北大燕园

大学数学辅导丛书

高等数学
习题全解

同济·第六版

（上下册合订本）

主编 陶 伟

国家行政学院出版社

北大燕园

大学数学辅导丛书

高等数学习题全解

同济·第六版

（上下册合订本）

主编　陶　伟

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题全解/陶伟主编. －北京：国家行政学院出版社，2004
ISBN 978-7-80140-335-3

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 陶…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-解题　Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 046616 号

书　　名	高等数学习题全解
作　　者	陶　伟
责任编辑	李锦慧
出版发行	国家行政学院出版社 （北京市海淀区长春桥路 6 号　100089）
电　　话	（010）88517082
经　　销	新华书店
印　　刷	北京市朝阳印刷厂
版　　次	2008 年 8 月第 3 版
印　　次	2008 年 8 月第 1 次印刷
开　　本	787 毫米 ×960 毫米　16 开
印　　张	35.5 印张
字　　数	860 千字
书　　号	ISBN 978-7-80140-335-3/O · 33
定　　价	29.80 元

前　言

高等数学是近代数学的基础，也是当代大学生的重要基础课和硕士研究生入学考试的重要科目。为了帮助广大读者全面系统地学习、掌握高等数学的基本概念、基本理论、基本方法和技巧，我们组织**清华大学、北京大学、中国人民大学、北京航天航空大学、北京理工大学、北京交通大学**等院校一批具有丰富教学经验的青年教师编写了这本习题集。

本书是教材《高等数学》（**同济·第六版**）的习题全解。

本书旨在帮助读者提高分析问题的能力和掌握解题方法和技巧，加深对教材基本内容的理解和掌握，提高学习效率。

我们希望读者先自行思考，自己亲自动手解题，然后与本书题解进行对照。如果自己不动手去做题，而只是为了完成老师布置的作业照抄本书题解，是有害无益的。

本书编写结构：

本书严格按教材各章节习题顺序编排，与教材的题号一致，部分题目有一题多解。在有些题解中给出了评注，旨在指出读者易犯的错误和应当注意的事项。

本书各章节习题题解按以下三项进行编写：

一、教材《高等数学》（**同济·第六版**）的试题及题解。

二、考研试题精选。我们按考研试题所考查的知识点，将其编排在教材相应的章节，以便读者了解硕士研究生入学考试命题方向和规律。

本书具有以下特点：

1. 题材丰富，题量大，可读性强。本书不仅包含了**同济·第六版**中所有习题，而且还选编了历年全国硕士研究生入学考试试题和国内外高等数学竞赛题。

2. 题型多样，方法典型、新颖，解答简捷，论证严谨，富有启发性。对备考硕士研究生的应试者和正在学习《高等数学》的广大在校学生，把握课程重点，扩大视野，启迪思维，提高分析问题和解决问题的能力，都会有指导作用。

本书不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

编者

目　录

第一章　函数与极限

第一节　映射与函数

一、习题 1 - 1

1 设 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $B = [-10, 3]$,写出 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ 及 $A \backslash (A \backslash B)$ 的表达式.

【解】 $A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$, $A \cap B = [-10, -5)$,

$A \backslash B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$, $A \backslash (A \backslash B) = [-10, -5)$.

2 设 A、B 是任意两个集合,证明对偶律:$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

【证】 先证:$(A \cap B)^C \subset A^C \cup B^C$.

$\forall x \in (A \cap B)^C \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A^C$ 或 $x \in B^C \Rightarrow x \in A^C \cup B^C$.

再证:$A^C \cup B^C \subset (A \cap B)^C$.

$\forall x \in A^C \cup B^C \Rightarrow x \in A^C$ 或 $x \in B^C \Rightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in (A \cap B)^C$.

3 设映射 $f: X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset X$,证明:

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

【证】 (1) $\forall y \in f(A \cup B) = \{y \mid y = f(x), x \in A \cup B\}$

$$= \{y \mid y = f(x), x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

$$\Leftrightarrow y \in \{y \mid y = f(x), x \in A\} \text{ 或 } y \in \{y \mid y = f(x), x \in B\}$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B).$$

(2) $\forall y \in f(A \cap B) = \{y \mid y = f(x), x \in A \cap B\}$

$$= \{y \mid y = f(x), x \in A \text{ 且 } x \in B\} \subset \{y \mid y = f(x), x \in A\} \cap \{y \mid y = f(x), x \in B\}$$

$$\Rightarrow y \in \{y \mid y = f(x), x \in A\} = f(A) \text{ 且 } y \in \{y \mid y = f(x), x \in B\} = f(B)$$

$$\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B).$$

4 求下列函数的自然定义域:

(1) $y = \sqrt{3x + 2}$;　　(2) $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$;

(3) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2}$;　　(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$;

(5) $y = \sin\sqrt{x}$;　　(6) $y = \tan(x + 1)$;

(7) $y = \arcsin(x - 3)$;　　(8) $y = \sqrt{3 - x} + \arctan\dfrac{1}{x}$;

(9) $y = \ln(x+1)$;　　　　(10) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

【解】 (1) 因 $3x+2 \geqslant 0$,即 $x \geqslant -\dfrac{2}{3}$,故函数的定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

(2) 因 $1-x^2 \neq 0$,即 $x \neq \pm 1$,故函数的定义域为

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

(3) 因 $\begin{cases} 1-x^2 \geqslant 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$ 即 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 且 $x \neq 0$,故函数的定义域为 $[-1,0) \cup (0,1]$.

(4) 由 $4-x^2>0$,得 $-2<x<2$,故函数的定义域为 $(-2,2)$.

(5) 要使函数有意义,必须 $x \geqslant 0$,故定义域为 $[0, +\infty)$.

(6) 要使函数有意义,必须 $x+1 \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$,即 $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} - 1, k=0, \pm 1, \pm 2 \cdots$.

(7) 要使函数有意义,必须 $|x-3| \leqslant 1$,即 $-1 \leqslant x-3 \leqslant 1$,亦即 $2 \leqslant x \leqslant 4$,故定义域为 $[2,4]$.

(8) 由 $\begin{cases} 3-x \geqslant 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \neq 0, \end{cases}$ 故定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$.

(9) 由 $x+1>0 \Rightarrow x>-1$,故定义域为 $(-1, +\infty)$.

(10) 由 $x \neq 0 \Rightarrow$ 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

5 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2$, $g(x) = 2\lg x$;　　(2) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, $g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$;(4) $f(x) = 1$, $g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$.

【解】 两函数相同,必须定义域相同,对应法则也相同.

(1) 不同. 因为定义域不同,$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

(2) 不同. 因为对应法则不同,$f(x) = x$,而 $g(x) = -x$(当 $x<0$ 时).

(3) 相同. 因为定义域、对应法则均相同.

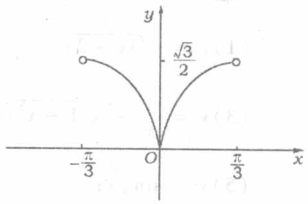
(4) 不同. 因为 $g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x = \dfrac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}$,分母不所为零,即 $x \neq k\pi + \dfrac{1}{2}\pi$,故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同.

6 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \dfrac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geqslant \dfrac{\pi}{3}, \end{cases}$ 求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right), \varphi(-2)$,并作函数 $y = \varphi(x)$ 的图形.

【解】 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right| = \dfrac{1}{2}$,

$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,



第 6 题图

$\varphi(-2) = 0.$

$y = \varphi(x)$ 图像如右.

7 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y = \dfrac{x}{1-x}, (-\infty, 1)$; (2) $y = x + \ln x, \quad (0, +\infty)$.

【证】 (1) 设 $x_1 < x_2$, 且 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$, 由于

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1-x_1} - \frac{x_2}{1-x_2} = \frac{x_1 - x_1x_2 - x_2 + x_1x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$
$$= \frac{x_1 - x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} < 0,$$

即 $f(x_1) < f(x_2)$, 故 $y = \dfrac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调增加.

(2) 设 $x_1 < x_2$, 且 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 则有

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + \ln x_1) - (x_2 + \ln x_2) = (x_1 - x_2) + (\ln x_1 - \ln x_2).$$

由于 $y = \ln x$ 为单调增加函数, 所以 $(\ln x_1 - \ln x_2) < 0$.

又 $(x_1 - x_2) < 0$, 所以 $(x_1 - x_2) + (\ln x_1 - \ln x_2) < 0$.

故 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

8 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明: $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

【证】 因 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 上为奇函数, 所以对任意 $x \in (-l, l)$, 有 $f(-x) = -f(x)$.

对任意 $x_1, x_2 \in (-l, 0)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 即 $-x_1 > -x_2$, 且 $-x_1, -x_2 \in (0, l)$, 由于 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 所以 $f(-x_1) > f(-x_2)$, 即 $-f(x_1) > -f(x_2)$, 亦即 $f(x_1) < f(x_2)$. 故 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内单调增加.

9 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的, 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

【证】 (1) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 均为偶函数, 令 $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$, 因

$$F(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 均为奇函数, 令 $G(x) = g_1(x) + g_2(x)$, 因

$$G(-x) = g_1(-x) + g_2(-x) = -g_1(x) - g_2(x) = -G(x),$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 均为偶函数, 令 $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, 因

$$F(-x) = f_1(-x) \cdot f_2(-x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 均为奇函数, 令 $G(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$, 因

$$G(-x) = g_1(-x) \cdot g_2(-x) = [-g_1(x)] \cdot [-g_2(x)]$$

$$= g_1(x) \cdot g_2(x) = G(x),$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, 令 $H(x) = f(x) \cdot g(x)$, 因

$$H(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot [-g(x)] = -f(x)g(x) = -H(x),$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

10 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y = x^2(1 - x^2)$;　(2) $y = 3x^2 - x^3$;

(3) $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$;　(4) $y = x(x - 1)(x + 1)$;

(5) $y = \sin x - \cos x + 1$;　(6) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$.

【解】 由奇、偶函数的定义来判断.

(1) $f(-x) = (-x)^2[1 - (-x^2)] = x^2(1 - x^2) = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数;

(2) $f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3 \neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$, 故 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数;

(3) $f(-x) = \dfrac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数;

(4) $f(-x) = (-x)[(-x) - 1][(-x) + 1] = -x(x - 1)(x + 1) = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数;

(5) $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) + 1 = -\sin x - \cos x + 1 \neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$, 故 $f(x)$ 即非奇函数又非偶函数;

(6) $f(-x) = \dfrac{a^{(-x)} + a^{-(-x)}}{2} = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2} = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数.

11 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

(1) $y = \cos(x - 2)$;　(2) $y = \cos 4x$;　(3) $y = 1 + \sin \pi x$;

(4) $y = x\cos x$;　(5) $y = \sin^2 x$.

【解】 (1) $y = \cos(x - 2)$ 是周期函数, 周期 $l = 2\pi$;

(2) $y = \cos 4x$ 是周期函数, 周期 $l = \dfrac{\pi}{2}$;

(3) $y = 1 + \sin \pi x$ 是周期函数, 周期 $l = 2$;

(4) $y = x\cos x$ 不是周期函数;

(5) $y = \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ 是周期函数, 周期 $l = \pi$.

12 求下列函数的反函数:

(1) $y = \sqrt[3]{x + 1}$;　(2) $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$;

(3) $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}\ (ad - bc \neq 0)$,　(4) $y = 2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6}\right)$;

(5) $y = 1 + \ln(x + 2)$;　(6) $y = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$.

【解】 (1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解出 $x=y^3-1$,故所求反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 解出 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$,故所求反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 解出 $x=\dfrac{b-dy}{cy-a}$,故所求反函数为 $y=\dfrac{b-dx}{cx-a}$ $\left(x\neq\dfrac{a}{c}\right)$.

(4) 由 $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$ 解得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$,即反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$;

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$ 解得 $x=e^{y-1}-2$,即反函数为 $y=e^{x-1}-2$;

(6) 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 解得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$,即反函数 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

13 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

【证】 充分性. 已知 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$,对任意 $x\in X$,取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$,则 $|f(x)|\leqslant M$,对任意 $x\in X$,有界.

必要性. 已知 $f(x)$ 有界,即对任意 $x\in X$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$,故既有上界 $M_1=-M$,也有下界 $M_2=M$,得证.

14 在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y=u^2$, $u=\sin x$, $x_1=\dfrac{\pi}{6}$, $x_2=\dfrac{\pi}{3}$;

(2) $y=\sin u$, $u=2x$, $x_1=\dfrac{\pi}{8}$, $x_2=\dfrac{\pi}{4}$;

(3) $y=\sqrt{u}$, $u=1+x^2$, $x_1=1$, $x_2=2$;

(4) $y=e^u$, $u=x^2$, $x_1=0$, $x_2=1$;

(5) $y=u^2$, $u=e^x$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

【解】 (1) 复合函数为 $y=\sin^2 x$. 当 $x_1=\dfrac{\pi}{6}$ 时,$y=\dfrac{1}{4}$; 当 $x_2=\dfrac{\pi}{3}$ 时,$y=\dfrac{3}{4}$.

(2) 复合函数为 $y=\sin 2x$. 当 $x_1=\dfrac{\pi}{8}$ 时,$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 当 $x_2=\dfrac{\pi}{4}$ 时,$y=1$.

(3) 复合函数为 $y=\sqrt{1+x^2}$. 当 $x_1=1$ 时,$y=\sqrt{2}$; 当 $x_2=2$ 时,$y=\sqrt{5}$.

(4) 复合函数为 $y=e^{x^2}$. 当 $x_1=0$ 时,$y=1$; 当 $x_2=1$ 时,$y=e$.

(5) 复合函数为 $y=e^{2x}$. 当 $x_1=1$ 时,$y=e^2$; 当 $x_2=-1$ 时,$y=e^{-2}$.

15 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)\ (a>0)$; (4) $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$.

【解】 (1) 由 $0\leqslant x^2\leqslant 1$,得 $-1\leqslant x\leqslant 1$,故 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-1,1]$.

(2) 由 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$,得 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 故 $f(\sin x)$ 的定义域是 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ (k 为整数).