \geq a^4, \text{ 得 } x \geq a^2 - 1 \text{ 或 } x \leq -a^2 - 1$$

$$\therefore B = \{x \mid x \geq a^2 - 1 \text{ 或 } x \leq -a^2 - 1\}$$

$$\text{由于 } A \not\subseteq B \iff a^2 - 1 \leq \frac{1}{2} \text{ 或 } -a^2 - 1 = -a^2 - 1$$

$$\text{或 } \begin{cases} a^2 - 1 \leq \frac{3}{2} \\ -a^2 - 1 \geq \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\text{由 } a^2 - 1 \leq \frac{1}{2}, \text{ 解得 } -\frac{\sqrt{6}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{由 } -a^2 - 1 = -a^2 - 1, \text{ 解得 } a = 0$$

$$\text{由 } \begin{cases} a^2 - 1 \leq \frac{3}{2} \\ -a^2 - 1 \geq \frac{3}{5} \end{cases} \text{ 得 } a \text{ 无实数解}$$



$\therefore a$ 的取值范围是 $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

例 6 关于实数 x 的不等式 $\left|x - \frac{(a+1)^2}{2}\right| \leq \frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^3 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0$ (其中 $a \in \mathbf{R}$) 的解集依次记为 A 与 B , 求使 $A \subseteq B$ 的 a 的取值范围.

分析: 本题主要考查绝对值不等式、二次不等式及分类讨论思想. 本题解答时需先解不等式求出集合 A 、 B , 再由 $A \subseteq B$ 的关系求解.

解: 由 $\left|x - \frac{(a+1)^2}{2}\right| \leq \frac{(a-1)^2}{2}$, 得

$$-\frac{1}{2}(a-1)^2 \leq x - \frac{(a+1)^2}{2} \leq \frac{1}{2}(a-1)^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}[(a+1)^2 - (a-1)^2] \leq x \leq \frac{1}{2}[(a+1)^2 + (a-1)^2]$$

$$\therefore A = \{x | 2a \leq x \leq a^2 + 1\}$$

$$\text{由 } x^3 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0$$

$$\text{得 } (x-2)[x - (3a+1)] \leq 0$$

$$\text{当 } 3a+1 \geq 2 \text{ 即 } a \geq \frac{1}{3} \text{ 时, 得 } B = \{x | 2 \leq x \leq 3a+1\}$$

$$\text{当 } 3a+1 < 2 \text{ 即 } a < \frac{1}{3} \text{ 时, } B = \{x | 3a+1 \leq x \leq 2\}$$

$$\therefore \text{当 } a \geq \frac{1}{3} \text{ 时, 若使 } A \subseteq B \text{ 成立, 只要 } \begin{cases} 2a \geq 2 \\ a^2 + 1 \leq 3a+1 \end{cases} \text{ 解得 } 1 \leq a \leq 3$$

$$\text{当 } a < \frac{1}{3} \text{ 时, 若使 } A \subseteq B \text{ 成立, 只要 } \begin{cases} 2a \geq 3a+1 \\ a^2 + 1 \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = -1$$

综上, 使 $A \subseteq B$ 成立的 a 的取值范围是

$$\{a | 1 \leq a \leq 3, \text{ 或 } a = -1\}$$



理解与迁移 · 习题 1-2

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 4 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, $C = \{x | x^2 - mx + 4 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, $A \cap C = C$, 求实数 a, m 的值.

提示: 利用交集和并集的性质得出 B, C 的所有情况, 再分类确定参数