朱文莉　代宏霞　谢果　王建忠● 编著

经济类院校基础课程本科系列教学辅导书

微积分（下册）习题解答

WEIJIFEN XITI JIEDA

西南财经大学出版社

朱文莉　代宏霞　谢果　王建忠 ● 编著

经济类院校基础课程本科系列教学辅导书

微积分（下册）习题解答

WEIJIFEN XITI JIEDA

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分(下册)习题解答/朱文莉,代宏霞,谢果,王建忠编著.—成都:西南财经大学出版社,2008.2
ISBN 978-7-81088-900-1

Ⅰ.微… Ⅱ.①朱…②代…③谢…④王… Ⅲ.微积分—高等学校—解题
Ⅳ.0172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 197252 号

微积分(下册)习题解答

朱文莉 代宏霞 谢果 王建忠 编著

责任编辑:于海生
封面设计:杨红鹰
责任印制:封俊川

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址:	http://www.xcpress.net
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电　　话:	028-87353785 87352368
印　　刷:	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸:	170mm×240mm
印　　张:	8.75
字　　数:	155 千字
版　　次:	2008 年 2 月第 1 版
印　　次:	2008 年 2 月第 1 次印刷
印　　数:	1—3000 册
书　　号:	ISBN 978-7-81088-900-1
定　　价:	13.80 元

前言

本书是西南财经大学出版社出版的《微积分》(下册)一书的配套教材，主要面向使用《微积分》(下册)教材的广大教师、学生和自学者，同时也可供报考经济类硕士研究生的考生作复习之用。

做习题是学习和领会课程基本内容必不可少的重要环节。通过练习，可以巩固和加深对教材基本原理的理解，提高综合分析能力，掌握解题技巧。

限于编者水平，加之时间仓促，本书不足与错误在所难免，恳请各位同仁专家和读者不吝赐教，以利我们进一步提高。

目 录

目录

第 1 章　多元函数微分学

习题 1.1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$A(1,-2,3)$，$B(2,3,-4)$，$C(2,-3,-4)$，$D(-2,-3,1)$.

解　A 点在第 Ⅳ 卦限；　　B 点在第 Ⅴ 卦限；

C 点在第 Ⅷ 卦限；　　D 点在第 Ⅲ 卦限.

2. 求与点 (a,b,c) 对称的点的坐标：

(1) 关于各坐标面；(2) 关于各坐标轴；(3) 关于坐标原点.

解　(1) 点 (a,b,c) 关于 xOy 面的对称点是 $(a,b,-c)$；关于 yOz 面的对称点是 $(-a,b,c)$；关于 xOz 面的对称点是 $(a,-b,c)$；

(2) 点 (a,b,c) 关于 x 轴的对称点是 $(a,-b,-c)$；关于 y 轴的对称点是 $(-a,b,-c)$；关于 z 轴的对称点是 $(-a,-b,c)$；

(3) 点 (a,b,c) 关于坐标原点的对称点是 $(-a,-b,-c)$.

3. 在 yOz 面上，求与三个已知点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 等距的点.

解　设点 $P(0,y,z)$ 与 A,B,C 三点等距.

则

$$|PA|^2 = 3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2;$$
$$|PB|^2 = 4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2;$$
$$|PC|^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2.$$

因为 $|PA|^2 = |PC|^2$，$|PB|^2 = |PC|^2$，所以

$$\begin{cases} 3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2 \\ 4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

解之得 $\begin{cases} y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$，故所求点为 $(0,1,-2)$.

4. 求下列旋转曲面的方程.

(1) 坐标面 xOz 上的抛物线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程;

(2) 坐标面 xOz 上的圆 $x^2 + z^2 = 9$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程;

(3) 坐标面 xOy 上的双曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 分别绕 x,y 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程.

解 (1) 抛物线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为

$$(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2 = 5x,$$

即

$$y^2 + z^2 = 5x.$$

(2) 圆 $x^2 + z^2 = 9$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2 = 9,$$

即

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

(3) 双曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为

$$4x^2 - 9(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2 = 36,$$

即

$$4x^2 - 9y^2 - 9z^2 = 36.$$

双曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 绕 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为

$$4(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2 - 9y^2 = 36,$$

即

$$4x^2 + 4z^2 - 9y^2 = 36.$$

5. 指出下列方程在平面中和在空间中分别表示的图形.

(1) $x = 2$; (2) $y = x + 1$;

(3) $x^2 + y^2 = 4$; (4) $x^2 - y^2 = 1$.

解 (1) $x = 2$ 在平面中表示平行于 y 轴的一条直线, 在空间中表示与 yOz 坐标面平行的平面;

(2) $y = x + 1$ 在平面中表示斜率为1, 在 y 轴上的截距为1的一条直线, 在空间中表示与 z 轴平行的平面;

(3) $x^2 + y^2 = 4$ 在平面中表示圆心在原点, 半径为2的圆, 在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴, 半径为2的圆柱面;

(4) $x^2 - y^2 = 1$ 在平面中表示长,短半轴都为1的双曲线, 在空间中表示母线平行于 z 轴的双曲柱面.

6. 指出下列各曲面所围成的立体的图形.

(1) $x=0, y=0, z=0, x=2, y=1, 3x+4y+2z-12=0$;

(2) $x=0, z=0, x=1, y=2, z=\frac{y}{4}$;

(3) $z=0, z=3, x-y=0, x-\sqrt{3}y=0, x^2+y^2=1$(在第一卦限内);

(4) $x=0, y=0, z=0, x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2$(在第一卦限内).

解 略.

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域并作出图形:

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$;

(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;

(3) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$;

(4) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

解 (1) 当 $y^2-2x+1>0$ 时, 函数有意义, 故函数的定义域(如图 1-1 所示)为

$$D=\{(x,y)\mid y^2-2x+1>0\}.$$

(2) 当 $x+y>0, x-y>0$ 时, 函数有意义, 故函数的定义域(如图 1-2 所示)为

$$D=\{(x,y)\mid x+y>0 \text{ 且 } x-y>0\}.$$

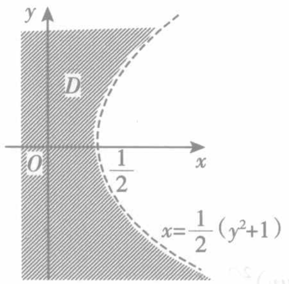

图 1-1

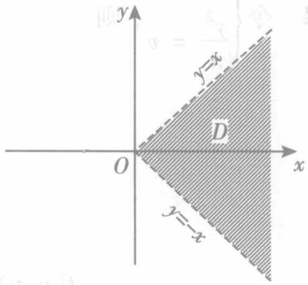

图 1-2

(3) 当 $4x-y^2\geqslant 0$ 和 $1-x^2-y^2>0$ 且 $1-x^2-y^2\neq 1$ 时, 函数有意义, 故函数的定义域(如图 1-3 所示)为

$$D=\{(x,y)\mid y^2\leqslant 4x,0<x^2+y^2<1\}.$$

(4) 当 $y\geqslant 0,x-\sqrt{y}\geqslant 0$,即 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 且 $x^2\geqslant y$ 时，函数有意义，故函数的定义域(如图 1 – 4 所示)为

$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2\geqslant y\}.$$

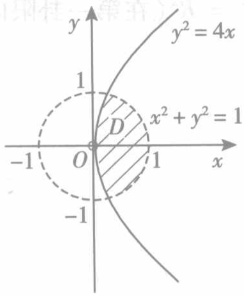

图 1 – 3

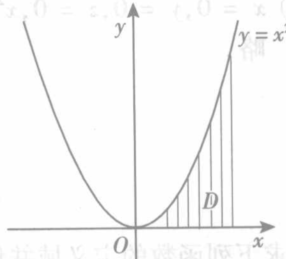

图 1 – 4

2. 已知 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$,求 $f(x+y,x-y,xy)$.

解 $f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{x+y+x-y}$

$$=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$$

3. 已知 $f(x,y)=x^3-2xy+3y^2$,求 $f(\frac{x}{y},\sqrt{xy})$.

解 $f(\frac{x}{y},\sqrt{xy})=(\frac{x}{y})^3-2\cdot\frac{x}{y}\cdot\sqrt{xy}+3(\sqrt{xy})^2$

$$=\frac{x^3}{y^3}-\frac{2x\sqrt{xy}}{y}+3xy$$

4. 已知 $f(xy,\frac{y^2}{x})=x^2+y^2$,求 $f(x,y)$.

解 令 $\begin{cases}xy=u\\ \dfrac{y^2}{x}=v\end{cases}$,则

$$\begin{cases}x=\dfrac{u}{\sqrt[3]{uv}}\\ y=\sqrt[3]{uv}\end{cases}$$

从而

$$f(u,v)=\frac{u^2}{(uv)^{2/3}}+(uv)^{2/3}$$

于是

$$f(x,y)=\frac{x^2}{(xy)^{2/3}}+(xy)^{2/3}.$$

5. 判断下列对二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$ 的各种算法是否正确?并给予说明.

法一

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}}=0$$

法二

令 $y=kx$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{k}{1+k}=0.$

解 两种解法都是错的.

法一的第一步排除了沿坐标轴趋于原点的情况,第二步未考虑分母变化的所有情况,例如,当 $y=\dfrac{x}{x-1}$ 时, $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=1$,则此时极限为1.

法二排除了沿曲线趋于原点的情况,例如,当 $y=x^2-x$ 时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2}{x^2}=-1.$$

6. 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$

提示:考虑点 (x,y) 分别沿直线 $y=2x$ 和 $x=2y$ 趋向 $(0,0)$ 点的情况;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{(x-y)^2}$

提示:考虑点 (x,y) 分别沿直线 $y=kx\,(k\neq 1)$ 和曲线 $y=x^2+x$ 趋向 $(0,0)$ 点的情况.

证明 (1) 因为当点 (x,y) 沿直线 $y=2x$ 趋向 $(0,0)$ 点,得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=2x\to 0}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2x}{x-2x}=-3$$

当点 (x,y) 沿直线 $x=2y$ 趋向 $(0,0)$ 点,得

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=2y\to 0}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{y\to 0}\frac{3y}{y}=3$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在.

(2) 因为当点 (x,y) 沿直线 $y=kx\,(k\neq 1)$ 趋向 $(0,0)$ 点,得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{x^2y^2}{(x-y)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{x^2(kx)^2}{(x-kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(kx)^2}{(1-k)^2}=0$$

当点 (x,y) 沿曲线 $y=x^2+x$ 趋向 $(0,0)$ 点,得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2+x\to 0}}\frac{x^2y^2}{(x-y)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2+x\to 0}}\frac{x^2(x^2+x)^2}{(x-x^2-x)^2}=\lim_{x\to 0}(1+x)^2=1$$

第1章 多元函数微分学

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{(x-y)^2}$ 不存在．

7. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sin xy}{y}$；

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\cos\dfrac{2}{x}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy} = 6.$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln 2.$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sin xy}{y} = \lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{x\sin xy}{xy} = 2.$

(4) 当 $x\neq 0, y\neq 0$ 时,有

$$0 \leqslant \left|x\sin\frac{1}{y}+y\cos\frac{2}{x}\right| \leqslant |x|+|y|$$

且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|)=0$$

故由夹逼准则,有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\cos\frac{2}{x}\right)=0.$$

8. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在全平面上连续．

证明 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 为一初等函数, 从而 $f(x,y)$ 连续．当 $x\neq 0$, $y\neq 0$ 时, 有

$$0 \leqslant \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0$$

故由夹逼准则，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$$

即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

综上所述函数 $f(x,y)$ 在全平面上连续.

9. 求下列函数的间断点：

(1) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(2) $z=\dfrac{xy}{x+y}$；

(3) $z=\sin\dfrac{1}{xy}$；

(4) $z=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$.

解 (1) 因为在点 $(0,0)$ 处，函数无意义，所以函数不连续点为 $(0,0)$.

(2) 因为当 $x+y=0$ 时，函数无意义，所以函数不连续点为

$$\{(x,y)\mid x+y=0\}.$$

(3) 因为当 $x=0$ 或 $y=0$ 时，函数无意义，所以函数不连续点为坐标轴上的一切点.

(4) 因为当 $\sin x=0$ 或 $\sin y=0$ 时，函数无意义，所以函数不连续点为

$$\{(x,y)\mid x=n\pi,y\in R\}\cup\{(x,y)\mid y=n\pi,x\in R\}\ (n\in Z).$$

习题 1.3

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=xy^2-x^2y$；

(2) $z=\arcsin(xy)-\cos^2(xy)$；

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$；

(4) $z=(1+xy)^y$；

(5) $z=e^{xy}\sin(x+y)$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2-2xy$，$\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy-x^2$.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}-2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y$

$$= \frac{y}{\sqrt{1 - x^2y^2}} + y\sin(2xy)$$

同理

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2y^2}} + x\sin(2xy).$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{\ln xy}) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln xy}}$;

同理

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2y\sqrt{\ln xy}}.$$

(4) $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot (1 + xy)^{y-1} \cdot y = y^2(1 + xy)^{y-1}$;

函数 $z = (1 + xy)^y$ 的两端取对数,有

$$\ln z = y\ln(1 + xy)$$

上式两端对 y 求导,得

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(1 + xy) + y \cdot \frac{1}{1 + xy} \cdot x$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (1 + xy)^y\left[\ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy}\right].$$

(5) $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}\sin(x + y) + e^{xy}\cos(x + y)$

$$= e^{xy}[\cos(x + y) + y\sin(x + y)]$$

同理

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy}[\cos(x + y) + x\sin(x + y)].$$

2. 设$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2y)}{xy}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$,求$f_x(0,1)$.

解 $f_x(0,1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{f(0 + \Delta x,1) - f(0,1)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{\sin(\Delta x)^2}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} = 1$$

3. 设$f(x,y) = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$,求$f_y(1,0)$.

解 因$f_y(x,y) = \frac{\frac{1}{2x}}{x + \frac{y}{2x}} = \frac{1}{2x^2 + y}$;

则

$$f_y(1,0)=\left.\frac{1}{2x^2+y}\right|_{(1,0)}=\frac{1}{2}.$$

另解 因$f(1,y)=\ln(1+\frac{y}{2})$，

则

$$f_y(1,y)=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{y}{2}}$$

所以

$$f_y(1,0)=\frac{1}{2}.$$

4. 设$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求$f_x(x,1)$.

解 因为

$$f_x(x,y)=1+\frac{y-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2\sqrt{x(y-x)}+y-1}{2\sqrt{x(y-x)}},$$

所以

$$f_x(x,1)=1.$$

另解 因$f(x,1)=x+(1-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1}}=x$，

则

$$f_x(x,1)=1.$$

5. 设$z=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$，验证$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$

证明 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}x^{-2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}y^{-2},$$

所以

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}+e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}=2e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}=2z.$$

6. 设$f(x,y,z)=xy^2+yz^2+x^2z$，求$f_x(0,0,1)$，$f_y(0,1,0)$，$f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$和$f_{zzx}(2,0,1)$.

解 因为

$$f_x=y^2+2xz,\ f_y=2xy+z^2,\ f_z=2yz+x^2$$
$$f_{xx}=2z,\ f_{xz}=2x,\ f_{yz}=2z,\ f_{zz}=2y,\ f_{zzx}=0$$

所以

$$f_x(0,0,1)=0,f_y(0,1,0)=0$$

$$f_{xx}(0,0,1)=2,f_{xz}(1,0,2)=2,f_{yz}(0,-1,0)=0,$$

$$f_{zzx}(2,0,1)=0$$

7. 设 $z=x\ln(xy)$，求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

解 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot y=\ln(xy)+1$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\ln xy+1)=\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\ln xy+1)=\frac{1}{xy}\cdot x=\frac{1}{y}$$

所以

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}.$$

8. 求下列函数的全微分：

(1) $z=xy+\dfrac{x}{y}$;

(2) $z=\dfrac{x+y}{x-y}$;

(3) $z=\arctan(xy)$;

(4) $u=x^{yz}$.

解 (1) 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+\dfrac{1}{y},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x-\dfrac{x}{y^2}$,

所以

$$dz=(y+\frac{1}{y})dx+(x-\frac{x}{y^2})dy.$$

(2) 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2y}{(x-y)^2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2x}{(x-y)^2}$,

所以

$$dz=-\frac{2ydx}{(x-y)^2}+\frac{2xdy}{(x-y)^2}.$$

(3) 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{1+x^2y^2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{1+x^2y^2}$,

所以

$$dz=\frac{ydx}{1+x^2y^2}+\frac{xdy}{1+x^2y^2}.$$

(4) 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yzx^{yz-1},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x\ ,$

所以

$$du = yzx^{yz-1}dx + zx^{yz}\ln x dy + yx^{yz}\ln x dz.$$

9. 求函数 $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ 在 $x = 1, y = 2$ 的全微分.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}$,

所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = \frac{1}{3}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = \frac{2}{3}.$$

故

$$\left.dz\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = \frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy.$$

10. 在边长为 $x = 6m, y = 8m$ 的矩形中,若 x 增加 $5cm$, y 减少 $10cm$,试求该矩形的对角线和面积变化的近似值.

解 设对角线长为 l,面积为 s,则有

$$l = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad s = xy.$$

于是

$$\Delta l \approx dl = \frac{\partial l}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial l}{\partial y}\Delta y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\Delta x + y\Delta y),$$

$$\Delta s \approx ds = (y\Delta x + x\Delta y).$$

当 $x = 6m, y = 8m, \Delta x = 0.05m, \Delta y = -0.1m$ 时,有

$$\Delta l \approx \frac{6}{10} \times 0.05 + \frac{8}{10} \times (-0.1) = -0.05m,$$

$$\Delta s \approx 8 \times 0.05 + 6 \times (-0.1) = -0.2m^2.$$

11. 求下列各式的近似值:

(1) $\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3}$;

(2) $(1.07)^{1.05}$.

解 (1) 设 $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$,则

$$f_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}, \quad f_y = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}.$$

于是

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) &= \sqrt{(x + \Delta x)^3 + (y + \Delta y)^3} \\ &= \sqrt{x^3 + y^3} + f_x\Delta x + f_y\Delta y \\ &= \sqrt{x^3 + y^3} + \frac{3x^2\Delta x + 3y^2\Delta y}{2\sqrt{x^3 + y^3}}. \end{aligned}$$

当 $x = 1, y = 2, \Delta x = 0.02, \Delta y = -0.03$ 时,有