研究生教学用书

李群基础（第二版）

黄宣国 编著

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

研究生教学用书

李群基础（第二版）

黄宣国 编著

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

李群基础/黄宣国编著. —2 版. —上海:复旦大学出版社,
2007.5
研究生教学用书
ISBN 978-7-309-05465-1

Ⅰ. 李… Ⅱ. 黄… Ⅲ. 李群-研究生-教学参考资料 Ⅳ. 0152.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 048096 号

李群基础(第二版)
黄宣国 编著

出版发行 复旦大学**出版社** 上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65118853(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@ fudanpress. com http://www. fudanpress. com

责任编辑 范仁梅
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印 刷 同济大学印刷厂
开 本 787×960 1/16
印 张 16.25
字 数 300 千
版 次 2007 年 5 月第二版第一次印刷
印 数 1—3 100

书 号 ISBN 978-7-309-05465-1/O·393
定 价 26.00 元

内容提要

本书是作者在多年来讲授“李群与李代数”课程讲义的基础上逐步修改而成的，是一本李群与李代数的入门教材.全书包括：微分流形的简单叙述、拓扑群的扼要理论、李群和李代数的基础知识、半单纯李代数的基本内容、李群和李代数表示理论介绍等.为适合读者阅读，本书在第一版基础上进行了修改、补充，并在第三、第四、第五章增补了适量的习题.

本书可供从事数学研究的大学教师和研究生阅读，可作为硕士研究生的教材，也可供从事理论物理研究的专业人员参考.

第二版前言

拙作《李群基础》出版已 11 年了. 最近在复旦大学出版社的大力支持下，我决定对原书进行修订增补. 除了对原书上的一些小错误进行修正外，主要增补了下述内容：第一章 §1 增加了一个例子 Grassmann 流形；第三章 §6 增加了关于 Euclid 空间内星形区域的有关外微分的 Poincaré 定理；第四章增加了整整一节，§4 紧致连通李群的极大子环群. 由于要尽量降低阅读难度，适合更多的读者，因此，§4 不涉及完备 Riemann 流形或者流形间映射的拓扑度等知识，这一节的构思及写作花费了我近 1 个月的时间，同时查阅了不少有关书籍；第三章、第四章及第五章增补了一些习题.

现在呈现在读者面前的这本《李群基础》(第二版)，可以作为大学硕士研究生一年级全年的教材，每周 3 节课，两个学期完全可以将全书讲完.

王安石在《游褒禅山记》中写道："夫夷以近，则游者众；险以远，则至者少。而世之奇伟瑰怪非常之观常在于险远。"热爱数学的人们只有不避艰险，才有希望到达光辉的顶峰. 热爱数学的人们，努力呀！

编著者

2006 年 5 月

前　　言

1978年2月,我考入复旦大学数学研究所攻读微分几何.导师胡和生教授主持了一个讨论班,学习谷超豪教授著的《齐性空间微分几何学》一书的第一章至第四章.在1981年3月,我获得硕士学位,当时胡和生教授在数学系主讲李群,我作辅导.我的李群知识就是从这时开始逐步积累起来的.

在导师胡和生教授的不断鼓励下,我花了约1年时间,编写了《李群讲义》,并且在数学研究所对一年级硕士研究生讲授过多次.在此基础上,将讲义逐步修改成书.

凭我自己的体会,学位基础课(一学期)《李群与李代数》应在硕士生一年级第二学期开设,这时学生已有了微分流形、抽象代数和代数拓扑等基础知识,再开始学习李群和李代数,效果较佳.作为一学期的课程,本书可以从第二章拓扑群开始讲起,每周3节课,共18周时间,可把第二章、第三章和第四章大部分内容讲完.

第三章的许多习题是我多年来主讲《李群与李代数》课程考试用的试题,有助于学生灵活掌握第三章基本内容.

第五章内容很少,是李代数和李群表示论的引言,可以作为一年级硕士生在暑假里阅读的材料,所以第五章后面无习题.

感谢复旦大学数学研究所的领导和复旦大学研究生院,在他们的推荐和支持下,本书得以出版.

编著者

1993年12月

目　　录

第一章 微分流形

§1 微分流形

m 维 Euclid 空间 R^m 和它的开子集 U 是众所周知的空间. 在这一节我们将发现许多复杂的空间是由 R^m 中的一些开子集拼接而成的.

M 是一个 Hausdorff 空间, 对于 M 内某一点 a, 如果存在 M 内一个包含 a 的开集 U_a, 它同胚于 R^m 内某个开子集 U, 即存在同胚 $\varphi_a: U_a \to U$, 我们称 M 在点 a 是 m 维局部 Euclid 的. 称 (U_a, φ_a) 为 M 内(含 a)的一个坐标图.

定义 1.1 M 是 Hausdorff 空间, 如果 M 内任一点都是 m 维局部 Euclid 的, 则称 M 为一个 m 维流形.

M 是一个 m 维流形, $\forall$ (表示任意) $a \in M$, 有一个包含 a 的开集 U_a, φ_a 为 U_a 到 R^m 的某个开子集上的一个同胚, (U_a, φ_a) 为含 a 的一个坐标图, 称 U_a 为坐标邻域, 称 φ_a 为局部坐标映射, 所有的 U_a 之并覆盖 M, m 称为流形的维数. 当 $U_a \cap U_b \neq \varnothing$ 时,

$$\forall p \in U_a \cap U_b,\ \varphi_a(p) = (x_1(p), \cdots, x_m(p)),$$

称 $x_i(p)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 为在坐标图 (U_a, φ_a) 里点 p 的局部坐标. 类似地有 $\varphi_b(p) = (y_1(p), \cdots, y_m(p))$. 于是, 我们有一个点 p 的局部坐标之间的变换:

$$(x_1(p), \cdots, x_m(p)) \underset{\varphi_a\varphi_b^{-1}}{\overset{\varphi_b\varphi_a^{-1}}{\rightleftarrows}} (y_1(p), \cdots, y_m(p)),$$

这里 φ_a^{-1}, φ_b^{-1} 分别表示 φ_a, φ_b 的逆映射. 上述对应是 $\varphi_a(U_a \cap U_b)$ 和 $\varphi_b(U_a \cap U_b)$ 之间的同胚对应. 于是可以写成

$$y_i(p) = f_i(x_1(p), \cdots, x_m(p)),\ x_i(p) = g_i(y_1(p), \cdots, y_m(p)).$$

由于 p 是 $U_a \cap U_b$ 中的任一点, 因此在上面的表示式中, 一般省略 p, 写成函数

$$y_i = f_i(x_1, \cdots, x_m),\ x_i = g_i(y_1, \cdots, y_m).$$

当 p 固定时，如果 m 个函数 f_i 在点 $(x_1(p), \cdots, x_m(p))$ 处是 C^∞ 的，m 个函数 g_i 在点 $(y_1(p), \cdots, y_m(p))$ 处也是 C^∞ 的，则称坐标图 (U_a, φ_a) 和 (U_b, φ_b) 在点 p 是 C^∞ 相关的. $\forall p \in U_a \cap U_b$，若 (U_a, φ_a) 和 (U_b, φ_b) 在点 p C^∞ 相关，则称这两个坐标图 C^∞ 相关. 当 $U_a \cap U_b = \varnothing$ 时，也称这两个坐标图 C^∞ 相关. Hausdorff 空间内两个坐标图 C^∞ 相关可完全同样地定义.

定义 1.2 设 M 是一个 Hausdorff 空间，M 上的微分结构就是在 M 内的具有下列性质的一族坐标图 $F = \{(U_a, \varphi_a), a \in M\}$：

(1) F 内全体 U_a 覆盖 M，$\varphi_a(U_a)$ 是 R^m(m 固定)内的一个开子集；

(2) F 内任两个坐标图 C^∞ 相关；

(3) 如 M 内的某个坐标图 (U, φ) 与 F 的所有坐标图 C^∞ 相关，则 $(U, \varphi) \in F$.

显然，具有微分结构的 Hausdorff 空间必定为一个流形. 具有微分结构的 m 维流形称为 m 维微分流形.

如果 F 只具有性质(1)、(2)，则称 F 为覆盖 M 的一族 C^∞ 坐标图. 如果 F 具有性质(1)、性质(2)和性质(3)，则称 F 为最大 C^∞ 坐标图族. F 内每个坐标图称为可容许坐标图，简称(微分流形)M 内坐标图.

定理 1 设 M 是一个 Hausdorff 空间，F 为覆盖 M 的一族 C^∞ 坐标图，则 F 唯一确定一个包含 F 本身的最大 C^∞ 坐标图族.

证明 记 M 内与 F 的所有坐标图 C^∞ 相关的一切坐标图族为 F^*. 显然 $F \subset F^*$. 下面证明 F^* 满足性质(1)、性质(2)和性质(3).

由于 $F \subset F^*$，F^* 内坐标邻域全体覆盖 M，则有性质(1). 在 F^* 内任取两个坐标图 (U_a, φ_a)，(U_b, φ_b)，如果 $U_a \cap U_b = \varnothing$，则上述两坐标图 C^∞ 相关. 如果 $U_a \cap U_b \neq \varnothing$，$\forall p \in U_a \cap U_b$，由于 F 具有性质(1)，存在 F 内坐标图 (V, ψ)，$p \in V$，(U_a, φ_a) 与 (V, ψ) 在点 p C^∞ 相关，(U_b, φ_b) 与 (V, ψ) 在点 p 也 C^∞ 相关. 由 C^∞ 相关的定义容易知道，(U_a, φ_a) 与 (U_b, φ_b) 在点 p 是 C^∞ 相关的(利用 C^∞ 函数的 C^∞ 函数还是 C^∞ 函数这一性质). 由于 p 的任意性，因此，F^* 具有性质(2). 如果 (U, φ) 是与 F^* 的所有坐标图 C^∞ 相关的一个坐标图，则由 $F \subset F^*$ 知，(U, φ) 与 F 的所有坐标图 C^∞ 相关，即 $(U, \varphi) \in F^*$，F^* 具有性质(3).

如果另有一个 $\widetilde{F}$ 也是包含 F 的具有性质(1)、性质(2)和性质(3)的 C^∞ 坐标图族，那么 $\widetilde{F}$ 内的任一坐标图必与 F 内任一坐标图 C^∞ 相关，则 $\widetilde{F} \subset F^*$. 对于 F^* 内的任一坐标图，类似前面可证：它必与 $\widetilde{F}$ 内任一坐标图 C^∞ 相关，所以有 $\widetilde{F} = F^*$.

例如，在 n 维 Euclid 空间 R^n 中，$\forall x \in R^n$，$x = (x_1, \cdots, x_n)$，定义局部坐标映射 φ 为恒等映射，即 $\varphi(x) = (x_1, \cdots, x_n)$. 于是 (R^n, φ) 就是覆盖 R^n 的 C^∞ 坐标图，由定理 1，可确定 R^n 为一个 n 维微分流形.

又如，R^n 的任何开子集 N 是一个 n 维微分流形. 利用上例中恒等映射 φ，则

(N, φ)就是覆盖 N 的一个 C^∞ 坐标图.

下面我们再举一些微分流形的例子.

例 1 $GL(n, R)$表示 $n\times n$ 可逆实矩阵的全体,称为实一般线性群. 证明 $GL(n, R)$是一个 n^2 维微分流形.

证明 因为在矩阵乘法下,$GL(n, R)$的确是一个群. 用 M_n 表示 $n\times n$ 实矩阵全体, $\forall A\in M_n$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

令 $\varphi(A)=(a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{n1}, \cdots, a_{nn})$, 这里 a_{ij} 是实数. 于是, φ 是 M_n 到 R^{n^2} 上的一个 1—1 对应. 在 M_n 上赋予拓扑,M_n 的一个集合 U 称为开集,当且仅当 $\varphi(U)$是 R^{n^2} 内的一个开集. 于是 φ 为 M_n 到 R^{n^2} 上的一个同胚. (M_n, φ)就是覆盖 M_n 的一个 C^∞ 坐标图. M_n 是一个 n^2 维的微分流形. 以后我们经常讲 M_n 等同于 R^{n^2},就是指在上述意义下两者的关系. 求行列式值的运算 $\det: M_n\to R$ 是一个连续映射,易知

$$GL(n, R)=M_n-\det^{-1}(0),$$

$GL(n, R)$是 M_n 的一个开子集. $(GL(n, R), \varphi)$就是覆盖 $GL(n, R)$的一个C^∞ 坐标图,因此,$GL(n, R)$是一个 n^2 维微分流形.

例 2 n 维球面

$$S^n(1)=\left\{(a_1, \cdots, a_{n+1})\in R^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n+1} a_j^2=1\right\}.$$

证明 $S^n(1)$是一个 n 维微分流形.

证明 令 $p=(0, \cdots, 0, 1)$ 是北极,$q=(0, \cdots, 0, -1)$ 是南极. 开集 $U(p)=S^n(1)-\{p\}$ 和 $U(q)=S^n(1)-\{q\}$ 之并覆盖 $S^n(1)$. 下面定义映射 φ 和 ψ,使得$(U(p), \varphi)$和$(U(q), \psi)$是覆盖 $S^n(1)$的两个 C^∞ 坐标图. 映射 φ 和 ψ 由球极投影确定.

$\forall a\in U(p)$, 记 λ 是由点 p 和 a 确定的直线,π 是 R^{n+1}内由 $x_{n+1}=0$ 确定的超平面, $\pi(a)$表示 R^{n+1}内直线 λ 和 π 相交的点. 当 $a=(a_1, \cdots, a_{n+1})$ 时,易得 $\pi(a)=(x_1, \cdots, x_n, 0)$,这里 $x_i=\dfrac{a_i}{1-a_{n+1}}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. 令

$$\varphi(a)=(x_1, \cdots, x_n)=\left(\frac{a_1}{1-a_{n+1}}, \cdots, \frac{a_n}{1-a_{n+1}}\right),$$

φ 是 $U(p)$ 到 R^n 上的一个同胚. 因为如果$(x_1, \cdots, x_n)$已知,则由计算可得

$$a = \left(\frac{2x_1}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}, \frac{2x_2}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}, \cdots, \frac{2x_n}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}, \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}\right).$$

类似地,定义

$$\psi: U(q) \to R^n, \ \psi((a_1, \cdots, a_{n+1})) = (y_1, \cdots, y_n),$$

这里 $y_i = \dfrac{a_i}{1+a_{n+1}}$. 如果$(y_1, \cdots, y_n)$已知,则

$$a = \left(\frac{2y_1}{1+\sum_{i=1}^n y_i^2}, \cdots, \frac{2y_n}{1+\sum_{i=1}^n y_i^2}, \frac{1-\sum_{i=1}^n y_i^2}{1+\sum_{i=1}^n y_i^2}\right).$$

由于

$$U(p) \cap U(q) = S^n(1) - (\{p\} \cup \{q\}),$$
$$\forall\, a \in U(p) \cap U(q), \ \varphi(a) = (x_1, \cdots, x_n),$$
$$\psi(a) = (y_1, \cdots, y_n),$$

而

$$y_i = \frac{a_i}{1+a_{n+1}} = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \ x_i = \frac{a_i}{1-a_{n+1}} = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^n y_i^2},$$

因此,$\psi\varphi^{-1}$ 和 $\varphi\psi^{-1}$ 都是 C^∞,于是 $S^n(1)$是一个 n 维微分流形.

下面的例子是有趣的.

例 3 在 $R^{n+1}-\{0\}$(这里 0 表示 R^{n+1} 内的原点)上,定义点与点之间的一个关系"~", $x \sim y$ 当且仅当存在非零的实数 t,满足 $y = tx$. 用分量表示,记

$$x = (x_1, \cdots, x_{n+1}), \ y = (y_1, \cdots, y_{n+1}),$$

则 $y_i = tx_i$, "~"是一个等价关系. 记 x 的等价类为$[x]$,或记为$[(x_1, \cdots, x_{n+1})]$. 把每个等价类作为一点,记等价类的全体为 $P_n(R)$,称 $P_n(R)$为 n 维实射影空间,则有一个自然映射

$$\pi: R^{n+1} - \{0\} \to P_n(R), \ \pi(x_1, \cdots, x_{n+1}) = [(x_1, \cdots, x_{n+1})].$$

在 $P_n(R)$上赋予商拓扑,即 $U^* \subset P_n(R)$ 是开集, 当且仅当 $\pi^{-1}(U^*)$在

$R^{n+1}-\{0\}$内是开集. 因而 π 是连续的, 且 $\pi^{-1}(\pi(U))=\bigcup_{t\in R-\{0\}} tU$. 这里 $tU=\{(tx_1,\cdots,tx_{n+1})\mid(x_i,\cdots,x_{n+1})\in U\}$, $R-\{0\}$表示非零实数的全体. 由 tU 同胚于 U 可知: 当 U 是 $R^{n+1}-\{0\}$ 内的一开集时, $\pi^{-1}(\pi(U))$是开集, 则 $\pi(U)$是开集. 因此 π 是开映射. 由此可以直接证明 $P_n(R)$是 Hausdorff 空间, 这个证明留给读者.

令 $U_\alpha=\{[(x_1,\cdots,x_{n+1})]\in P_n(R)\mid x_\alpha\neq 0\}$, $1\leqslant\alpha\leqslant n+1$. 每个 U_α 是 $P_n(R)$内的开集, $P_n(R)=\bigcup_{\alpha=1}^{n+1}U_\alpha$. 定义

$$h_\alpha: U_\alpha\to R^n,\ h_\alpha[(x_1,\cdots,x_{n+1})]=\left(\frac{x_1}{x_\alpha},\cdots,\frac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha},\frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha},\cdots,\frac{x_{n+1}}{x_\alpha}\right).$$

显然, h_α 是有确定意义的. 定义

$$h_\alpha^*:\pi^{-1}(U_\alpha)\to R^n,\ h_\alpha^*(x_1,\cdots,x_{n+1})=\left(\frac{x_1}{x_\alpha},\cdots,\frac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha},\frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha},\cdots,\frac{x_{n+1}}{x_\alpha}\right),$$

易知 h_α^* 是连续的开映射. 从 $\pi^{-1}h_\alpha^{-1}(U)=h_\alpha^{*-1}(U)$ 和 $h_\alpha(U^*)=h_\alpha\pi(\pi^{-1}(U^*))=h_\alpha^*(\pi^{-1}(U^*))$ 可知, h_α 是连续的开映射. 又 h_α 是 1—1 的, 所以 $h_\alpha: U_\alpha\to h_\alpha(U_\alpha)$ 是一个同胚. 因此(U_α, h_α)是 $P_n(R)$内的一个坐标图.

如果 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$, $\forall[(x_1,\cdots,x_{n+1})]\in U_\alpha\cap U_\beta$, $x_\alpha x_\beta\neq 0$, 不妨设 $\alpha>\beta$. 于是我们有局部坐标变换:

$$(x_1^*,\cdots,x_n^*)=\left(\frac{x_1}{x_\beta},\cdots,\frac{x_{\beta-1}}{x_\beta},\frac{x_{\beta+1}}{x_\beta},\cdots,\frac{x_{n+1}}{x_\beta}\right)$$

$$\underset{h_\beta h_\alpha^{-1}}{\overset{h_\alpha h_\beta^{-1}}{\rightleftarrows}}\left(\frac{x_1}{x_\alpha},\cdots,\frac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha},\frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha},\cdots,\frac{x_{n+1}}{x_\alpha}\right)=(y_1^*,\cdots,y_n^*).$$

显然,

$$y_1^*=\frac{x_1^*}{x_{\alpha-1}^*}\left(\text{注意 } x_{\alpha-1}^*=\frac{x_\alpha}{x_\beta}\right),\cdots,y_{\beta-1}^*=\frac{x_{\beta-1}^*}{x_{\alpha-1}^*},\ y_\beta^*=\frac{1}{x_{\alpha-1}^*},$$

$$y_{\beta+1}^*=\frac{x_\beta^*}{x_{\alpha-1}^*},\cdots,y_{\alpha-1}^*=\frac{x_{\alpha-2}^*}{x_{\alpha-1}^*},\ y_\alpha^*=\frac{x_\alpha^*}{x_{\alpha-1}^*},\cdots,y_n^*=\frac{x_n^*}{x_{\alpha-1}^*}.$$

于是, $y_i^*(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 $x_1^*,\cdots,x_n^*$ 的 C^∞ 函数. 类似地, x_i^* 也是 $y_1^*,\cdots,y_n^*$ 的 C^∞ 函数, (U_α,h_α)与(U_β,h_β)是 C^∞ 相关的. 所以, $\{(U_\alpha,h_\alpha)\mid 1\leqslant\alpha\leqslant n+1\}$ 是覆盖 $P_n(R)$ 的一族 C^∞ 坐标图, 由定理 1 可知, $P_n(R)$为一个 n 维微分流形.

例 4 在 R^{n+1} 上给定一个 C^∞ 函数 $f(x_1,\cdots,x_{n+1})$. 集合

$$M=\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\in R^{n+1}\mid f(x_1,\cdots,x_{n+1})=0\}.$$

如果 M 不是空集, 且

$$\forall (x_1^0, \cdots, x_{n+1}^0) \in M, \frac{\partial f}{\partial x_i} (1 \leqslant i \leqslant n+1)$$

在$(x_1^0, \cdots, x_{n+1}^0)$处不全为零，则 M 是一个 n 维微分流形.

证明 令 $U_i = \left\{(x_i, \cdots, x_{n+1}) \in R^{n+1} \middle| \frac{\partial f(x_1, \cdots, x_{n+1})}{\partial x_i} \neq 0\right\}$. U_i 是 R^{n+1} 内的开集. 易得 $\bigcup_{i=1}^{n+1} (U_i \cap M) = M$. M 作为 R^{n+1} 内的子空间，是一个 Hausdorff 空间，$U_i \cap M$ 是 M 内的开集. 下面对于非空的 $U_i \cap M$ 构造坐标图.

$\forall x^0 = (x_1^0, \cdots, x_{n+1}^0) \in U_i \cap M$，则$\frac{\partial f}{\partial x_i}$在 x^0 不为零. 对于 $f(x_1, \cdots, x_{n+1}) = 0$，由隐函数存在定理，一定有 R^{n+1} 内的一个包含点 x^0 的开集 V 和包含点$(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \cdots, x_{n+1}^0)$的 R^n 的开集 V^*，使得在 V^* 上，有

$$x_i = g_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}),$$

g_i 是 V^* 上的 C^∞ 函数，且有 $x_i^0 = g_i(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \cdots, x_{n+1}^0)$. 另外，在 $V \cap U_i \cap M$上，点可以写成

$$(x_1, \cdots, x_{i-1}, g_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}), x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}),$$

由此构造出坐标图 $(V \cap U_i \cap M, \varphi_i^V)$，$\forall (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in V \cap U_i \cap M$，

$$\varphi_i^V(x_1, \cdots, x_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}).$$

易知，φ_i^V 是到 R^n 内的一个 1—1 的、连续的开映射，则 φ_i^V 是 $V \cap U_i \cap M$ 到 $\varphi_i^V(V \cap U_i \cap M)$ 上的一个同胚. 因此，对于 $\forall x^0 \in U_i \cap M$，我们有了 M 内一个包含 x^0 的开集 $V \cap U_i \cap M$ 和相应的坐标图$(V \cap U_i \cap M, \varphi_i^V)$. 显然，$(V \cap U_i \cap M, \varphi_i^V)$与$(W \cap U_i \cap M, \varphi_i^W)$是$C^\infty$相关的. 对不同的 i, j，设 $i<j$，如果 $(V \cap U_i \cap M) \cap (W \cap U_j \cap M) \neq \varnothing$，取其交集内的任一点 $x = (x_1, \cdots, x_{n+1})$，则有

$$\varphi_i^V(x) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}),$$
$$x_i = g_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}),$$
$$\varphi_j^W(x) = (x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_{n+1}),$$
$$x_j = g_j(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_{n+1}).$$

g_i，g_j 都是 C^∞ 函数，则局部坐标有变换关系：

$$(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_j, \cdots, x_{n+1}) \underset{\varphi_i^V \varphi_j^{W-1}}{\overset{\varphi_j^W \varphi_i^{V-1}}{\rightleftarrows}} (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_{n+1}),$$

从 g_i，g_j 都是C^∞函数可知，两坐标图 $(V\cap U_i\cap M, \varphi_i^V)$ 和$(W\cap U_j\cap M, \varphi_j^W)$ 是 C^∞相关的. 因此，M 是一个 n 维微分流形.

例如，R^3 内环面

$$T=\{(x, y, z)\in R^3 \mid f(x, y, z)=(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2-r^2=0\},$$

这里常数 $a>r>0$. 由计算可得在环面 T 上任一点处，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2=4r^2>0,$$

因此$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$和$\frac{\partial f}{\partial z}$在 T 上任一点处不全为零，从而 T 是一个二维微分流形.

又如，$SL(n, R)=\{A\in M_n \mid \det A=1\}$. 令

$$A=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

记

$$f(x_{11}, \cdots, x_{1n}, \cdots, x_{n1}, \cdots, x_{nn})=\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{n1} \end{vmatrix}-1,$$

则 $\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}=A_{ij}$，这里 A_{ij} 是 A 的行列式的第 i 行、第 j 列的代数余子式. 由于在 $SL(n, R)$ 上，对任意固定的 i，有 $\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}A_{ij}=1$，则 A_{ij} 不可能同时为零. 所以，$SL(n, R)$是一个 n^2-1 维微分流形. 称 $SL(n, R)$为实单模群.

例 5 设 M 与 N 分别是 m 维与 n 维的两个微分流形，我们能够作出它们的拓扑积 $M\times N$，这就是由点偶(p, q)的全体组成的集合，这里 $p\in M$，$q\in N$. $M\times N$ 的拓扑是用集合 $U\times V$ 作为基来生成的，此处 U，V 分别是 M，N 的任一开集. 证明：有一种很自然的方式，可定义 $M\times N$ 为一个微分流形.

证明 $\forall (p_0, q_0)\in M\times N$，此处 $p_0\in M$，$q_0\in N$. 由于 M 是微分流形，则有含 p_0 的坐标图(U, φ). 同样，N 内有含 q_0 的坐标图(V, ψ). 定义 $M\times N$ 内含(p_0, q_0)的坐标图 $(U\times V, \varphi\times\psi)$，$\forall (p, q)\in U\times V$，

$$\varphi\times\psi(p, q)=(\varphi(p), \psi(q)), \ \varphi\times\psi(U\times V)=\varphi(U)\times\psi(V)$$

为 R^{m+n} 内的一个开子集，$\varphi\times\psi$ 是一个同胚. 如果对两个坐标图 $(U\times V, \varphi\times\psi)$ 和$(U^*\times V^*, \varphi^*\times\psi^*)$，$(U\times V)\cap(U^*\times V^*)\neq\varnothing$，在上述交集内任取点偶

(p, q), $\varphi\times\psi(p, q) = (\varphi(p), \psi(q))$, $\varphi^*\times\psi^*(p, q) = (\varphi^*(p), \psi^*(q))$, (U, φ)与(U^*, φ^*)是C^∞相关的,(V, ψ)与(V^*, ψ^*)也是C^∞相关的,然而$\varphi(p)$与$\psi^*(q)$无关,$\varphi^*(p)$也与$\psi(q)$无关,则$(U\times V, \varphi\times\psi)$和$(U^*\times V^*, \varphi^*\times\psi^*)$的确是$C^\infty$相关的.所以,$M\times N$是一个$m+n$维的微分流形.

例如,圆周$S^1(1)$是一个一维微分流形,则$T^n = S^1(1)\times\cdots\times S^1(1)$($n$个$S^1(1)$相乘)是$n$维微分流形,称为$n$维环面.又例如,$R^p\times S^{n-p}(1)$ $(1\leqslant p\leqslant n-1)$也是$n$维微分流形,称为$n$维超柱面.

例 6 Grassmann 流形$G(k, n)$,这里k, n是两个正整数,且$k<n$. 欧氏空间R^n内k个线性独立的向量$x_1 = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n})$, $x_2 = (x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n})$, $\cdots$, $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kn})$,这$k$个向量$\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$称为$R^n$内一个$k$维标架.它1—1对应于一个秩$k$的$k\times n$矩阵

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

为方便,简记$X = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$. 由于上述矩阵$X$是1—1对应于$R^{kn}$内一点$(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}, \cdots, x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kn})$,则所有$k\times n$矩阵组成的集合等同于欧氏空间$R^{kn}$. 这秩是$k$的所有$k\times n$矩阵组成的集合记为$F(k, n)$. $F(k, n)$是R^{kn}内一个开子集.

由于R^n的以原点为向量起点的k个线性独立的向量$x_1, x_2, \cdots, x_k$张成R^n内一个过原点的k维超平面,因此将这k维超平面抽象地看作集合$G(k, n)$内一点. $X = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$和$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$确定了同一张过原点的$k$维超平面,当且仅当存在一个$k\times k$的非退化的实矩阵$a = (a_{ij})$,满足$y_i = \sum_{j=1}^k a_{ij}x_j$,这里$1\leqslant i\leqslant k$. 上述关系式可简记为$Y = aX$. 在集合$F(k, n)$内引入一个关系"$\sim$", $Y\sim X$当且仅当存在一个$a\in GL(k, R)$,满足

$$Y = aX. \tag{1.2}$$

引入一个自然映射π: $F(k, n)\to G(k, n)$.

$$\pi(X) = [X]. \tag{1.3}$$

这里$[X] = [Y]$当且仅当关系式(1.2)成立.类似例3,在$G(k, n)$上赋予商拓扑.

记$J = \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$是$\{1, 2, \cdots, n\}$的一个子集,这里$1\leqslant j_1 < j_2 <$

$\cdots < j_k \leqslant n$. J^* 表示余子集,即

$$J \cup J^* = \{1, 2, \cdots, n\},\ J \cap J^* = \varnothing.$$

用 X_J 表示 $k \times n$ 矩阵 X 中对应 $\{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$ 列的 $k \times k$ 子矩阵

$$\begin{pmatrix} x_{1j_1} & x_{1j_2} & \cdots & x_{1j_k} \\ x_{2j_1} & x_{2j_2} & \cdots & x_{2j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{kj_1} & x_{kj_2} & \cdots & x_{kj_k} \end{pmatrix} \text{(参考表示式(1.1))},$$

用 X_{J^*} 表示矩阵 X 删去这个子矩阵后剩余的 $k \times (n-k)$ 子矩阵. 当子集 $J = \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$ 固定时, $F(k, n)$ 中具有下述性质的所有矩阵 X 组成一个集合 $\widetilde{U}_J$,每个 X 相应的 $k \times k$ 子矩阵 X_J 非退化. $\widetilde{U}_J$ 是 $F(k, n)$ 中一个开集. 记 $U_J = \pi(\widetilde{U}_J)$, U_J 是 $G(k, n)$ 中一个开集. 对 $\widetilde{U}_J$ 中每个 Y,一定存在相应的 $k \times k$ 矩阵 $Y_J \in GL(k, R)$,使得 $Y_J Y = X$,这里 $X \in \widetilde{U}_J$, 且 X 的 $k \times k$ 子矩阵

$$\begin{pmatrix} x_{1j_1} & x_{1j_2} & \cdots & x_{1j_k} \\ x_{2j_1} & x_{2j_2} & \cdots & x_{2j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{kj_1} & x_{kj_2} & \cdots & x_{kj_k} \end{pmatrix}$$

是一个单位矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. 这个 $k \times n$ 矩阵 X 删去这个单位矩阵得一个 $k \times (n-k)$ 矩阵 X_{J^*}. 类似本例开始时的叙述,将 X_{J^*} 看作 $R^{k(n-k)}$ 内一点, 可定义一个映射

$$\varphi_J : U_J \to R^{k(n-k)},\ \forall Y \in \widetilde{U}_J,\ \varphi_J([Y]) = X_{J^*}.$$

请读者自己证明:这个映射 φ_J 是有意义的, φ_J 是 U_J 到欧氏空间 $R^{k(n-k)}$ 上的一个同胚, 且 $G(k, n)$ 是 $k(n-k)$ 维的微分流形. $G(k, n)$ 称为 Grassmann 流形.

§2 切空间和余切空间

M 是一个 m 维微分流形, $W \subset M$ 为一个非空开集, 如果 $f: W \to R$ 是一个