



大学数学辅导丛书

高等数学 习题全解

同济·第六版
(上下册合订本)

主编 陶 伟

· 国家行政学院出版社



大学数学辅导丛书

高等数学习题全解

同济·第六版

(上下册合订本)

主编 陶 伟

国家行政学院出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学学习题全解/陶伟主编. - 北京: 国家行政学院出版社, 2004
ISBN 978-7-80140-335-3

I. 高… II. 陶… III. 高等数学-高等学校-解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 046616 号

第六版·第四
(本分合低不工)

主 编 陶 伟

书 名 高等数学学习题全解

作 者 陶 伟

责任编辑 李锦慧

出版发行 国家行政学院出版社

(北京市海淀区长春桥路 6 号 100089)

电 话 (010) 88517082

经 销 新华书店

印 刷 北京市朝阳区印刷厂

版 次 2008 年 8 月第 3 版

印 次 2008 年 8 月第 1 次印刷

开 本 787 毫米 × 960 毫米 16 开

印 张 35.5 印张

字 数 860 千字

书 号 ISBN 978-7-80140-335-3/O · 33

定 价 29.80 元

国家行政学院出版社

前言

高等数学是近代数学的基础，也是当代大学生的重要基础课和硕士研究生入学考试的重要科目。为了帮助广大读者全面系统地学习、掌握高等数学的基本概念、基本理论、基本方法和技巧，我们组织清华大学、北京大学、中国人民大学、北京航空航天大学、北京理工大学、北京交通大学等院校一批具有丰富教学经验的青年教师编写了这本习题集。

本书是教材《高等数学》（同济·第六版）的习题全解。

本书旨在帮助读者提高分析问题的能力和掌握解题方法和技巧，加深对教材基本内容的理解和掌握，提高学习效率。

我们希望读者先自行思考，自己亲自动手解题，然后与本书题解进行对照。如果自己不动手去做题，而只是为了完成老师布置的作业照抄本书题解，是有害无益的。

本书编写结构：

本书严格按教材各章节习题顺序编排，与教材的题号一致，部分题目有一题多解。在有些题解中给出了评注，旨在指出读者易犯的错误和应当注意的事项。

本书各章节习题题解按以下三项进行编写：

一、教材《高等数学》（同济·第六版）的试题及题解。

二、考研试题精选。我们按考研试题所考查的知识点，将其编排在教材相应的章节，以便读者了解硕士研究生入学考试命题方向和规律。

本书具有以下特点：

1. 题材丰富，题量大，可读性强。本书不仅包含了同济·第六版中所有习题，而且还选编了历年全国硕士研究生入学考试试题和国内外高等数学竞赛题。

2. 题型多样，方法典型、新颖，解答简捷，论证严谨，富有启发性。对备考硕士研究生的应试者和正在学习《高等数学》的广大在校学生，把握课程重点，扩大视野，启迪思维，提高分析问题和解决问题的能力，都会有指导作用。

本书不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

编者

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 映射与函数	1
一、习题 1-1	1
二、考研试题精选	8
第二节 数列的极限	10
一、习题 1-2	10
二、考研试题精选	11
第三节 函数的极限	12
一、习题 1-3	12
二、考研试题精选	15
第四节 无穷小与无穷大	16
一、习题 1-4	16
二、考研试题精选	19
第五节 极限运算法则	21
一、习题 1-5	21
二、考研试题精选	23
第六节 极限存在准则 两个重要极限	24
一、习题 1-6	24
二、考研试题精选	27
第七节 无穷小的比较	30
一、习题 1-7	30
二、考研试题精选	32
第八节 函数的连续性与间断点	35
一、习题 1-8	35
二、考研试题精选	38
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	40
一、习题 1-9	40
二、考研试题精选	42
第十节 闭区间上连续函数的性质	43
一、习题 1-10	43
二、考研试题精选	45
总习题一	45

第二章 导数与微分	50
第一节 导数概念	50
一、习题 2-1	50
二、考研试题精选	54
第二节 函数的求导法则	60
一、习题 2-2	60
二、考研试题精选	66
第三节 高阶导数	67
一、习题 2-3	67
二、考研试题精选	70
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	71
一、习题 2-4	71
二、考研试题精选	75
第五节 函数的微分	78
一、习题 2-5	78
二、考研试题精选	82
总习题二	82
第三章 微分中值定理与导数的应用	88
第一节 微分中值定理	88
一、习题 3-1	88
二、考研试题精选	91
第二节 洛必达法则	98
一、习题 3-2	98
二、考研试题精选	100
第三节 泰勒公式	104
一、习题 3-3	104
二、考研试题精选	107
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性	110
一、习题 3-4	110
二、考研试题精选	116
第五节 函数的极值与最大值最小值	119
一、习题 3-5	119
二、考研试题精选	124
第六节 函数图形的描绘	132
一、习题 3-6	132
二、考研试题精选	134
第七节 曲 率	136
一、习题 3-7	136

第八节 方程的近似解	138
一、习题 3-8	138
总习题三	140
第四章 不定积分	146
第一节 不定积分的概念与性质	146
一、习题 4-1	146
二、考研试题精选	150
第二节 换元积分法	151
一、习题 4-2	151
二、考研试题精选	156
第三节 分部积分法	157
一、习题 4-3	157
二、考研试题精选	160
第四节 有理函数的积分	164
一、习题 4-4	164
第五节 积分表的使用	168
一、习题 4-5	168
总习题四	170
第五章 定积分	177
第一节 定积分的概念与性质	177
一、习题 5-1	177
二、考研试题精选	183
第二节 微积分基本公式	187
一、习题 5-2	187
二、考研试题精选	191
第三节 定积分的换元法和分部积分法	203
一、习题 5-3	203
二、考研试题精选	209
第四节 反常积分	215
一、习题 5-4	215
二、考研试题精选	217
第五节 反常积分的审敛法 Γ 函数	219
一、习题 5-5	219
二、考研试题精选	221
总习题五	222

第六章 定积分的应用	232
第二节 定积分在几何学上的应用	232
一、习题 6-2	232
二、考研试题精选	241
第三节 定积分在物理学上的应用	251
一、习题 6-3	251
二、考研试题精选	254
总习题六	256
第七章 微分方程	260
第一节 微分方程的基本概念	260
一、习题 7-1	260
二、考研试题精选	262
第二节 可分离变量的微分方程	262
一、习题 7-2	262
二、考研试题精选	265
第三节 齐次方程	267
一、习题 7-3	267
二、考研试题精选	271
第四节 一阶线性微分方程	274
一、习题 7-4	274
二、考研试题精选	279
第五节 可降阶的高阶微分方程	287
一、习题 7-5	287
二、考研试题精选	292
第六节 高阶线性微分方程	295
一、习题 7-6	295
二、考研试题精选	300
第七节 常系数齐次线性微分方程	301
一、习题 7-7	301
二、考研试题精选	304
第八节 常系数非齐次线性微分方程	304
一、习题 7-8	304
二、考研试题精选	309
第九节 欧拉方程	310
一、习题 7-9	310
二、考研试题精选	312
第十节 常系数线性微分方程组解法举例	313
一、习题 7-10	313

总习题七	317
第八章 空间解析几何与向量代数	325
第一节 向量及其线性运算	325
一、习题 8-1	325
第二节 数量积 向量积 混合积	328
一、习题 8-2	328
二、考研试题精选	330
第三节 曲面及其方程	331
一、习题 8-3	331
二、考研试题精选	334
第四节 空间曲线及其方程	334
一、习题 8-4	334
第五节 平面及其方程	337
一、习题 8-5	337
二、考研试题精选	339
第六节 空间直线及其方程	340
一、习题 8-6	340
总习题八	345
第九章 多元函数微分法及其应用	352
第一节 多元函数的基本概念	352
一、习题 9-1	352
第二节 偏导数	354
一、习题 9-2	354
二、考研试题精选	357
第三节 全微分	359
一、习题 9-3	359
二、考研试题精选	362
第四节 多元复合函数的求导法则	364
一、习题 9-4	364
二、考研试题精选	368
第五节 隐函数的求导公式	373
一、习题 9-5	373
二、考研试题精选	378
第六节 多元函数微分学的几何应用	381
一、习题 9-6	381
二、考研试题精选	386
第七节 方向导数与梯度	387

一、习题 9-7	387
二、考研试题精选	390
第八节 多元函数的极值及其求法	391
一、习题 9-8	391
二、考研试题精选	395
第九节 二元函数的泰勒公式	399
一、习题 9-9	399
第十节 最小二乘法	402
一、习题 9-10	402
总习题九	403
第十章 重积分	411
第一节 二重积分的概念与性质	411
一、习题 10-1	411
二、考研试题精选	413
第二节 二重积分的计算法	414
一、习题 10-2	414
二、考研试题精选	426
第三节 三重积分	434
一、习题 10-3	434
二、考研试题精选	442
第四节 重积分的应用	443
一、习题 10-4	443
二、考研试题精选	449
第五节 含参变量的积分	450
一、习题 10-5	450
总习题十	453
第十一章 曲线积分与曲面积分	462
第一节 对弧长的曲线积分	462
一、习题 11-1	462
二、考研试题精选	465
第二节 对坐标的曲线积分	466
一、习题 11-2	466
二、考研试题精选	469
第三节 格林公式及其应用	470
一、习题 11-3	470
二、考研试题精选	477
第四节 对面积的曲面积分	480

一、习题 11-4	480
二、考研试题精选	483
第五节 对坐标的曲面积分	484
一、习题 11-5	484
第六节 高斯公式 通量与散度	487
一、习题 11-6	487
二、考研试题精选	489
第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度	495
一、习题 11-7	495
二、考研试题精选	498
总习题十一	499
 第十二章 无穷级数	 506
第一节 常数项级数的概念和性质	506
一、习题 12-1	506
二、考研试题精选	509
第二节 常数项级数的审敛法	509
一、习题 12-2	509
二、考研试题精选	512
第三节 幂级数	517
一、习题 12-3	517
二、考研试题精选	519
第四节 函数展开成幂级数	526
一、习题 12-4	526
二、考研试题精选	529
第五节 函数的幂级数展开式的应用	531
一、习题 12-5	531
第六节 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质	535
一、习题 12-6	535
第七节 傅里叶级数	538
一、习题 12-7	538
二、考研试题精选	543
第八节 一般周期函数的傅里叶级数	543
一、习题 12-8	543
二、考研试题精选	547
总习题十二	549

第一章 函数与极限

第一节 映射与函数

一、习题 1-1

1 设 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $B = [-10, 3]$, 写出 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ 及 $A \setminus (A \setminus B)$ 的表达式.

【解】 $A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$, $A \cap B = [-10, -5)$,
 $A \setminus B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$, $A \setminus (A \setminus B) = [-10, -5)$.

2 设 A, B 是任意两个集合, 证明对偶律: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

【证】 先证: $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$.

$\forall x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A^c$ 或 $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$.

再证: $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$.

$\forall x \in A^c \cup B^c \Rightarrow x \in A^c$ 或 $x \in B^c \Rightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$.

3 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset X$, 证明:

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; (2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

【证】 (1) $\forall y \in f(A \cup B) = \{y \mid y = f(x), x \in A \cup B\}$
 $= \{y \mid y = f(x), x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

$\Leftrightarrow y \in \{y \mid y = f(x), x \in A\} \text{ 或 } y \in \{y \mid y = f(x), x \in B\}$

$\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$.

(2) $\forall y \in f(A \cap B) = \{y \mid y = f(x), x \in A \cap B\}$

$= \{y \mid y = f(x), x \in A \text{ 且 } x \in B\} \subset \{y \mid y = f(x), x \in A\}$

$\cap \{y \mid y = f(x), x \in B\}$

$\Rightarrow y \in \{y \mid y = f(x), x \in A\} = f(A) \text{ 且 } y \in \{y \mid y = f(x), x \in B\} = f(B)$

$\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$.

4 求下列函数的自然定义域:

(1) $y = \sqrt{3x+2}$;

(2) $y = \frac{1}{1-x^2}$;

(3) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$;

(4) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(5) $y = \sin\sqrt{x}$;

(6) $y = \tan(x+1)$;

(7) $y = \arcsin(x-3)$;

(8) $y = \sqrt{3-x} + \arctan\frac{1}{x}$;

$$(9) y = \ln(x+1);$$

$$(10) y = e^{\frac{1}{x}}.$$

【解】 (1) 因 $3x+2 \geq 0$, 即 $x \geq -\frac{2}{3}$, 故函数的定义域为 $[-\frac{2}{3}, +\infty)$.

(2) 因 $1-x^2 \neq 0$, 即 $x \neq \pm 1$, 故函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) 因 $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$ 即 $-1 \leq x \leq 1$ 且 $x \neq 0$, 故函数的定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

(4) 由 $4-x^2 > 0$, 得 $-2 < x < 2$, 故函数的定义域为 $(-2, 2)$.

(5) 要使函数有意义, 必须 $x \geq 0$, 故定义域为 $[0, +\infty)$.

(6) 要使函数有意义, 必须 $x+1 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, 即 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

(7) 要使函数有意义, 必须 $|x-3| \leq 1$, 即 $-1 \leq x-3 \leq 1$, 亦即 $2 \leq x \leq 4$, 故定义域为 $[2, 4]$.

(8) 由 $\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x \neq 0, \end{cases}$ 故定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$.

(9) 由 $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$, 故定义域为 $(-1, +\infty)$.

(10) 由 $x \neq 0 \Rightarrow$ 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

5 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = \lg x^2, \quad g(x) = 2\lg x;$$

$$(2) f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, \quad g(x) = x \sqrt[3]{x-1}; (4) f(x) = 1, \quad g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x.$$

【解】 两函数相同, 必须定义域相同, 对应法则也相同.

(1) 不同. 因为定义域不同, $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

(2) 不同. 因为对应法则不同, $f(x) = x$, 而 $g(x) = -x$ (当 $x < 0$ 时).

(3) 相同. 因为定义域、对应法则均相同.

(4) 不同. 因为 $g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x}$, 分母不所为零, 即 $x \neq k\pi + \frac{1}{2}\pi$, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同.

$$6 \text{ 设 } \varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

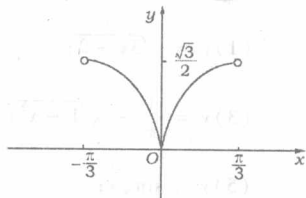
求 $\varphi(\frac{\pi}{6}), \varphi(\frac{\pi}{4}), \varphi(-\frac{\pi}{4}), \varphi(-2)$, 并作函数 y

$= \varphi(x)$ 的图形.

$$\text{【解】 } \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2},$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$



第6题图

$$\varphi(-2) = 0.$$

$y = \varphi(x)$ 图像如右.

7 试证下列函数在指定区间内的单调性:

$$(1) y = \frac{x}{1-x}, (-\infty, 1);$$

$$(2) y = x + \ln x, (0, +\infty).$$

【证】 (1) 设 $x_1 < x_2$, 且 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$, 由于

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1}{1-x_1} - \frac{x_2}{1-x_2} = \frac{x_1 - x_1x_2 - x_2 + x_1x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} < 0, \end{aligned}$$

即 $f(x_1) < f(x_2)$, 故 $y = \frac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调增加.

(2) 设 $x_1 < x_2$, 且 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 则有

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + \ln x_1) - (x_2 + \ln x_2) = (x_1 - x_2) + (\ln x_1 - \ln x_2).$$

由于 $y = \ln x$ 为单调增加函数, 所以 $(\ln x_1 - \ln x_2) < 0$.

又 $(x_1 - x_2) < 0$, 所以 $(x_1 - x_2) + (\ln x_1 - \ln x_2) < 0$.

故 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

8 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明: $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

【证】 因 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 上为奇函数, 所以对任意 $x \in (-l, l)$, 有 $f(-x) = -f(x)$.

对任意 $x_1, x_2 \in (-l, 0)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 即 $-x_1 > -x_2$, 且 $-x_1, -x_2 \in (0, l)$, 由于 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 所以 $f(-x_1) > f(-x_2)$, 即 $-f(x_1) > -f(x_2)$, 亦即 $f(x_1) < f(x_2)$. 故 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内单调增加.

9 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的, 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

【证】 (1) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 均为偶函数, 令 $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$, 因

$$F(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 均为奇函数, 令 $G(x) = g_1(x) + g_2(x)$, 因

$$G(-x) = g_1(-x) + g_2(-x) = -g_1(x) - g_2(x) = -G(x),$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 均为偶函数, 令 $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, 因

$$F(-x) = f_1(-x) \cdot f_2(-x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 均为奇函数, 令 $G(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$, 因

$$G(-x) = g_1(-x) \cdot g_2(-x) = [-g_1(x)] \cdot [-g_2(x)]$$

$$= g_1(x) \cdot g_2(x) = G(x),$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, 令 $H(x) = f(x) \cdot g(x)$, 因

$$H(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot [-g(x)] = -f(x)g(x) = -H(x),$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

10 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非奇函数又非偶函数?

$$(1) y = x^2(1 - x^2); \quad (2) y = 3x^2 - x^3;$$

$$(3) y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}; \quad (4) y = x(x - 1)(x + 1);$$

$$(5) y = \sin x - \cos x + 1;$$

$$(6) y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}.$$

【解】 由奇、偶函数的定义来判断.

$$(1) f(-x) = (-x)^2[1 - (-x)^2] = x^2(1 - x^2) = f(x), \text{ 故 } f(x) \text{ 为偶函数};$$

(2) $f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3 \neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$, 故 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数;

$$(3) f(-x) = \frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = f(x), \text{ 故 } f(x) \text{ 为偶函数};$$

(4) $f(-x) = (-x)[(-x) - 1][(-x) + 1] = -x(x - 1)(x + 1) = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数;

(5) $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) + 1 = -\sin x - \cos x + 1 \neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$, 故 $f(x)$ 即非奇函数又非偶函数;

$$(6) f(-x) = \frac{a^{(-x)} + a^{-(-x)}}{2} = \frac{a^x + a^{-x}}{2} = f(x), \text{ 故 } f(x) \text{ 为偶函数}.$$

11 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

$$(1) y = \cos(x - 2);$$

$$(2) y = \cos 4x;$$

$$(3) y = 1 + \sin \pi x;$$

$$(4) y = x \cos x;$$

$$(5) y = \sin^2 x.$$

【解】 (1) $y = \cos(x - 2)$ 是周期函数, 周期 $l = 2\pi$;

(2) $y = \cos 4x$ 是周期函数, 周期 $l = \frac{\pi}{2}$;

(3) $y = 1 + \sin \pi x$ 是周期函数, 周期 $l = 2$;

(4) $y = x \cos x$ 不是周期函数;

(5) $y = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 是周期函数, 周期 $l = \pi$.

12 求下列函数的反函数:

$$(1) y = \sqrt[3]{x + 1};$$

$$(2) y = \frac{1 - x}{1 + x};$$

$$(3) y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

$$(4) y = 2\sin 3x \left(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}\right);$$

$$(5) y = 1 + \ln(x + 2);$$

$$(6) y = \frac{2^x}{2^x + 1}.$$

【解】 (1) 由 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 解出 $x = y^3 - 1$, 故所求反函数为 $y = x^3 - 1$.

(2) 由 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 解出 $x = \frac{1-y}{1+y}$, 故所求反函数为 $y = \frac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 解出 $x = \frac{b-dy}{cy-a}$, 故所求反函数为 $y = \frac{b-dx}{cx-a}$ ($x \neq \frac{a}{c}$).

(4) 由 $y = 2\sin 3x$ ($-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$) 解得 $x = \frac{1}{3}\arcsin \frac{y}{2}$, 即反函数为 $y = \frac{1}{3}\arcsin \frac{x}{2}$;

(5) 由 $y = 1 + \ln(x+2)$ 解得 $x = e^{y-1} - 2$, 即反函数为 $y = e^{x-1} - 2$;

(6) 由 $y = \frac{2^x}{2^x+1}$ 解得 $x = \log_2 \frac{y}{1-y}$, 即反函数 $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$.

13 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

【证】 充分性. 已知 $M_1 \leq f(x) \leq M_2$, 对任意 $x \in X$, 取 $M = \max\{|M_1|, |M_2|\}$, 则 $|f(x)| \leq M$, 对任意 $x \in X$, 有界.

必要性. 已知 $f(x)$ 有界, 即对任意 $x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则 $-M \leq f(x) \leq M$, 故既有上界 $M_1 = M$, 也有下界 $M_2 = -M$, 得证.

14 在下列各题中, 求由所给函数构成的复合函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

$$(1) y = u^2, \quad u = \sin x, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) y = \sin u, \quad u = 2x, \quad x_1 = \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4};$$

$$(3) y = \sqrt{u}, \quad u = 1 + x^2, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2;$$

$$(4) y = e^u, \quad u = x^2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1;$$

$$(5) y = u^2, \quad u = e^x, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1.$$

【解】 (1) 复合函数为 $y = \sin^2 x$. 当 $x_1 = \frac{\pi}{6}$ 时, $y = \frac{1}{4}$; 当 $x_2 = \frac{\pi}{3}$ 时, $y = \frac{3}{4}$.

(2) 复合函数为 $y = \sin 2x$. 当 $x_1 = \frac{\pi}{8}$ 时, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 当 $x_2 = \frac{\pi}{4}$ 时, $y = 1$.

(3) 复合函数为 $y = \sqrt{1+x^2}$. 当 $x_1 = 1$ 时, $y = \sqrt{2}$; 当 $x_2 = 2$ 时, $y = \sqrt{5}$.

(4) 复合函数为 $y = e^{x^2}$. 当 $x_1 = 0$ 时, $y = 1$; 当 $x_2 = 1$ 时, $y = e$.

(5) 复合函数为 $y = e^{2x}$. 当 $x_1 = 1$ 时, $y = e^2$; 当 $x_2 = -1$ 时, $y = e^{-2}$.

15 设 $f(x)$ 的定义域 $D = [0, 1]$, 求下列各函数的定义域:

$$(1) f(x^2);$$

$$(2) f(\sin x);$$

$$(3) f(x+a) \ (a > 0);$$

$$(4) f(x+a) + f(x-a) \ (a > 0).$$

【解】 (1) 由 $0 \leq x^2 \leq 1$, 得 $-1 \leq x \leq 1$, 故 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-1, 1]$.

(2) 由 $0 \leq \sin x \leq 1$, 得 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 故 $f(\sin x)$ 的定义域是 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ (k 为整数).