高等学校数学系列教材

（第二版）

抽象代数

牛凤文　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

M 高等学校数学系列教材

（第二版）

抽象代数

牛凤文 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

抽象代数/牛凤文编著.—2版.—武汉：武汉大学出版社，2008.1
(高等学校数学系列教材)
ISBN 978-7-307-04840-9

Ⅰ.抽…　Ⅱ.牛…　Ⅲ.抽象代数—高等学校—教材　Ⅳ.O153

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第139166号

责任编辑:顾素萍　　　版式设计:詹锦玲

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷:湖北恒泰印务有限公司
开本：720×1000　1/16　印张:25.75　字数:458千字　插页:1
版次:1992年4月第1版　2008年1月第2版
2008年1月第2版第1次印刷
ISBN 978-7-307-04840-9/O·333　定价:30.00元

内 容 提 要

本书系统地介绍了抽象代数的基本概念、基本技巧和基础知识，共 7 章。主要内容有群、群同态与商群；环、环同态与商环；域和域的扩张。

本书叙述深入浅出，文字生动活泼；正反例题充实、新颖，有典型性；推理自然、详尽，有启发性；重点突出而难点分散，有张有弛；可供高等师范院校和综合大学教学使用，也可供具有高中毕业以上数学程度的读者自学。

前　言

(一)

古典代数以研究代数方程求解为中心，其历史源远流长.

19 世纪初，年轻数学家伽罗华（Galois）应用群的概念对高次代数方程是否可用根式求解问题进行了透彻研究并给出了明确回答，他成为抽象代数新思想的启蒙者.

随后，这种把代数学变成集合论的、公理化的科学的改造不断强化，产生了很多新的思想、新的方法、新的观点和新的结果.

到了 20 世纪 20 年代，数学的最古老的分支之一的代数学完成了一次根本性的革命. 它的标志是范德瓦尔登（Van der Waerden）的《近世代数学》一书的出版.

时至今日，抽象代数已经成为很多数学分支中最常用的工具，空前普及. 以至近年来，人们不再把这门学问冠之以“近世”、“抽象”等高贵头衔，而朴素地称它为“一般代数学”、“基础代数”，甚至“代数学”.

我们把这本书仍然称为《抽象代数》只是想把它与仅仅讨论以数为对象的那种经典代数加以区别.

抽象代数是古典代数发展的质的飞跃. 学好本课程，可以对初等数学中很多容易模糊含混的问题，如算律、逆运算、多项式与根、因式分解等在公理系统中得以明确.

要在高观点之下认识初等代数，学习些抽象代数知识是绝对必要的.

近年来，抽象代数本身仍在不断地发展. 一方面，它在实际应用中找到了用武之地，如群论在晶体对称、运动和生物学中的应用，群论在研究物质结构模型中的应用，布尔代数、泛代数和代数编码在数理逻辑和计算机科学中的应用. 另一方面，代数学向数学内部各相邻分支扩展、渗透，使同调代数、李群与李代数、微分代数、范畴论、半群理论与模论等成为学习拓扑学、泛函分析、微分方程论等必不可少的现代准备知识.

人们要在现代数学的学习和研究中有所发展，也需要学习些抽象代数的知识和思想方法.

因此，本书可以作为从事初等数学教学和研究工作人员的提高书；可以作为要进一步学习代数学、泛函分析、拓扑学和微分方程论的读者的代数入门书；它也可以作为工作在计算机科学、物理学、生物学和化学有关领域的人员的代数学普及读物.

(二)

抽象代数是数学中最适合于自学的学科之一. 笔者就接触过大批自学抽象代数取得成功的中学数学教师、科技工作者，很多人并没有在课堂上学过抽象代数课程，经过自学钻研，现在却在讲坛上自如地讲授“群论在物理中的应用”、“群论在化学中的应用”、“工程师用的代数学”等.

本课程只假定读者学过中学代数并知道一点矩阵运算规则，此外不要求任何高等数学内容作为准备知识. 当然，学过解析几何和高等代数的读者理解本课的概念会快些，但没学过这类课程的读者直接攻读抽象代数，一般来说，应该没有原则性障碍.

学好本课程的关键在于对“公理化方法”实质和一些重要抽象概念的理解.

初学者往往被代数学中一个接一个的新概念所困扰，难理解又容易忘记. 这实际上是理解的深刻程度的问题. 只要读者对重要概念多花些工夫、多思考、多琢磨、多分析比较各种实例，最后一定能达到用自己的习惯语言描述这些概念，并逐渐运用自如.

整个课本中，抽象概念很多. 但真正重要的、具有开创意义的，不过三五个而已. 只要把这几个概念理解透彻，对于其余属平行引进性质的东西就不需每个都花费同样大的气力了.

切忌把抽象代数单纯作为“知识”来学，平均使用力量，每个定义都能背下来，但没有一个能“悟出真谛”. 学习抽象代数的一个重要目的是提高“抽象思维”能力.

(三)

使用本书作本科生教材，特别是作为高等代数、解析几何和数学分析的后继课教材，师生在代数、几何和函数论领域中分析、总结会看到更多有深刻背景的代数结构系统的实例，对照起来教学，将有“更上一层楼”的体会.

（四）

本书共分 7 章．第二章和第三章为群论初步，第四章介绍环论，第七章讨论域的扩张理论．其余三章是准备或过渡或处理专门问题的．

第二章和第三章在本书中地位显要．它给出了处理一个代数体系的“全过程”．对于初学者来说，每个想法，每个解决办法都是新的．所说的初等代数到近世代数的“飞跃”，即从研究数的运算到研究抽象代数系统的结构之“飞跃”，就在这里完成．

处理其他代数系统的问题，虽然各有各的特点和侧重面，但群论中的思想方法对所有代数体系的研究都有指导意义．

关于本书中主要概念的重要程度、中心内容的依赖关系、对读者科学地分配学时的建议可分别见附表Ⅰ和目录．

（五）

几点做法和想法．

（1）课程的具体内容分为 4 级，最重要的结果称为定理，次之者称为命题，为配合理解定义、定理和命题而举的例是经过选择而有代表意义的，读者应弄懂它们所能说明的问题．每节所穿插的例题不要求读者一定记住．通常，例题中所用的解题方法属典型技巧而且思路比较明确，值得借鉴．

（2）书中使用了不很明确的语言，分别加上了引号，如“拼凑”、“缩影”等，读者能大致体会出意思就可以了．

（3）在定理和命题的证明中有时夹杂着一些猜测和分析性的语言，这样易于理解证明的思路，但不太整齐规范．有时在证明之前把分析想法单列出来，证明就显得干净利落些，读者做习题时应采取后面的办法，分析部分可以不写出来．

（4）在定理和命题的证明中，如果多说几句话就可直接证明的事情，一般就不一定引用前面某章某节某定理．要求不断地翻回去重看，思想上会产生压力．

（5）对于抽象代数中最重要的概念和思想方法，采取难点分散、逐渐加深理解的方法，每次遇到都认真对待．如等价关系、商集、陪集、商群、剩余环这一个系列；又如，子集生成的子群、子环、理想、子域这一个系列，等等．

（6）凡是没有列入书后索引的术语，读者可按各种汉语词典的解释加以理解，如“组成”、“充分必要条件”、“蕴涵”、“程序”，等等．

(7) 每节所附的习题并不是按难易程度决定其前后顺序. 前面的习题没做出来时，可以放一放，经过一段时间的学习与复习后再做，对读者仍然有好处.

读者阅读有关参考书，最好是把它的引理、命题、定理用已学过的技巧将其自行推导出来，以获得更多的锻炼机会，而不以多记一两件事实为目的.

编　者

2007 年 11 月

目　　录

第一章　集合、映射和关系

本课程要对多种多样的代数体系进行分析、比较、归纳、概括，从理论上加以抽象化、公理化，背景十分广泛. 笼统说来，代数体系是一些有代数运算的集合. 所以，我们首先要熟悉集合论中的基本概念、符号和思维方法.

这一章是抽象代数的基础，也差不多是所有现代数学分支的基础.

为使读者不过多依赖其他参考书，本书基本上自成体系，这里可以说是从头讲起.

对集合和映射概念比较熟悉的读者可对照例题检查一下自己原有的理解是否正确. 初学者则必须认真地弄懂定义中每一个字的含义，搞清楚定理证明和习题中每一步推理的根据.

1.3 节中，等价关系与分类、商集与自然映射都是本书中经常用到的，而且要不断深化的概念，读者必须很好地掌握.

1.1　集　　合

在中学阶段，大家已经反复使用诸如集合、元素等概念. 每一组对象的全体形成一个**集合**，集合里的各个对象叫做这个集合的**元素**.

本书用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 代表集合，用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素.

现有某学院勤工俭学办公室的一张登记表，其采集信息的栏目是姓名、家庭地址、性别、勤工俭学项目、寝室号：

王俭，河北人，男，馆员助理，308 室

李芳，北京人，女，家教，601 室

李海波，山东人，男，家教，308 室

刘亦俭，山东人，女，餐厅助理，603 室

赵爱学，山东人，男，家教，308 室

那么，本表上的山东学生的集合是

{李海波，刘亦俭，赵爱学}；

本表上的勤工俭学工作岗位的集合是

{馆员助理，家教，餐厅助理}；

本表中同学住的寝室号的集合是

{308，601，603}；

本表中参加勤工俭学的学生的性别的集合是

{男，女}；

该表中学生们的寝室号码中共有的数字的集合是{0}.

用 $\mathbf{I}$ 代表所有整数形成的集合；用 $\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 分别代表所有有理数、所有实数、所有复数形成的集合.

$a \in A$ 表示 a 是集合 A 的一个元素，也说是 a 属于 A，A 含有 a. 如果 a 不是 A 的元素，则记为 $a \notin A$，也说是 a 不在 A 里，A 不含 a.

定义 1 集合 A 和 B 是**相等**的(记为 $A = B$) 当且仅当 A 的每个元素都是 B 的元素且 B 的每个元素都是 A 的元素.

由此定义知道，如果要列举出一个集合的所有元素，那么列举的顺序是无关紧要的. 例如

$$\{308,601,603\} = \{603,308,601\},$$

{春，夏，秋，冬} = {春，秋，冬，夏}.

在一个无穷集合中列举其元素的方法更可用很多不同方式，例如

$$\begin{aligned}\{2,4,6,\cdots,1,2,3,\cdots\} &= \{\cdots,6,4,2,1,3,5,\cdots\} \\ &= \{1,2,3,4,\cdots\}.\end{aligned}$$

今后，我们最常用的确定一个集合的方法是所谓**描述方法**，即用数学表达式给出该集合元素的性质. 例如，整数 72 的所有因数的集合

$$\{\pm 72, \pm 36, \pm 18, \pm 24, \pm 12, \pm 6, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, \pm 8, \pm 9\}$$

可记为

$$\{a \in \mathbf{I} \mid a \text{ 整除 } 72\};$$

对于取定坐标系的平面 $\mathbf{R}^2$ 上以原点为中心的单位圆上所有点所形成的集合可记为

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\};$$

而位于该单位圆以外同时又在以原点为中心、半径为 2 的圆内的所有点构成的集合是

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1 \text{ 且 } x^2 + y^2 < 4\};$$

上述两圆给定后，在小圆内的所有点和在大圆外的所有点一起形成的集合是

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ 或者 } x^2 + y^2 > 4\}.$$

在人类文明史上，数字 0 的使用是件很了不起的大事，对数学发展有重要作用. 同样，为了方便起见，我们把不含任何元素的集合称为**空集**，它在集合论中也是有重要作用的，记为 $\varnothing$. 例如

$$\{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2+1=0\}=\varnothing, \quad \{x \in \mathbf{I} \mid 3x=5\}=\varnothing.$$

又如，前面提到的勤工俭学的学生中住 602 室的学生的集合是空集.

定义 2　设 A,B 都是集合. 说集合 A 是集合 B 的**子集合**，当且仅当 A 的每个元素都是 B 的元素. 换句话说，A 是 B 的子集合当且仅当 $x \in A$ 蕴涵着 $x \in B$. 当 A 是 B 的子集合时，记做 $A \subseteq B$，也说是 A 属于 B 或 B 包含 A. 符号 $A \not\subseteq B$ 表示 A 不是 B 的子集.

如果 $A \subseteq B$，但 $A \neq B$，即有 B 的元素不属于 A，则说 A 是 B 的**真子集**，记为 $A \subset B$.

因为空集 $\varnothing$ 不含任何元素，说"$\varnothing$ 的每个元素 a 都具有某某性质"这句话，从形式逻辑上看，在数学中不会引起矛盾. 于是，我们可以说"$\varnothing$ 的任意元素都能被 2 整除"，也可以说"$\varnothing$ 的每个元素都不能被 2 整除"或"$\varnothing$ 中的每个元素都是要学抽象代数的青年人"，等等. 于是，我们可以约定，对任意集合 A，都有 $\varnothing \subseteq A$.

任意集合 A，若 $A \neq \varnothing$，则说 A 是非空集合或 A 非空. 由于 $\varnothing \subseteq A$ 永远成立，当 A 非空时，就有 $\varnothing \subset A$.

例题 1　给出集合 $\{1,2,3\}$ 所有子集所形成的集合.

首先要提醒读者，$\varnothing$ 是这个集合的一个子集，它不含任何元素并不意味着可写可不写.

其次，要知道 A 也是自己的一个子集.

还有，子集 $\{1,2\}$ 和子集 $\{2,1\}$ 是一回事，不要重复开列.

最后，要注意此题答案是唯一确定的，但开列元素的顺序可以不同，下面给出一种写法：

$$\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$ ∎

这里容易犯的错误是把某个数字看成是子集. 我们说，2 是 $\{1,2,3\}$ 的一个元素，而 2 这一个数字所构成的集合 $\{2\}$ 是 $\{1,2,3\}$ 的一个子集.

定义 3　集合 A 的所有子集所形成的集合称为 A 的**幂集**.

定义 4　由任意集合 A,B 决定一个集合

$$\{x \mid x \in A \text{ 或者 } x \in B\},$$

称为 A 和 B 的**并集**，记为 $A \cup B$.

这个定义中"或者"二字是关键词，它是说只要 x 属于 A,B 之一，它就算

$A\cup B$ 的元素，即 $x\in A$ 蕴涵 $x\in A\cup B$，而 $x\in B$ 亦蕴涵 $x\in A\cup B$，x 同时属于 A 和 B 时，也蕴涵 $x\in A\cup B$.

例如，$\{1,2,3\}\cup\{2,3,4,5\}=\{1,2,3,4,5\}$，

$$\{x\in \mathbf{I}\mid x\text{ 整除 }8\}\cup\{x\in \mathbf{I}\mid x\text{ 整除 }12\}$$
$$=\{-12,-8,-6,-4,-2,-1,1,2,3,-3,4,6,8,12\},$$
$$\{(x,y)\in \mathbf{R}^2\mid x^2+y^2<1\}\cup\{(x,y)\in \mathbf{R}^2\mid x^2+y^2>4\}$$
$$=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2\mid x^2+y^2<1\text{ 或者 }x^2+y^2>4\}.$$

定义 5 由任意集合 A,B 可决定一集合

$$\{x\mid x\in A\text{ 同时 }x\in B\},$$

称为 A 和 B 的**交集**，记为 $A\cap B$.

这个定义中的关键词是“同时”二字，它表示 x 既属于 A 又属于 B，两件事同时成立，人们也用“并且”、“而且”等表示这种情形.

例如，$\{1,2,3\}\cap\{2,3,4,5\}=\{2,3\}$，

$$\{x\in \mathbf{I}\mid x\text{ 整除 }8\}\cap\{x\in \mathbf{I}\mid x\text{ 整除 }12\}$$
$$=\{-4,-2,-1,1,2,4\},$$
$$\{(x,y)\in \mathbf{R}^2\mid x^2+y^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y)\in \mathbf{R}^2\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$$
$$=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}.$$

例题 2 如果 A,B 和 C 都是某集合的子集合. 证明：

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

分析 我们要证明上式左端集合的每个元素都是右端那个集合的元素，同时右端集合的每一个元素都是左端那个集合的元素.

还有，当已知 x 有某些性质，要证 $x\in X\cup Y$ 时，如果 $x\in Y$，当然 $x\in X\cup Y$；如果 $x\notin Y$，我们就要证明必有 $x\in X$. 因为“如果 $x\in Y$，当然 $x\in X\cup Y$”一句话恒对，从而不必每次都提起叙述一遍，而直接从“如果 $x\notin Y$……”入手验证.

证 对每个 $x\in(A\cap B)\cup C$，由并集的定义知 $x\in A\cap B$ 或者 $x\in C$.

当 $x\in C$ 时，x 当然属于 $A\cup C$，同时，也当然属于 $B\cup C$，即

$$x\in A\cup C\text{ 且 }x\in B\cup C.$$

按交集的定义，$x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

当 $x\in A\cap B$ 时，即 $x\in A$ 并且 $x\in B$. 所以，$x\in A\cup C$ 并且 $x\in B\cup C$. 由交集定义，知 $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

总之，若 $x\in(A\cap B)\cup C$，则必有 $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

反之，对任意 $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$，如果 $x \notin C$，由于 $x \in A \cup C$ 且 $x \in B \cup C$ 可推出 $x \in A$ 且 $x \in B$，也就是 $x \in A \cap B$.

这就证明了若 $x \in (A \cup B) \cap (B \cup C)$，则 $x \in (A \cap B) \cup C$. ▮

例题 3　问对于集合的交集和并集是否有如下的规律：对任意集合 A,B 和 C，都有$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

分析　要否定一个对“任意” A,B 和 C 都成立的命题，我们只要能找到一组确定的 A,B,C 使上式不能成立即可，不必泛泛讲很多不能成立的理由. 所选的反例越简单越好.

解　此命题不能对任意集合恒成立. 令 $A = \varnothing$，$B = \{1\}$，$C = \{1\}$，则

$$A \cap B = \varnothing, \quad (A \cap B) \cup C = \{1\},$$

而 $B \cup C = \{1\}$，$A \cap (B \cup C) = \varnothing$. ▮

关于集合的并集和交集有很多计算规律，本课程不要求更多地记住它们. 本节所列的习题供刚开始接触这些内容的读者加深对概念的理解用. 今后直接引用的只有下列几条几乎可说是不证自明的规律，即对任意集合 A,B 和 C，

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A,$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

今后，我们要经常处理若干个集合的交集和并集的问题. 这是两个集合情形的推广.

设 J 是一个非空集合(可以有无限多个元素)，每个 $j \in J$ 对应集合 S 的一个子集 A_j，则通常说

$$\{A_j \mid A_j \subseteq S,\ j \in J\}$$

是 S 的一个以 J 标号的**子集族**，J 称为**指标集**.

定义 6　设$\{A_j \mid A_j \subseteq S,\ j \in J\}$ 是 S 的一个子集族，集合

$$\{x \in S \mid 对任意\ j \in J\ 都有\ x \in A_j\}$$

称为这个子集族的**交集**，而集合

$$\{x \in S \mid 有某个\ j \in J\ 使得\ x \in A_j\}$$

称为该子集族的**并集**，分别记成 $\bigcap\limits_{j\in J} A_j$ 和 $\bigcup\limits_{j\in J} A_j$.

换言之，$\bigcap\limits_{j\in J} A_j$ 是由 S 中属于每个 A_j 的元素形成的集合，$\bigcup\limits_{j\in J} A_j$ 是 S 中至少属于某一个 A_j 的那些元素形成的集合.

例题 4　证明：当 $J = \{1,2,3\}$ 时，$\bigcap\limits_{j\in J} A_j = (A_1 \cap A_2) \cap A_3$.

证 若 $x \in \bigcap_{j\in J} A_j$，则 $x \in A_1$，$x \in A_2$ 而且 $x \in A_3$，从而 $x \in A_1 \cap A_2$ 同时 $x \in A_3$，进而 $x \in (A_1 \cap A_2) \cap A_3$.

反之，若 $x \in (A_1 \cap A_2) \cap A_3$，则 $x \in A_1 \cap A_2$ 且 $x \in A_3$，而 $x \in A_1 \cap A_2$ 又意味着 $x \in A_1$ 同时 $x \in A_2$，总起来即有 $x \in A_1$，$x \in A_2$ 且 $x \in A_3$，即 $x \in \bigcap_{j=1,2,3} A_j$. ∎

有时，一个集合的子集族不用标号形式给出，而是描述形式，如

$$\{A \mid A \subseteq S,\ A \neq \varnothing\}$$

乃表示是 S 的所有非空子集形成的族. 同样可把属于该族每个子集的元素形成的集合叫做这族子集的交集，并可相应地定义其并集. 此时，可把描述条件记在符号 $\cap$ 或 $\cup$ 的下边.

例题 5 设 A,B 是集合 S 的子集，它们确定了 S 的一个子集族

$$\mathscr{F} = \{X \mid X \subseteq S,\ A \subseteq X \text{ 且 } B \subseteq X\}.$$

证明：$\bigcap_{A\subseteq X,\ B\subseteq X} X = A \cup B$.

证 对任意 $X \in \mathscr{F}$，由 $A \subseteq X$，$B \subseteq X$ 知 $A \cup B \subseteq X$，即 $A \cup B$ 的任意元 x 都属于每一个 $X \in \mathscr{F}$，从而 $x \in \bigcap_{X\in\mathscr{F}} X$，即

$$A \cup B \subseteq \bigcap_{A\subseteq X,\ B\subseteq X} X.$$

另一方面，$A \cup B$ 也满足 $\mathscr{F}$ 中的描述条件，即 $A \cup B \in \mathscr{F}$. 若 $x \in \bigcap_{X\in\mathscr{F}} X$，则对任意 $X \in \mathscr{F}$ 都有 $x \in X$，当然应有 $x \in A \cup B$. ∎

例题 6 设 A 是集合 S 的子集. 问，是否必有 $A \subset \bigcap_{X\subset S,\ A\subset X} X$?

解 此断言不恒对. 例如取 $S = \mathbf{R}$，$A = \{0\}$，$\mathscr{F} = \{X \mid A \subset X \subset S\}$，则

$$\bigcap_{A\subset X\subset S} X = \{0\} = A.$$

这是因为对任意 $a \in \mathbf{R}$，$a \neq 0$，都有

$$A \subset \left\{0, \frac{a}{2}\right\} \subset S,$$

即 $\{0, a/2\} \in \mathscr{F}$. 但 $a \notin \{0, a/2\}$，从而

$$a \notin \bigcap_{A\subset X\subset S} X.$$

此事说明族 $\mathscr{F}$ 的交集只含一个元素 0. A 不是它的真子集. ∎

定义 7 设 $A \subseteq B$，那么，集合

$$\{x \mid x \in B \text{ 但 } x \notin A\}$$

称为 A 在 B 中的**余集**，记为 $B - A$.